

В. І. Гуляєв, П. З. Луговий, І. Л. Соловйов

## Критичні стани циліндричних оболонок під дією відцентрових та слідкуючих осьових навантажень

*(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)*

*За допомогою методів комп'ютерного моделювання виконано аналіз виникнення критичних станів у тонких пружних циліндричних оболонках, що обертаються від дії осьових неконсервативних стискаючих сил. Встановлено, що просте обертання оболонки супроводжується її квазістатичним випинанням, у той час як дія додаткової неконсервативної сили приводить до появи нестійких пружних коливань.*

1. Циліндричні оболонки, що обертаються, широко застосовуються в турбінах транспортних і енергетичних установок. Основна особливість їх динамічної поведінки полягає в можливості виникнення складних режимів коливань, викликаних дією радіально спрямованих відцентрових сил інерції та осьових слідкуючих навантажень.

Головною властивістю відцентрових сил інерції є те, що вони завжди спрямовані в радіальному напрямку відносно осі обертання системи та залежать від пружних радіальних переміщень елемента ротора. Найбільш помітним ефектом, викликаним їх дією, є квазістатичне біфуркаційне випинання вала при досягненні деякого критичного значення його кутової швидкості обертання [3, 4].

На характер критичного стану ротора також впливає тип діючих на нього осьових сил. Залежно від можливості збереження або зміни їх напрямку при пружному деформуванні оболонки, ці сили можна розділити на консервативні та неконсервативні. У теоретичній механіці сили, які можуть бути знайдені з умови збереження енергії в суто механічному значенні цього слова, називають консервативними. Їх застосування в будівельній механіці та теорії пружності пов'язане з основним припущенням, що рівновага деформованої системи знаходиться під дією так званих мертвих сил, які діють на основну недеформовану систему. Це припущення, яке використовується для обґрунтування загальної теорії Кірхгофа про єдиність, не може бути використане в задачах стійкості. При цьому, важливим є фактор, пов'язаний із збереженням або зміною напрямку сил при втраті стійкості системи.

Серед навантажень останнього типу можна виділити клас сил, що діють в напрямку дотичної до осової лінії на вільному кінці деформованого консольного стержня (рис. 1, а). Їх дія може бути викликана реактивним струменем витікаючої рідини і газу, потоками рідини і газу від лопаток, які обертаються на вільному кінці вала, та інших джерел. Неконсервативні навантаження зазначеного типу називаються слідкуючими [1].

У роботах [1, 3, 4] звертається увага на залежність характеру втрати стійкості стержневих систем від виду осьових сил. Показано, що якщо сила, прикладена до вільного кінця консольного стержня, є слідкуючою, то його втрата стійкості може бути реалізована тільки в результаті переходу в нестійкий коливальний рух.

Однак, якщо консольний стержень обертається з кутовою швидкістю і стиснутий поздовжньою слідкуючою силою  $T$ , то характер його механічної поведінки істотно ускладнюється, а тип втрати стійкості (квазістатичний або динамічний) починає залежати від співвідношення між величинами  $T$  і  $\omega$ .

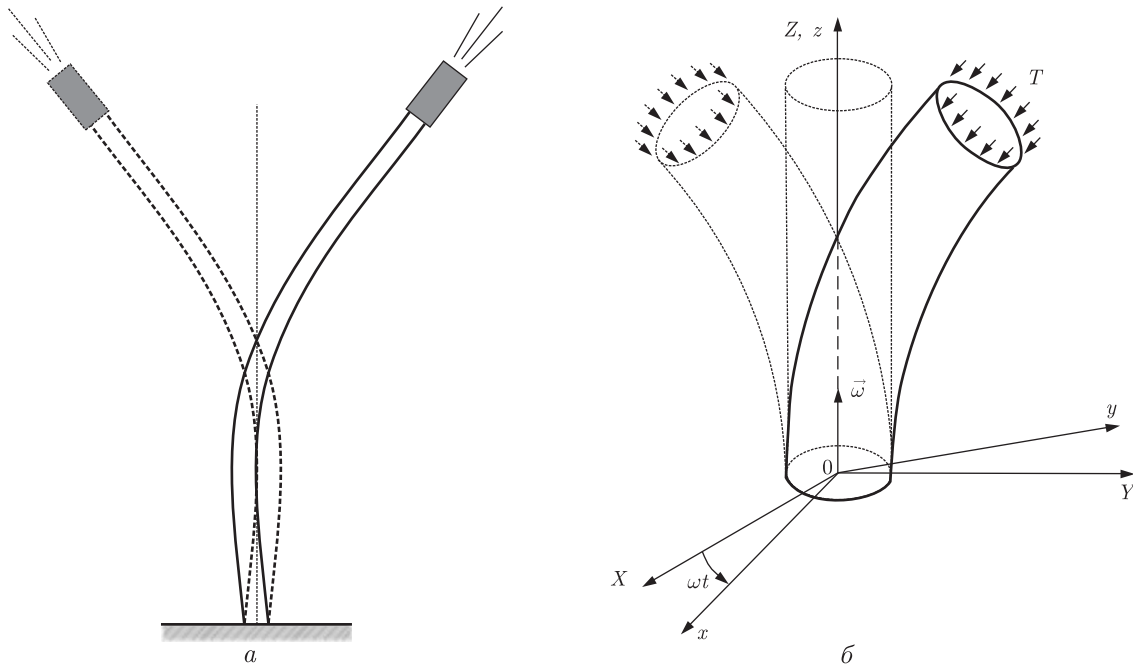


Рис. 1. Форми коливань тонкостінної трубчастої консолі

Аналогічні явища виникають в циліндричних оболонках, що обертаються, та навантажені осьовими силами (рис. 1, б). У даній роботі стійкість квазістатичної рівноваги оболонок під дією обертання та дією осьових слідкуючих навантажень аналізується на основі динамічного підходу.

**2. Рівняння коливань тонких оболонок, що обертаються.** Вважатимемо, що тонкостінна пружна циліндрична оболонка жорстко пов'язана з носієм, що обертається з постійною за модулем кутовою швидкістю  $\vec{\omega}$  разом із системою координат  $Oxyz$  відносно осі симетрії  $Oz$  (рис. 1, б). Введемо праві системи координат:  $OXYZ$  — інерційна система координат з початком у центрі опорного контура оболонки, вісь  $OZ$  збігається з віссю  $Oz$ . На серединній поверхні оболонки введемо ортогональну криволінійну систему координат  $Ox^1x^2x^3$ , в якій координатна лінія  $x^1$  лежить в утворюючому перерізі,  $x^2$  спрямована в круговому напрямку,  $x^3$  — вздовж напрямку внутрішньої нормалі до поверхні оболонки.

Стійкість оболонки будемо досліджувати в лінеаризованій постановці, враховуючи її попереднє напруження відцентровими силами інерції та поздовжньою стискаючою силою. Рівняння динамічної рівноваги елемента оболонки, записані в криволінійній ортогональній системі координат  $Ox^1x^2x^3$  з базисними векторами  $\vec{e}_\alpha$  на поверхні, мають вигляд [2, 5]

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \vec{T}^\alpha + \vec{p} &= 0, \\ \nabla_\alpha \vec{M}^\alpha + (\vec{e}_\alpha \times \vec{T}^\alpha) \sqrt{a_{11}a_{22}} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2). \end{aligned} \tag{1}$$

Тут  $\vec{T}^\alpha$  — вектор внутрішніх сил в оболонці;  $\vec{M}^\alpha$  — вектор внутрішніх моментів;  $a_{11}$ ,  $a_{22}$  — коефіцієнти першої квадратичної форми серединної поверхні;  $\vec{p}$  — вектор інтенсивності зовнішнього розподіленого навантаження.

Використовуючи співвідношення між контраваріантними компонентами функцій внутрішніх сил  $T^{ij}$  і моментів  $M^{ij}$  і коваріантними складовими функцій деформації  $\varepsilon_{ij}$  і зміни кривизни  $\mu_{ij}$ , одержимо

$$T^{ij} = \frac{Eh\varepsilon_{\alpha\beta}[a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta}]}{1-\nu^2},$$

$$M^{ij} = \frac{Eh^3\mu_{\alpha\beta}[a^{ij}a^{\alpha\beta} + (1-\nu)a^{i\alpha}a^{j\beta}]}{12(1-\nu^2)}.$$
(2)

Виразивши ці функції через коваріантні компоненти  $u_1, u_2, u_3$  вектора переміщень  $\vec{u}$  і кута повороту  $\vartheta_i$  перерізу, одержуємо розв'язувальні рівняння стійкості.

У даній роботі вивчаються критичні стани оболонок середньої довжини, що реалізовані за першою гармонікою кругової координати, яка є найменш енергомісткою. Тому будемо апроксимувати шукані змінні базисними функціями  $\sin(ct + x^2)$ ,  $\cos(ct + x^2)$  з фазовою координатою  $ct + x^2$ , де  $c$  — частота вільних коливань [2, 5]. Тоді з урахуванням цього спрощення з (1), (2) можна отримати рівняння вільних коливань

$$\frac{dT^{(11)}}{dx^1} - T^{(12)} + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2)T^{(11)} + \Gamma_{22}^1T^{(22)} - b_1^1T^{(13)} + \gamma h \left( \frac{\omega^2\vartheta_{(1)}r + c^2u_{(1)}}{a_{11}} \right) = 0,$$

$$\frac{dT^{(12)}}{dx^1} + T^{(22)} + (3\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(12)} + T_0^{(11)} \frac{d^2u_{(2)}}{d(x^1)^2} - b_2^2T^{(23)} +$$

$$+ \gamma h \left( \frac{\omega^2\vartheta_{(2)}r + 2\omega cu_{(3)}\sqrt{a_{22}} + c^2u_{(2)} + \omega^2u_{(2)}}{a_{22}} \right) = 0,$$
(3)

$$\frac{dT^{(13)}}{dx^1} - T^{(23)} + (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1)T^{(13)} + b_{11}T^{(11)} - \mu_{(11)}T_0^{(11)} + b_{22}T^{(22)} -$$

$$- \mu_{(22)}T_0^{(22)} + \gamma h \left( \frac{2\omega cu_{(2)}}{\sqrt{a_{22}}} + c^2u_{(3)} + \omega^2u_{(3)} \right) = 0.$$

Тут нулем праворуч знизу позначені функції внутрішніх зусиль, викликаних попередньою напругою оболонки. Співвідношення (3) доповнюються граничними рівняннями на краях  $x^1 = 0$ ,  $x^1 = L$ :

$$u_{(1)}(0) = u_{(2)}(0) = u_{(3)}(0) = 0, \quad \left. \frac{du_{(3)}}{dx^1} \right|_{x^1=0} = 0,$$
(4)

$$T^{(11)}(L) = T^{(12)}(L) = M^{(11)}(L) = V^{(13)}(L) = 0.$$

Значення частоти  $c$ , при яких однорідна система (3), (4) має нетривіальні розв'язки, є власними, а сам розв'язок являє собою форму коливань оболонки.

При цьому, як звичайно, розв'язання будується у два етапи. На першому етапі розглядається квазістатична задача для оболонки, яка обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , та напружена рівномірно розподіленим навантаженням  $T^{(11)}(L) = T/2\pi r$ , що прикладене до вільного кінця. В результаті її розв'язання підраховуються внутрішні зусилля в оболонці  $T_0^{(11)}$ ,  $T_0^{(22)}$ , які потім як коефіцієнти використовуються в лінеаризованих рівняннях (3). На другому етапі розв'язується система (3), (4).

Зазначимо, що вільні коливання, описані цією системою, мають вигляд гармонійної хвилі, що біжить у напрямку обертання з кутовою швидкістю  $c$ . Причому, якщо при  $\omega = 0$  частоти є кратними, а хвилі стоячими, то при  $\omega \neq 0$  кратні частоти розщеплюються на дві і їх моди починають прецесувати у різних напрямках. Від'ємній частоті  $c$  відповідає прецесія в напрямку обертання оболонки (пряма регулярна прецесія), додатній частоті  $c$  — прецесія в протилежному напрямку (зворотна регулярна прецесія).

Якщо ставиться задача про квазістатичну втрату стійкості циліндричної оболонки, яка обертається, то в системі (3) відкидаються доданки, що містять множники  $c$  та  $c^2$  і далі застосовується та ж сама двоетапна процедура.

Чисельна реалізація розв'язання за описаною схемою базується на застосуванні методу початкових параметрів і ортогоналізації за Годуновим [2, 5]. При цьому система диференціальних рівнянь восьмого порядку (3) зводиться до системи восьми рівнянь першого порядку і для неї ставиться двочкова крайова задача. Далі при заданих  $T$  і  $\omega$  шляхом інтегрування системи рівнянь (3) методом Рунге-Кутта формується матриця фундаментальних розв'язків  $Y(x^1)$  на відрізку  $0 \leq x^1 \leq L$ . Потім підстановкою в граничні умови знайденого розв'язку будується однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D\vec{C} = 0 \quad (5)$$

і обчислюється визначник матриці  $D$ . Стани, в яких ця матриця вироджується, є особливими, оскільки в них система має як тривіальний, так і нетривіальний розв'язки. У цьому випадку власне значення  $c$  системи (3) являє собою частоту власних коливань.

Дослідження біфуркаційного випинання оболонки, що обертається, здійснюється за допомогою того ж самого алгоритму, тільки в цьому випадку із системи (3) відкидаються доданки з коефіцієнтами  $c$  та  $c^2$  і знаходяться комбінації величин  $T$  і  $\omega$ , що відповідають виродженню матриці  $D$ . Методика побудови форми втрати стійкості відповідає описаному вище алгоритму побудови власних форм.

**3. Аналіз результатів.** Для досліджень були обрані циліндричні оболонки довжиною  $L = 0,5; 1; 2$  і  $3$  м з радіусом серединної поверхні  $r = 0,05$  м та товщиною  $h = 10^{-3}$  м. Матеріал оболонки — сталь із фізичними параметрами: модуль пружності  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па; коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ ; густина  $\gamma = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Спочатку за допомогою розробленої методики був проведений аналіз квазістатичної втрати стійкості оболонок довжиною  $L = 1$  м і  $2$  м при простому обертанні. Порівняно велике відношення довжини оболонки до її діаметра дозволило досліджувати її стійкість за допомогою двох математичних моделей — теорії оболонок і теорії балок. Для цих моделей розглядалася статична стійкість оболонок, що обертаються, і попередньо напружені поздовжньо розподіленими слідкуючими силами, які стискають або розтягують її в осьовому напрямку.

З одержаних результатів випливає, що знайдені для оболонок критичні значення кутової швидкості виявилися дещо меншими (на 0,5–2 відсотка) відповідних значень, що підраховані за теорією балок ( $L = 1$  м), і дещо більшими (на 0,01–2 відсотка) відповідних значень для випадку  $L = 2$  м.

Аналіз впливу характеру дії осьової сили на критичні значення кутової швидкості дозволив встановити, що стискаюча слідкуюча сила стабілізує систему, “мертва” сила — дестабілізує.

Відзначимо також ще один на перший погляд несподіваний результат. Як виявилось, у всіх випадках дія стискаючої слідкуючої сили ( $T < 0$ ) на стержень, що обертається,

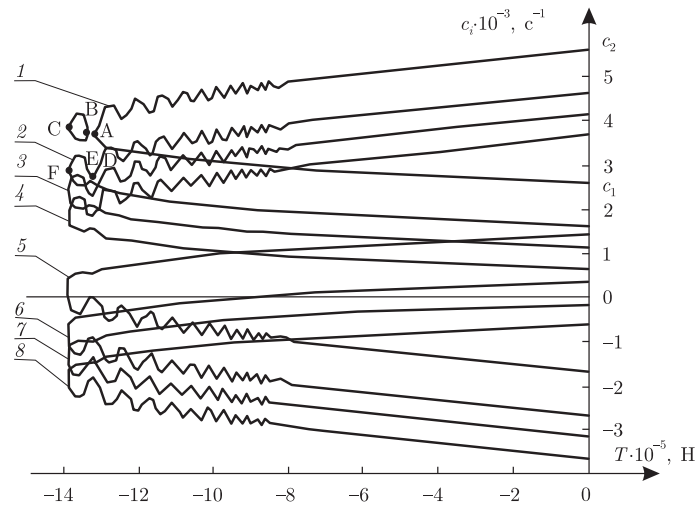


Рис. 2. Залежності частот  $c_1$ ,  $c_2$  від стискаючої осьової сили для циліндричної оболонки довжиною  $L = 1$  м для випадку обертання з кутовими швидкостями  $\omega = 0$  (криві 4, 8);  $\omega = 500 \text{ c}^{-1}$  (криві 3, 7);  $\omega = 1000 \text{ c}^{-1}$  (криві 2, 6);  $\omega = 2000 \text{ c}^{-1}$  (відповідно, криві 1, 5)

приводить до більшого значення критичної кутової швидкості  $\omega$ , дія сили, що розтягує ( $T > 0$ ) — до зворотного ефекту. Таким чином, стискаюча слідкуюча сила стабілізує квазістатичну рівновагу стержня, що обертається, сила, що розтягує, — дестабілізує його. Цей ефект властивий і консольним оболонкам.

Відомо [3, 4], що якщо консольний стержень тільки обертається і не піддається дії осьової сили, то із збільшенням його кутової швидкості  $\omega$  може бути реалізована тільки квазістатична форма втрати стійкості, при якій відбувається його ейлерове випинання в системі координат, що обертається. У випадку, коли стержень піддається дії тільки поздовжньої слідкуючої стискаючої сили, можлива тільки динамічна втрата стійкості, яка супроводжується його переходом у режим коливальних рухів [1, 3, 4]. Однак, якщо обидва види збурень консольного стержня реалізуються одночасно, то залежно від співвідношення між їх величинами можуть бути реалізовані як перший, так і другий тип критичних станів. Щоб встановити, який з них настає раніше, були розв'язані задачі про динамічну поведінку циліндричних оболонок, що обертаються і стиснуті силою  $T$ .

Дослідження проведено за методикою, яка викладена в роботі [3]. Вона базується на тому, що при динамічній втраті стійкості пружної системи її нижчі частоти стають комплексними і система втрачає першу і другу дійсні частини.

На рис. 2 показані залежності частот  $c_1$ ,  $c_2$  від стискаючої осьової сили для циліндричної оболонки довжиною  $L = 1$  м для випадку обертання з кутовими швидкостями  $\omega = 0$  (криві 4, 8);  $\omega = 500 \text{ c}^{-1}$  (криві 3, 7);  $\omega = 1000 \text{ c}^{-1}$  (криві 2, 6);  $\omega = 2000 \text{ c}^{-1}$  (відповідно, криві 1, 5).

Особливий інтерес становлять криві 1 і 2. Так, для кривої 1 злиття частот  $c_1$  і  $c_2$  відбувається в точці А (для кривої 2 — у точці D), потім із збільшенням за модулем величини  $T$  частотні криві виникають знову в точці В (для кривої 2 — у точці E) і знову замикаються в точці С (для кривої 2 — у точці F).

Форми коливань меридіонального перерізу оболонки в критичних станах приблизно відповідають рис. 1, а. Вони являють собою середню конфігурацію між першою і другою формами вільних коливань ненапруженої оболонки.

Розрахунки показали, що знайдені за теорією балок значення слідкуючої сили  $T$ , при яких настає динамічна втрата стійкості, не залежать від величини  $\omega$ . В той же час ці значення слідкуючої сили  $T$ , що підраховані на основі теорії циліндричних оболонок, відрізняються, хоча й неістотно. Тому можна відзначити, що застосування теорії оболонок для розрахунку трубчастих стержнів дозволяє дещо уточнити критичні значення  $T$ . Так, при застосуванні моделі теорії балок критичне значення поздовжньої сили становило  $T_{кр} = 1,65 \cdot 10^6$  Н, для моделі теорії оболонок —  $T_{кр} = 1,40 \cdot 10^6$  Н.

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 339 с.
2. Гуляев В. И., Луговой П. З., Соловьев И. Л. Упругие колебания одноопорного тонкостенного ротора (составной оболочки) при сложном вращении // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 8. – С. 113–120.
3. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – Москва: Наука, 1967. – 237 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – Москва: Мир, 1971. – 192 с.
5. Gulyaev Vol. I, Solovjov I. L., Lugovy P. Z. Analysis of precession vibrations of thin-wall elastic shells in compound rotation // J. Sound and Vibr. – 2001. – **246**, No 3. – P. 491–504.

Національний транспортний університет, Київ  
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 20.05.2008

**V. I. Gulyaev, P. Z. Lugovyi, I. L. Solov'ov**

### **The critical states of cylindrical shells under the action of centrifugal and follower axial loads**

*The analysis of effects of the critical state emergence in an elastic thin-wall cylindrical rotating shell under the action of a non-conservative axial compressive force is performed on the basis of a computer simulation approach. It is established that a simple rotation of the shell is accompanied by its quasistatic buckling, whereas the additional application of a non-conservative axial force leads to the generation of non-steady elastic vibrations. The analysis is performed with the use of appropriate shell and beam models.*