УДК 519.6

Академік НАН України **З. Т. Назарчук, Я. П. Кулинич**

Кубатурна формула інтерполяційного типу для обчислення деякого класу гіперсингулярних інтегралів

Встановлено деякі властивості двовимірних гіперсингулярних інтегралів. Запропоновано нову кубатурну формулу для обчислення скінченної частини гіперсингулярного інтеграла у крузі. Кубатурна формула використовує гауссові вагові коефіцієнти та значення G-функції Мейєра. Показана її ефективність.

Гіперсингулярні інтегральні рівняння стали ефективним засобом чисельного розв'язання задач математичної фізики. До них належать задачі механіки крихкого руйнування тіл із тріщинами, термопружності, аеродинаміки, дифракції, які різними методами зводять до розв'язання двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь з ядрами, що мають степеневу особливість, порядок якої більший за розмірність області інтегрування [1–4]. При чисельному розв'язанні таких сингулярних рівнянь найбільшого поширення отримали прямі методи, побудовані на застосуванні кубатурних формул для обчислення гіперсингулярних інтегралів виду

$$I_S(x) = \iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|^3} dS_y, \tag{1}$$

де $x = \{x_1, x_2\}$, $y = \{y_1, y_2\}$, $x \in S$.

Інтеграл (1) не існує ні як інтеграл Рімана або Лебега, ні в сенсі головного значення за Коші. Тому його розглядають у сенсі скінченної частини за Адамаром, яка для довільної області S визначається так:

$$I_S(x) = f.p. \iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|^3} dS_y = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^3} dS_y - \frac{2\pi f(x)}{\varepsilon} \right], \tag{2}$$

де $S_\varepsilon = S \setminus s_\varepsilon$, s_s — круг радіуса ε з центром у точці x.

У роботі [4] показано, що границя у правій частині (2) існує для довільної точки $x \notin \partial S$, якщо функція $f(x)$ має перші частинні похідні, що задовольняють умову Гельдера.

У даній роботі встановлено деякі властивості гіперсингулярного інтеграла (1) та на їх основі запропоновано кубатурну формулу інтерполяційного типу у випадку кругової області інтегрування.

Властивості гіперсингулярного інтеграла. Нехай у формулі (1) S — однозв'язна область, контур якої описується кусково-гладкою кривою. При накладанні додаткових умов на щільність $f(x)$ обчислення скінченного за Адамаром значення інтеграла (1) можна звести до знаходження головного за Коші значення деякого інтеграла. Нижченаведена лема встановлює ці умови.

Лема 1. *Якщо функція $f(y)$ та її частинні похідні неперервні у замкненій області S і $x \notin \partial S$, то справедлива рівність*

$$I_S(x) = -v.p. \iint\limits_S \operatorname{grad} f(y) \operatorname{grad}_y \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y + \int\limits_{\partial S} f(y) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dl_y, \qquad (3)$$

де n — одинична зовнішня нормаль у точці y.

Доведення. Використаємо першу формулу Гріна [5] для області S_ε та очевидну рівність

$$\frac{1}{|x-y|^3} = \Delta_x \left(\frac{1}{|x-y|} \right),$$

де Δ_x — двовимірний оператор Лапласа. Тоді

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^3} dS_y - \frac{2\pi f(x)}{\varepsilon} = -\iint\limits_{S_\varepsilon} \operatorname{grad} f(y) \operatorname{grad}_y \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y +$$

$$+ \int\limits_{\partial S} f(y) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dl_y + \int\limits_{\partial s_\varepsilon} f(y) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dl_y - \frac{2\pi f(x)}{\varepsilon}. \qquad (4)$$

Знайдемо граничне значення правої частини рівності (4) за умови $\varepsilon \to 0$. Граничним значенням першого доданка є інтеграл, який розуміємо в сенсі головного значення за Коші. Для оцінки третього інтеграла введемо полярну систему координат з центром в x. Тоді

$$\int\limits_{\partial s_\varepsilon} f(y) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dl_y = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^{2\pi} f(x + \varepsilon e) d\varphi \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \frac{2\pi f(x)}{\varepsilon},$$

де $e = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$.

Звідси отримуємо рівність (3), яка дозволяє звести обчислення скінченної частини гіперсингулярного інтеграла до обчислення сингулярного інтеграла.

У ряді робіт для побудови квадратурних формул використовують властивість одновимірного гіперсингулярного інтеграла, яка полягає в тому, що його скінченна частина за Адамаром дорівнює похідній від головного значення за Коші відповідного сингулярного інтеграла. Ця властивість дозволяє отримати формули чисельного інтегрування шляхом формального диференціювання квадратурної формули для інтеграла типу Коші. Саме цей підхід використано в роботі [1]. Для двовимірного інтеграла (1) має місце така теорема.

Теорема. *Якщо виконуються умови леми 1, то має місце формула*

$$I_S(x) = \Delta_x \iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|} dS_y. \qquad (5)$$

Доведення. Спочатку обчислимо праву частину рівності (5). З цією метою застосуємо формулу для диференціювання слабосингулярного інтеграла [6]:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|} dS_y = \iint\limits_S f(y) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{|x-y|} \right) dS_y - f(x) \int\limits_C \cos\alpha_k dl_y,$$

де C — коло одиничного радіуса з центром у точці x, α_k — кут між додатним напрямком координатної осі Ox_k декартової системи Ox_1x_2 і вектором $x - y$, $k = 1, 2$.

Очевидно, що останній інтеграл дорівнює 0. Враховуючи рівність

$$f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|} - \frac{\partial}{\partial y_k}\left(f(y)\frac{1}{|x-y|}\right),$$

маємо

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|}dS_y = \iint\limits_S \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|}dS_y - \iint\limits_S \frac{\partial}{\partial y_k}\left(f(y)\frac{1}{|x-y|}\right)dS_y. \tag{6}$$

Другий інтеграл справа у формулі (6) перетворимо, використовуючи формулу Остроградського для площини [5]:

$$\iint\limits_S \frac{\partial}{\partial y_k}\left(f(y)\frac{1}{|x-y|}\right)dS_y = \int\limits_{\partial S} \frac{f(y)}{|x-y|}\cos\sigma_k dl_y,$$

де σ_k — кут між додатним напрямом координатної осі Ox_k і одиничною зовнішньою нормаллю у точці y.

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|}dS_y = \iint\limits_S \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{1}{|x-y|}dS_y - \int\limits_{\partial S} \frac{f(y)}{|x-y|}\cos\sigma_k dl_y.$$

Диференціюючи останню рівність за x_k та використовуючи повторно формулу для диференціювання слабосингулярного інтеграла, знаходимо

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|}dS_y = -v.p.\iint\limits_S \frac{\partial f}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_y + \\ + \int\limits_{\partial S} f(y)\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\cos\sigma_k dl_y.$$

Звідси

$$\Delta_x\iint\limits_S \frac{f(y)}{|x-y|}dS_y = -v.p.\iint\limits_S \operatorname{grad} f(y)\operatorname{grad}_y\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_y + \int\limits_{\partial S} f(y)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dl_y. \tag{7}$$

Об'єднуючи рівності (3) і (7), отримуємо співвідношення (5), яке дозволяє звести обчислення скінченної частини гіперсингулярного інтеграла за Адамаром до обчислення відповідного слабосингулярного інтеграла.

Зауваження 1. Нехай відомі деякі додаткові умови відносно поведінки щільності $f(x)$ в околі контура області S. Вид таких умов зазвичай диктується фізичною постановкою задачі. У більшості прикладних досліджень покладають

$$f(y) = [r(y)]^\beta u(y),$$

де r — відстань від точки y до границі області S, функція $u(y)$ та її частинні похідні — неперервні у замкненій області S.

Відомо, що інтеграл $\iint\limits_S r(y)^\beta u(y)dS_y$ за умови $\beta \geqslant 0$ — регулярний, при $-1 < \beta < 0$ — слабосингулярний, а у всіх інших випадках — розбігається. Вираз для похідної $\partial[r(y)^\beta u(y)]/\partial y_k$ містить доданки, пропорційні $[r(y)]^{\beta-1}$. Тому наведені вище доведення леми 1 і теореми залишаються справедливими лише за умови $\beta \geqslant 0$.

Кубатурна формула для гіперсингулярного інтеграла в крузі. Застосуємо отримані результати до побудови кубатурної формули для гіперсингулярного інтеграла

$$I_K(x) = \iint\limits_K \frac{(1-|y|)^\beta u(y)}{|x-y|^3} dS_y, \tag{8}$$

де K — круг одиничного радіуса. Для цього спочатку доведемо таку лему.

Лема 2. *Нехай* $\beta \geqslant 0$ *і*

$$I_{ij}(r,\phi,\theta) = f.p. \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(1-\rho)^\beta R_i^{(1,\beta)}(\rho)\cos[j(\varphi-\theta)]d\rho d\varphi}{(\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)})^3},$$

де $R_i^{(1,\beta)}(\rho) = P_i^{(1,\beta)}(1-2\rho)$, $P_i^{(1,\beta)}(x)$ *— многочлени Якобі. Тоді має місце рівність*

$$I_{ij}(r,\phi,\theta) = J_{ij}(\phi,\theta)\left(-j^2 G_{66}^{33}\left(r^2 \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6 \end{matrix}\right) + 4G_{77}^{34}\left(r^2 \,\middle|\, \begin{matrix} c_1,\dots c_7 \\ d_1,\dots d_7 \end{matrix}\right)\right), \tag{9}$$

де $G_{66}^{33}\left(r^2 \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6 \end{matrix}\right)$ *і* $G_{77}^{34}\left(r^2 \,\middle|\, \begin{matrix} c_1,\dots c_7 \\ d_1,\dots d_7 \end{matrix}\right)$ *— G-функції Мейєра,* $a_1 = (1-j)/2$, $a_2 = -i/2$, $a_3 = (1-i)/2$, $a_4 = (j+1)/2$, $a_5 = (2+i+\beta)/2$, $a_6 = a_5 + 1/2$; $b_1 = 1/2$, $b_2 = 1$, $b_3 = j/2$, $b_4 = 0$, $b_5 = b_1$, $b_6 = -b_3$; $c_1 = -1$, $c_{i+1} = a_i - 1$, $i = \overline{1,6}$; $d_1 = d_4 = -b_1$, $d_2 = d_5 = d_6 = 0$, $d_3 = b_3 - 1$, $d_7 = b_6 - 1$, $J_{ij}(\phi,\theta) = 2^{-\beta}\pi\Gamma(\beta+i+1)\cos j(\phi-\theta)/i!$.

Доведення. Згідно з доведеною вище теоремою справедлива рівність

$$I_{ij}(r,\phi,\theta) = \Delta_{r,\phi}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(1-\rho)^\beta R_i^{(1,\beta)}(\rho)\cos[j(\varphi-\theta)]d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)}}.$$

У роботі [7] показано, що

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho(1-\rho)^\beta R_i^{(1,\beta)}(\rho)\cos[j(\varphi-\theta)]d\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)}} = J_{ij}(\phi,\theta) G_{66}^{33}\left(r^2 \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6 \end{matrix}\right).$$

Застосовуючи відомі формули диференціювання G-функцій Мейєра та враховуючи рекурентні співвідношення для цих функцій [8], після простих перетворень отриманих співвідношень приходимо до формули (9).

Зауваження 2. Властивості функції Мейєра $G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix}\right)$ залежно від значень параметрів (a_p), (b_q) наведені у праці [8]. Беручи їх до уваги, маємо, що $G_{66}^{33}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1,\dots a_6 \\ b_1,\dots b_6 \end{matrix}\right)$

та $G_{77}^{34}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}c_1,\dots c_7\\ d_1,\dots d_7\end{matrix}\right)$ — кусково-аналітичні функції з розривом на колі $|z|=1$. Характер поведінки цих функцій в околі точки $z=1$ визначається значенням параметра β. За умови $\beta\geqslant -1$ функція $G_{66}^{33}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}a_1,\dots a_6\\ b_1,\dots b_6\end{matrix}\right)$ у цій точці неперервна. Якщо $\beta>1$, то функція $G_{77}^{34}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}c_1,\dots c_7\\ d_1,\dots d_7\end{matrix}\right)$ також неперервна в цій точці, при $\beta=1$ вона може мати логарифмічну особливість, а при $\beta<1$ допускає степеневу особливість порядку $\beta-1$.

Для побудови кубатурної формули перейдемо в (8) до полярної системи координат: $y=\{\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\}$, $x=\{r\cos\phi,r\sin\phi\}$. Тоді

$$I_K(x)=f.p.\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(1-\rho)^\beta u^*(\rho,\varphi)d\rho d\varphi}{(\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)})^3},\tag{10}$$

де $u^*(\rho,\varphi)=u(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$, $u^*(\rho,\varphi)=u^*(\rho,\varphi+2\pi)$.

Побудуємо наближений вираз для функції $u^*(\rho,\varphi)$ шляхом її інтерполювання за змінними φ і ρ. Оскільки функція $u^*(\rho,\varphi)$ є періодичною за змінною φ, то будемо її інтерполювати в m вузлах $\tau_l=2\pi l/m$, $j=\overline{0,m-1}$ тригонометричним поліномом порядку $p=[m/2]$ ([ ] тут означає цілу частину числа) [1]:

$$L(u^*;\varphi)=\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{p}B_j^m u^*(\rho,\tau_l)\cos[j(\varphi-\tau_l)],\tag{11}$$

де $B_0^m=1/m$, $B_p^m=(3-(-1)^m)/(2m)$, $B_j^m=2/m$ для $j=\overline{1,p-1}$.

Враховуючи наявність у підінтегральному виразі множника $\rho(1-\rho)^\beta$, функцію $u^*(\rho,\varphi)$ інтерполюємо за змінною ρ поліномом, побудованим на системі вузлів $\{\rho_k\}_{k=1}^n$, які є коренями многочлена $R_n^{(1,\beta)}(\rho)$ [1]:

$$L(u^*;\rho)=\frac{2n+\beta+3}{(n+\beta+1)(n+\beta+2)}\sum_{k=1}^{n}C_k^n u^*(\rho_k,\varphi)\sum_{i=0}^{n-1}h_iR_i^{(1,\beta)}(\rho_k)R_i^{(1,\beta)}(\rho),\tag{12}$$

де $C_n^k=1/(R_{n+1}^{(1,\beta)}(\rho_k)R_n^{(1,\beta)\prime}(\rho_k))$, $h_i=(i+\beta+1)(2i+\beta+2)/(i+1)$.

Об'єднуючи (11) і (12), знаходимо шуканий наближений вираз для функції $u^*(\rho,\varphi)$:

$$L(u^*;\varphi,\rho)=\frac{2n+\beta+3}{(n+\beta+1)(n+\beta+2)}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{m-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{p}D_{kij}^{mn}u^*(\rho_k,\tau_l)R_i^{(1,\beta)}(\rho)\cos[j(\varphi-\tau_l)],\tag{13}$$

де $D_{kij}^{mn}=C_k^nB_j^mh_iR_i^{(1,\beta)}(\rho_k)$. Підставляючи у формулі (10) замість функції $u^*(\rho,\varphi)$ її наближення, отримуємо

$$I_K(r,\phi)\approx f.p.\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho(1-\rho)^\beta L(u^*;\varphi,\rho)d\rho d\varphi}{(\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\varphi-\phi)})^3}.$$

Беручи до уваги формулу (13) та лему 2, останню наближену рівність подамо у вигляді

$$I_K(r,\phi) \approx \frac{2^{-\beta}(2n+\beta+3)\pi}{(n+\beta+1)(n+\beta+2)} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n} E_{lk}^{mn}(r,\phi) f^*(\rho_k,\tau_l), \tag{14}$$

де

$$E_{lk}^{mn}(r,\phi) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{p} \frac{\Gamma(\beta+i+1)}{i!} D_{kij}^{mn} \times$$
$$\times \left[-j^2 G_{66}^{33} \left(r^2 \left| \begin{array}{c} a_1, \ldots a_6 \\ b_1, \ldots b_6 \end{array} \right. \right) + 4 G_{77}^{34} \left(r^2 \left| \begin{array}{c} c_1, \ldots c_7 \\ d_1, \ldots d_7 \end{array} \right. \right) \right] \cos j(\phi - \tau_l).$$

Співвідношення (14) є шуканою кубатурною формулою для гіперсингулярного інтеграла (8) у сенсі Адамара.

Числова апробація кубатурної формули. Застосуємо викладений алгоритм наближеного знаходження скінченної частини гіперсингулярного інтеграла (8) до обчислення виразу

$$G(x) = f.p. \iint_K (1-|y|^2)^\beta \frac{\exp(\gamma y_1)}{|x-y|^3} dS_y, \tag{15}$$

де γ — деяка стала, та оцінимо похибку таких обчислень.

Спочатку зведемо (15) до обчислення одновимірного регулярного інтеграла. Використовуючи доведену вище теорему, маємо

$$G(x) = \Delta_x \iint_K (1-|y|^2)^\beta \frac{\exp(\gamma y_1)}{|x-y|} dS_y.$$

Скориставшись результатами роботи [7], отримаємо

$$\iint_K (1-|y|^2)^\beta \frac{\exp(\gamma y_1)}{|x-y|} dS_y =$$
$$= c_\beta \int_0^\pi \exp[-\gamma r \sin\varphi \sin(\phi-\varphi)] a^{(2\beta+1)/4}(\varphi) \cos^{-\beta-1/2}(\varphi) I_{\beta+1/2}[b(\varphi)] d\varphi, \tag{16}$$

де $\{r,\phi\}$ — полярні координати точки x, $I_{\beta+1/2}(x)$ — модифікована функція Бесселя, $a(\varphi) = \sqrt{1-r^2\sin^2(\phi-\varphi)}$, $b(\varphi) = \gamma\cos(\varphi)a(\varphi)$, $c_\beta = \sqrt{\pi}(2/\gamma)^{\beta+1/2}\Gamma(\beta+1)$.

Підставляючи рівність (16) у формулу для $G(x)$, після диференціювання і необхідних перетворень отримуємо

$$G(r,\phi) = \frac{c_\beta}{2} \int_0^\pi \exp[-\gamma r \sin\varphi \sin(\varphi-\phi)] \cos^{-\beta-1/2}(\varphi) a^{\beta-7/2}(\varphi) \times$$
$$\times \left\{ c(\varphi) I_{\beta+1/2}[b(\varphi)] + d(\varphi) I_{\beta+3/2}[b(\varphi)] \right\} d\varphi, \tag{17}$$

де

$$c(\varphi) = -2 - 4\beta - r^2\{-4\beta(1+2\beta) + \gamma^2 - \gamma^2[1 + 2a^2(\varphi)]\cos 2\varphi\}\sin^2(\phi-\varphi) + \\ + 4r\gamma(1+2\beta)a^2(\varphi)\sin\varphi\sin(\phi-\varphi) + 2\gamma^2\sin^2\varphi,$$

$$d(\varphi) = 2[-1 + r^2\beta - r^2\beta\cos 2(\phi-\varphi) + 2r\gamma a^2(\varphi)\sin\varphi\sin(\phi-\varphi)]b(\varphi).$$

При використанні відомих квадратурних формул для регулярних інтегралів співвідношення (17) дозволяє знайти функцію $G(x)$ з довільною заданою точністю. Такі значення будемо розглядати як тестові при оцінці ефективності запропонованого алгоритму. У табл. 1 їх наведено для певних значень аргументів ϕ і r та параметрів $\gamma = 1$, $\beta = 1/2$.

У табл. 2 наведено оцінки похибки δ обчислення значення виразу (15) за кубатурною формулою (14) залежно від кількості m і n вузлів інтерполювання за змінними φ і ρ відповідно. Для обчислення значень G-функції Мейєра використовували процедуру, яка міститься у пакеті символьних обчислень Mathematica.

Видно, що у випадку круга запропонована кубатурна формула (14) за відносно малої кількості вузлів забезпечує достатньо високу точність обчислення інтеграла (8) у сенсі Адамара. Це дає підстави для її застосовування при чисельному розв'язанні відповідних інтегральних рівнянь у зв'язку з малою розмірністю алгебраїчної системи, що при цьому утворюється.

Таким чином, встановлено зв'язок між гіперсингулярним інтегралом (1) у сенсі Адамара та відповідними сингулярним і слабосингулярним інтегралами. Запропоновано нову кубатурну формулу для обчислення скінченної частини гіперсингулярного інтеграла в крузі. Для її побудови використано інтерполювання підінтегральної функції за азимутальною та радіальною координатами. З використанням встановлених властивостей гіперсингулярних інтегралів кубатурну формулу записано у вигляді суми добутків G-функції Мейєра та тригонометричних функцій. Перевага отриманої кубатурної формули перед відомими полягає

Таблиця 1

r	$\phi = \frac{\pi}{17}$	$\phi = \frac{8\pi}{17}$	$\phi = \frac{16\pi}{17}$
0,1	−10,078985878028	−8,7546054154018	−7,3441721129380
0,5	−18,408336571620	−9,520456847183	−3,736633744434
0,9	−32,587962465746	−10,646959822134	−1,744745593547

Таблиця 2

r	n	$\phi = \frac{\pi}{17}$		$\phi = \frac{8\pi}{17}$		$\phi = \frac{16\pi}{17}$	
		m	δ	m	δ	m	δ
0,1	5	7	10^{-2}	8	10^{-3}	8	10^{-2}
	10	11	10^{-7}	11	10^{-7}	13	10^{-6}
	15	15	10^{-11}	15	10^{-11}	16	10^{-10}
0,5	5	8	10^{-3}	8	10^{-4}	10	10^{-3}
	10	16	10^{-8}	16	10^{-7}	16	10^{-7}
	15	20	10^{-12}	20	10^{-12}	20	10^{-11}
0,9	5	10	10^{-2}	11	10^{-3}	12	10^{-3}
	10	20	10^{-8}	20	10^{-8}	20	10^{-8}
	15	20	10^{-9}	20	10^{-9}	20	10^{-9}

в її простоті та мінімальності інформації відносно щільності інтеграла, необхідної для її застосування. Останнє особливо істотне для чисельного розв'язання відповідних гіперсингулярних інтегральних рівнянь.

1. *Назарчук З. Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
2. *Хай М. В.* Двухмерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
3. *Гузь А. Н., Зозуля В. В.* Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – Киев: Наук. думка, 1993. – 237 с.
4. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – Москва: ТОО «Янус», 1955. – 520 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – Москва: Наука, 1970. – Т. 3. – 784 с.
6. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – Москва: Физматгиз, 1962. – 256 с.
7. *Назарчук З. Т., Кулинич Я. П.* Кубатурні формули для обчислення деякого класу сингулярних інтегралів // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 31–35.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. – Москва: Физматлит, 2003. – 688 с.

Фізико–механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Надійшло до редакції 04.08.2008

Academician of the NAS of Ukraine **Z. T. Nazarchuk, Ya. P. Kulynych**

The interpolation cubature formula for the calculation of some class of hypersingular integrals

Some properties of two-dimensional hypersingular integrals are investigated. The new cubature formula for the calculation of the finite part of a hypersingular integral in a circle is proposed. The cubature formula includes Gaussian weights and Meijer's G-function. The effectiveness of such an approach is shown.