УДК 612.821:007

С. С. Забара, Н. Б. Філімонова, К. Х. Зеленський

Метод виділення інваріантних ознак сигналів

(Представлено академіком НАН України О. В. Палагіним)

Запропоновано метод виділення та оптимізації системи інваріантних відносно зсуву, обертання та масштабування ознак дискретних сигналів та зображень у зоровій системі з метою стиску та відновлення сигналів із довільною заданою точністю, що дозволяє відокремити інформацію про суттєві характеристики сигналів.

Вперше математичне формулювання проблеми інваріантної обробки сигналів запропоновано в [1], де було зазначено, що однією з основних проблем, які виникають при обробці сигналів (у тому числі зображень), є проблема виділення повної системи інваріантних ознак сигналу. При цьому необхідно відокремлювати інформацію про характерні особливості самого сигналу від інформації про перетворення, яких цей сигнал зазнав. Ці перетворення (наприклад, зсув, оберт зображення, масштабне перетворення сигналу тощо) нами не контролюються, але вони не повинні впливати на результат роботи системи. Тому образи, що переходять один в інший під дією певних перетворень, треба класифікувати як еквівалентні [1].

Розроблено декілька підходів до розв'язання вказаної задачі: підхід, який базується на спектральному аналізі функцій на групі [1, 2], неперервно-груповий підхід, метод моментних інваріантів, а також метод, який використовує потенціальні функції. Крім того, запропоновано спеціальні алгоритми знаходження деяких інваріантних ознак сигналів. Однак жоден з цих методів не вирішує проблему в загальному випадку.

Найбільш близьким до пропонованого є підхід, який базується на спектральному аналізі функцій на групі [1, 2].

Означення. Нехай в X діє група $G = \{g\}$ перетворень g (це, наприклад, група зсувів, обертів тощо), яка породжує у просторі $L(X)$ своє представлення операторами зсуву $A(g)f(x) = f(gx)$, $g \in G$, $f \in L(X)$. Функції $f_1(x)$, $f_2(x) \in L(X)$ називають еквівалентними, якщо існує перетворення $g \in G$ таке, що $A(g)f_1 = f_2$ та $A(g^{-1})f_2 = f_1$.

У задачах інваріантного розпізнавання всі еквівалентні функції ототожнюються, множина $\{f(x)\}$ розбивається на класи еквівалентності функцій, що не перетинаються, кожен з яких складається з усіх функцій $A(g)f(x) = f(g^{-1}x)$, де $g \in G$.

Означення. Інваріантом групи G перетворень в X називають функціонал $I(f)$ на $L_2(X)$, який є константа на еквівалентних функціях. Тоді повною системою інваріантів називається лічена система інваріантів $\{I_\lambda(f)\}$ $(\lambda = 0, 1, \ldots)$, яка однозначно визначає функцію f з точністю до перетворень групи G, тобто з $I_\lambda(f_1) = I_\lambda(f_2)$ для всіх $\lambda = 0, 1, \ldots$ випливає, що f_1 та f_2 еквівалентні.

Отже, проблема інваріантної обробки сигналів може бути зведена до задачі виділення повної системи інваріантних функціоналів.

Зауважимо, що інколи важливо дослідити не весь клас еквівалентності сигналів, а лише окремого представника цього класу. Для цього треба відокремити інваріантні ознаки від неінваріантних (параметрів перетворень).

Вирішення зазначеної проблеми тісно пов'язано з існуванням гармонічного аналізу на локально компактних групах [3]. Кожна така група автоматично пов'язана зі спеціальною системою ортогональних базисних функцій — матричними елементами її незвідних представлень [4]. З іншого боку, на практиці для обробки сигналів пропонується багато систем ортогональних функцій, які не пов'язані з жодною із груп. Крім того, не кожне лінійне перетворення є група. Тому природно запропонувати формулювання проблеми інваріантної обробки сигналів, замінивши групи перетворень на більш загальну математичну структуру. За таку структуру в [5] пропонується брати оператори узагальненого зсуву [6, 7].

Означення. Нехай Q — множина, а M — лінійний простір функцій на Q. Нехай на функціях $y(t)$, $t \in Q$, визначено множину лінійних операторів R^s, які залежать від $s \in \in Q$ як від параметра. Таким чином, кожній функції $y(t) \in M$ ставиться у відповідність функція $F(s,t)$ від двох точок простору Q. Далі використовуватимемо позначення: $F(s,t) = = R^s y(t)$. Лінійні оператори R^s $(s \in Q)$, які діють на M, називають правими операторами узагальненого зсуву (о. у. з.), якщо:

1) існує елемент $e \in Q$, для якого $R^e \equiv I$ — одиничний оператор;

2) для будь-якого фіксованого $t \in Q$, $y \in M$: $R^s y(t) \in M$;

3) $R_s^r R^s y(t) = R_t^s R^r y(t)$ (для будь-якого $y(t) \in M$, t, s, $r \in Q$), де нижній індекс показує, за якою змінною діє оператор.

У теорії класичного гармонічного аналізу важливу роль відіграє не тільки сам зсув, а й згортка функцій, яку він породжує. Так, звичайна згортка визначається таким чином:

$$(f * g)(q) = \int\limits_{R^1} f(q-p)g(p)dp = \int\limits_{R^1} f(p)g(q-p)dp = \int\limits_{R^1} f(p)R^{-p}g(q)dp,$$

де $q \in R^1$.

Можна ввести узагальнену згортку $*$, яка пов'язана з операторами узагальненого зсуву, аналогічним чином [7].

Означення. Згорткою функцій f, g, які належать простору $C(Q)$ неперервних функцій на Q, будемо називати функцію

$$(f * g)(q) = \int\limits_{Q} f(p)(R^{\widehat{p}}g)(q)d\mu(p) \qquad (q \in Q),$$

де $p \in Q$, $p \vdash \widehat{p} \in Q$ — деяка інволюція, задана в Q, що замінює перехід до зворотного елемента в R^1, а μ — фіксована міра на Q, яка наслідує деякі властивості міри Лебега. Якщо $p = \widehat{p}$, то відповідні о. у. з. називають ермітовими.

Існування розвиненої теорії о. у. з. дозволяє сформулювати проблему інваріантної обробки сигналів таким чином.

Нехай сигнал, який залежить від часу, або образ (зображення), що буде оброблено, будемо описувати за допомогою дискретної функції $y(\mathbf{t})$, де аргумент $\mathbf{t}$ являє собою, взагалі кажучи, багатовимірний вектор, який належить деякій множині Q і деякому лінійному простору M, на якому діє множина о. у. з.

Означення. Функції $y(\mathbf{t})$ та $z(\mathbf{t})$ називають еквівалентними, якщо існує $s \in Q$ таке, що $R^s y(\mathbf{t}) = z(\mathbf{t})$.

Тоді простір M розбивається на орбіти щодо дії о. у. з. R^s. Таким чином, вирішення проблеми інваріантної обробки сигналу, як й у випадку груп перетворень, зводиться до задачі отримання повної множини інваріантних ознак цього сигналу, але зараз ми розуміємо інваріантність відносно деякої множини о. у. з.

Крім того, нехай функція $y(\mathbf{t})$ зазнала деякого перетворення (зсув, оберт, перетворення масштабу тощо), що задається операторами узагальненого зсуву (о. у. з.) $R^s\colon y(s(\mathbf{t})) = R^s y(\mathbf{t})$, $(\mathbf{t} \in Q)$. Отже, на вхід системи надходить не сигнал $y(\mathbf{t})$, а перетворений сигнал $y(s_0(\mathbf{t}))$ з деякими фіксованими параметрами перетворення $s_0(\mathbf{t})$, які нам не відомі. Задача полягає у тому, щоб знайти значення параметрів $s_0(\mathbf{t})$, перетворення і виділити характерні особливості самого сигналу. Ідея розв'язання цієї задачі — побудувати деякий функціонал від $y(s_0(\mathbf{t}))$, який набуває максимального значення саме тоді, коли значення перетворень $s(\mathbf{t})$ будуть збігатися з $s_0(\mathbf{t})$.

Теорема. *Нехай $y(s(\mathbf{t}))$ — сигнал, що зазнав перетворень, які визначаються дією деяких о. у. з. $R^s\colon y(s(\mathbf{t})) = R^s y(\mathbf{t})$, $(\mathbf{t} \in Q)$, Q — деяка скінченна дискретна множина. Тоді для сигналу $y(s_0(\mathbf{t}))$, де s_0 — деяке фіксоване значення параметрів прихованих перетворень, існує система інваріантних ознак сигналу $\{c_k(s_0, s_0)\}_{k\in N1}$, за якими сигнал відновлюється з довільною заданою наперед похибкою ε, причому приховані значення параметрів s_0 дорівнюють значенню s, при якому функціонал енергії $W(s, s_0)$ досягає свого максимуму.*

Доведення. Доведення теореми є конструктивне і полягає у побудові системи інваріантних ознак сигналу. Загальна схема виділення інваріантних ознак сигналу та знаходження значень прихованих перетворень, яких цей сигнал зазнав, складається з таких кроків.

1. Будується множина ортонормованих базисних функцій Кравчука $\Omega = \{\varphi_k^p(s(t))\}$ на множині Q з параметром $0 < p < 1$ і для всіх лінійних перетворень R^s $(s \in Q)$ [8, 9].

Вибір конкретного базису, за яким розкладатиметься сигнал $y(s(t))$, зумовлюється тими міркуваннями, що чим сильніше функція $y(t)$ корелює з функцією ваги, що задає співвідношення ортогональності для базисних поліномів, тим менша кількість коефіцієнтів розкладу сигналу міститиме у собі істотну інформацію про сигнал. Наша модель орієнтована на обробку імпульсних функцій в ортонормованому випадку та n-вимірних образів у загальному випадку, що мають певну локалізацію, оберт у полі зору моделі.

2. Обчислюються узагальнені спектральні коефіцієнти сигналу відносно множини лінійних перетворень обраного базису:

$$c_k^p(s, s_0) = (R^{s_0} y(\mathbf{t})) * (R^s \varphi_k^s(\mathbf{t})).$$

3. Будується функціонал енергії. Оскільки функції Кравчука утворюють повний ортонормований базис, то має місце рівність Парсеваля

$$\|y\| = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k^p(s, s_0)| \tag{1}$$

для всіх значень $s \in Q$ та $p \in (0, 1)$. Поміж просторів, які утворюються базисами з відповідними значеннями параметрів $s \in Q$ та $p \in (0, 1)$, знаходимо підпростір розмірності $N1$, $N1 \leqslant N$, що утворюється тими функціями Кравчука, при яких сума квадратів відповідних спектральних коефіцієнтів сигналу має найбільше значення, тобто відгук системи є максимальний. Так ми переходимо до підпростору R^{N1} — простору, який породжується спектральними коефіцієнтами $\{c_k^p(s, s_0)\}_{k\in N1}$, де концентрується істотна інформація про сигнал. Виходячи з цих міркувань, будуємо функціонал енергії

$$W^p(s, s_0) = \sum_{k \in N1} |c_s^p(s, s_0)|^2, \tag{2}$$

де $N1$ — підмножина номерів узагальнених спектральних коефіцієнтів, за якими проводиться підсумовування.

4. Шукається максимум функціонала енергії $\max\limits_{s \in Q\, p \in (0,1)} W^p(s, s_0)$. Шукані значення параметра s — це значення параметрів, які відповідають максимуму функціонала $W^p(s, s_0)$. Оскільки з формули (2) випливає, що $W^p(s, s_0)$ — невід'ємний функціонал, а з (1) — він є обмежений, його глобальний максимум існує. Для ортонормованих послідовностей функцій Кравчука $R^s\varphi_0^p(\mathbf{t})$, $R^s\varphi_1^p(\mathbf{t}), \ldots$, з параметрами $p \in (0, 1)$, $s \in Q$ та довільної квадратично інтегровної функції $R^{s_0}y(\mathbf{t})$ виконується нерівність Бесселя

$$\sum_{k \in N1} |(R^s y(\mathbf{t})) * (R^s \varphi_k^p(\mathbf{t}))|^2 \leqslant \|R^{s_0} y(\mathbf{t})\|^2$$

для $\forall\, p \in (0, 1)$. Знак рівності можливий тоді і тільки тоді, коли $y(s_0(\mathbf{t})) = R^{s_0}y(\mathbf{t})$ належить лінійному многовиду, натягнутому на $R^s\varphi_0^p(\mathbf{t})$, $R^s\varphi_1^p(\mathbf{t}), \ldots$, тобто максимум функціонала $W^p(s, s_0)$ буде досягнуто саме тоді, коли змінні значення параметра s будуть збігатися з прихованими значеннями s_0. Оскільки асиметрія базисних функцій Кравчука визначається параметром $p \in (0, 1)$ після знаходження значення прихованого перетворення s_0, максимум функціонала $W^p(s_0, s_0)$ по $p \in (0, 1)$ визначає значення p_0, тобто ті базисні функції Кравчука $\Omega = \{\varphi_k^{p_0}(s_0(\mathbf{t}))\}$, які найкраще враховують асиметрію функції $y(s_0(\mathbf{t}))$.

5. Оптимізується множина спектральних коефіцієнтів. Підмножина індексів $N2$ знаходиться в інтерактивному режимі на основі заданої наперед похибки відновлення сигналу ε. При цьому сигнал наближено відновлюється за формулою

$$\widetilde{y}(\mathbf{t}) = \sum_{k \in M} c_k^{p_0}(s_0, s_0) R^{s_0} \varphi_k^{p_0}(\mathbf{t}).$$

Похибка відновлення сигналу

$$\widetilde{\varepsilon} = \|\widetilde{y} - y\|,$$

де $\|\cdot\|$ — квадратична норма в R^{N1}. Можливе також застосування інших норм. $N2$ — мінімальна з усіх можливих множина індексів, при яких похибка відновлення $\widetilde{\varepsilon}$ не перевищує заданого наперед ε.

Отже, отримано множину узагальнених спектральних коефіцієнтів $\{c_k^{p_0}(s_0, s_0)\}_{k \in N2}$, яка є повною оптимальною множиною інваріантних ознак сигналу $y(s_0(\mathbf{t}))$ відносно всіх його лінійних перетворень, а також деяких нелінійних, які пов'язані з асиметричною деформацією сигналу. За цими ознаками сигнал може бути відновлений з будь-якою заданою наперед точністю. При цьому знаходяться значення прихованих перетворень сигналу s_0.

Довільне лінійне перетворення можна навести як суперпозицію перетворень зсуву, масштабу та оберту.

Наслідок 1. *Нехай R^s — перетворення зсуву на деякій скінченній дискретній множині Q, яка є підмножиною натуральних чисел N, тобто $\mathbf{t} \in Q = \{0, 1, \ldots, N-1\}$,*

$y(s(\mathbf{t})) \equiv R^s y(\mathbf{t}) = ((\mathbf{t} - s) \bmod N)$. *Тоді узагальнені спектральні коефіцієнти сигналу* $y(\mathbf{t} - s_0)$ *обчислюються за такими формулами:*

$$c_k^{(p)}(s_0 s_0) = y(s_0(\mathbf{t}) * R^s \varphi_k^p(\mathbf{t}) = F^{-1}\{F[y(s_0(\mathbf{t}))]F[R^s \varphi_k^p(\mathbf{t})]\},$$

де F *— пряме, а* F^{-1} *— зворотне перетворення Фур'є,* $k \in N2$.

Перетворення зсуву є група, а тому й о. у. з. Таким чином, схема побудови системи ознак сигналу, інваріантних до зсувів, яку викладено при доведенні теореми, може бути застосована і в цьому випадку. Відзначимо, що в роботі [2] будуються інваріанти окремо для одновимірного та двовимірного випадків. В той же час метод, запропонований у теоремі, є загальний для функцій n змінних.

Наслідок 2. *Нехай* s *— це перетворення масштабу на деякій скінченній дискретній множині* Q, *яка є підмножиною натуральних чисел* N, *тобто* $y(s(\mathbf{t})) = y(s\mathbf{t})$. *Тоді узагальнені спектральні коефіцієнти сигналу* $y(s_0\mathbf{t})$ *обчислюються за формулами*

$$c_k^{(p)}(s, s_0) = y(s_0\mathbf{t}) * R^s \varphi_k^p(\mathbf{t}) = F^{-1}\{F[y(s_0\mathbf{t})][R^s \varphi_k^p(\mathbf{t})]\},$$

де F *— пряме, а* F^{-1} *— зворотне дискретне перетворення Фур'є–Мелліна [4],* $k \in N2$.

Перетворення масштабу на деякій скінченній дискретній множині не утворює групу, але є о. у. з., тому теорему можна застосувати в цьому випадку для побудови системи ознак сигналу, інваріантних до цього перетворення.

Наслідок 3. *Нехай* R^s *— дискретне перетворення оберту на площині, тобто в полярних координатах сигнал* $R^{s_0}y = y(\rho\cos\alpha_0, \rho\sin\alpha_0)$ *обернено на кут* $s_0 = \alpha_0$. *Тоді узагальнені спектральні коефіцієнти сигналу обчислюються за формулами*

$$c_k^p(s, s_0) = y(\rho\cos\alpha_0, \rho\sin\alpha_0) * \varphi_k^p(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha) = F^{-1}\{F[y]F[R^s\varphi_k^p]\},$$

де F *— пряме, а* F^{-1} *— зворотне дискретне перетворення Фур'є–Бесселя [4],* $k \in N2$.

Перетворення оберту на площині є група, а отже, й о. у. з., тому за схемою, описаною у теоремі, відокремлюється множина інваріантних ознак сигналу.

Робота виконана у відповідності з науковою темою Ф25/597–2007 за підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень.

1. *Якубович В. А.* Некоторые общие теоретические принципы построения обучаемых опознающих систем. I // Вычислит. техника и вопросы программирования: Сб. науч. тр. Вып. 4. – Ленинград: Изд-во Ленинград. ун-та, 1965. – С. 3–71.
2. *Тимофеев А. В.* Математическая модель инвариантного восприятия и опознавания по группам преобразований // Кибернетика и вычислит. техника: Сб. науч. тр. – Киев: Наук. думка, 1973. – С. 48–54.
3. *Вайнерман Л. И.* Двойственность алгебр с инволюцией и операторы обобщенного сдвига // Итоги науки и техники. Мат. анализ: Сб. науч. тр. – Москва: ВИНИТИ, 1986. – **24**. – С. 165–205.
4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – Москва: Наука, 1965. – 588 с.
5. *Vainerman L. I.* Signal processing and harmonic analysis of generalized shift operators // Mathematical Theory of Systems, Control, Networks and Signal Processing. Vol. 2. Proceedings of the International Symposium MTNS – **91**. – Tokyo: MITA PRESS, 1992. – P. 557–561.
6. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – Москва: Наука, 1973. – 312 с.
7. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1992. – 352 с.
8. *Никифоров А. Ф., Суслов С. К., Уваров В. Б.* Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – Москва: Наука, 1985. – 216 с.

9. *Vainerman L., Filimonova N.* Hyperspectral imagery with the application of Krawtchouk polynomials // Algorithms for Multispectral and Hyperspectral Imagery / A. Evan Iverson, Editor. – Orlando, FL: SPIE, 1994. – P. 148–155.

Університет "Україна", Київ *Надійшло до редакції 15.07.2008*

S. S. Zabara, N. B. Filimonova, K. Kh. Zelens'kyi

A method of separation of invariant features of signals

A method for the extraction and optimization of a system of invariant informative features of a discrete signal is developed to enable the compression and the subsequent restoration of a signal with any preset accuracy. In so doing, the values of hidden parameters of signal transformations are found.