ISSN 1028-7507 Акустичний вісник. 2011. Том 14, N 2. С. 38 – 52

УДК 532.595

ПОВНА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ АСИМПТОТИЧНА НЕЛІНІЙНА МОДАЛЬНА СИСТЕМА, ЩО ОПИСУЄ КОЛИВАННЯ РІДИНИ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ КРУГОВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ БАЦІ

І. О. ЛУКОВСЬКИЙ, Д. В. ОВЧИННИКОВ, О. М. ТИМОХА

Інститут математики НАН України, Київ

Отримано 26.05.2011

З використанням варіаційного модального методу Луковського й асимптотики Моісеєва побудовано нелінійну асимптотичну модальну систему, яка описує резонансні коливання рідини в вертикальному циліндричному баці кругового перерізу при його горизонтальних поступальних збуреннях з частотами, близькими до першої власної частоти коливань рідини. Вона зв'язує дві домінантні узагальнені координати, які відповідають двом першим власним формам (вони характеризуються однаковою власною частотою), а також нескінченний набір узагальнених координат другого та третього порядків. Ця модальна система є узагальненням існуючих нелінійних модальних систем, що базуються на асимптотиці Моісеєва, у тому числі класичної п'ятимодової модальної системи Луковського, оскільки попередні системи нехтували вкладом вищих власних форм другого та третього порядків. Для модельної задачі про усталені резонансні режими руху рідини зі скінченною глибиною продемонстровано вплив вищих власних форм на амплітудно-частотні характеристики й показано, що їх урахування якісно не змінює діапазони існування й точки біфуркації "плоского" та "кругового" хвильових режимів у порівнянні з результатами про усталені режими за п'ятимодовою системою Луковського. У той же час, у частотному діапазоні, де не існує стійких усталених режимів і очікуються хаотичні рухи рідини, можуть виникати вторинні (внутрішні) резонанси. Їхнє існування говорить про необхідність ревізії асимптотики Моісеєва.

С использованием вариационного модального метода Луковского и асимптотики Моисеева построена нелинейная асимптотическая модальная система, описывающая резонансные колебания жидкости в вертикальном цилиндрическом баке кругового сечения при его горизонтальных возмущениях с частотами, близкими к первой собственной частоте колебания жидкости. Она связывает две доминантные обобщенные координаты, отвечающие первым двум собственным формам (они характеризуются одинаковой собственной частотой), а также бесконечный набор обобщенных координат второго и третьего порядков. Эта модальная система является обобщением существующих нелинейных модальных систем, базирующихся на асимптотике Моисеева, в том числе классической пятимодовой модальной системы Луковского, поскольку все предыдущие системы пренебрегали вкладом высших собственных форм второго и третьего порядков. Для модельной задачи об установившихся резонансных режимах движения жидкости с конечной глубиной продемонстрировано влияние высших собственных форм на амплитудно-частотные характеристики и показано, что их учет не изменяет диапазонов существования и точек бифуркации "плоского" и "кругового" волнового режимов по сравнению с результатами пятимодовой системы Луковского. В то же время, в частотном диапазоне, где не существует устойчивых установившихся режимов и ожидаются хаотические движения жидкости, могут возникать вторичные (внутренние) резонансы. Их существование говорит о необходимости ревизии асимптотики Моисеева.

A nonlinear asymptotic modal system describing the resonant sloshing in a vertical circular cylindrical tank due to horizontal excitation with forcing frequencies close to the lowest natural sloshing frequency is derived using the variational modal method by Lukovsky and the Moiseev asymptotics. It couples the two dominant generalized coordinates responsible for two lowest natural modes (characterized by the same natural frequency), as well as infinite number of generalized coordinates of the second and third orders. The derived modal system is a generalization of existing nonlinear modal systems based on the Moiseev asymptotics including the classical five-mode Lukovsky system, since the above systems neglected the contribution of the higher natural modes of the second and third orders. For the model problem on the steady-state resonant sloshing regimes with a finite liquid depth, we demonstrate the effect of the higher natural modes on the response curves and show that consideration of these modes does not qualitatively change the frequency ranges and bifurcation points of the "planar" and "swirling" wave regimes, in comparison with the results by the five-mode Lukovsky system. Nevertheless, in frequency ranges where the steady-state regimes are unstable and one can expect for chaotic liquid motions, the secondary (internal) resonances may occur. Their existence indicates the necessity of revision of the Moiseev asymptotics.

ВСТУП

Вертикальні циліндричні баки кругового перерізу, які утримують багатотонні маси рідини, зустрічаються при конструюванні ракет і різного типу резервуарів для нафти, скрапленого газу, чи питної води. Типові приклади баків-резервуарів показані на рис. 1, з якого видно, що вони є частиною конструктивних систем, складених з твердих та пружних компонентів. Для інженерних розрахунків таких конструкцій треба мати ефективні та прості математичні моделі, які описують їхню динаміку під дією різного типу зовнішніх збурень, зокрема, вітрових навантажень та землетрусів. Побудова таких математичних моделей досить складна, оскільки у даному випадку мова йде про другу задачу динаміки для поліагрегатних ("гібридних") механічних систем, компоненти яких

Рис. 1. Приклади вертикальних циліндричних баків-резервуарів для збереження великих об'ємів рідини

описуються зв'язаними диференціальними рівняннями й крайовими задачами принципово різної математичної природи. Застосування традиційних чисельних підходів недоцільне з практичної точки зору, оскільки кожна компонента конструкції потребує своєї власної специфічної обчислювальної схеми (зокрема, для коливань рідини в баці див. [1, розд. 10] та огляд [2]). Як наслідок, для нелінійних резонансних рухів обчислення зв'язаних коливань подібних систем призводить до великорозмірних нелінійних систем дискретних рівнянь, чисельне розв'язування яких потребує значних комп'ютерних ресурсів. Останній факт критичний для задач параметричного дослідження усталених рухів конструкції, коли виникає потреба опису залежності усталених розв'язків від значної кількості вхідних геометричних і фізичних параметрів, а також різноманітних типів зовнішніх збурень та сценаріїв (початкових умов).

Альтернативу стандартним чисельним схемам можуть скласти нелінійні модальні методи, які дозволяють записати динамічні рівняння кожної компоненти, а значить, і всієї гібридної механічної системи (конструкції) у вигляді малорозмірної системи звичайних диференціальних рівнянь відносно спеціальним чином вибраних узагальнених координат, які описують збурення власних форм коливань кожної конструкції. Завдячуючи теоретичним працям Нариманова [3, 4], Моісеєва [5], Луковського [3, 6 – 8], Майлса [9], Фалтінсена й Тимохи [1, 8], а також багатьох інших, нелінійний модальний метод було розвинуто для задач про коливання рідини у рухомих баках. Відповідні модальні системи можна відносно легко вмонтувати у загальні рівняння динаміки конструкції за рахунок модальних формул Луковського для результуючих гідродинамічних сил і моментів [1, 7, 10, 11].

Основні дослідження нелінійних рухів рідини в баках проведені для випадку резонансних гармонічних збурень першої власної частоти коливань рідини. Це пов'язано з тим, що саме такі збурення породжують максимальні гідродинамічні навантаження на стінки бака, а отже визначають сумісну динаміку бака й зовнішніх компонентів конструкції. За припущень скінченної глибини рідини, Моісеєвим [5] було побудовано асимптотичний усталений (періодичний) розв'язок для такої задачі, який показує, що резонансно збурені перші власні форми мають амплітуду порядку $O(\epsilon^{1/3})$, де ϵ – безрозмірна амплітуда зовнішнього гармонічного збурення. Також, у залежності від геометрії бака, існує деяка кількість власних форм з амплітудами $O(\epsilon^{2/3})$ і $O(\epsilon)$. Такого типу асимптотику третього порядку були постульовані Нарімановим [3], який запропонував асимптотичний метод побудови нелінійних модальних систем, що описують резонансний рух рідини в баках. Виходячи з відповідної крайової задачі чи варіаційних принципів механіки [4, 12 – 15] та нехтуючи членами $o(\epsilon)$, асимптотичні модальні методи типу Нариманова дозволяють побудувати відносно малорозмірні (компактні) асимптотичні нелінійні модальні системи. У той же час, процедура виводу модальних систем за методом Наріманова жорстко обмежена припущеннями щодо порядків малості й кількості власних форм, які треба включити у нелінійну асимптотичну модальну систему.

Варіаційні модальні методи, взагалі кажучи, не потребують припущень про порядки малості узагальнених координат (власних форм), а також не мають обмежень на кількість узагальнених координат. У результаті їх застосування отримують нескінченнновимірну нелінійну (варіаційну) модальну систему [6, 7, 9, 11]. Найбільш повна система такого типу для довільного бака, виведена І. О. Луковським [7], є повним аналогом вихідної нелінійної крайової задачі. Для баків прямокутного перерізу такі системи отримано у працях [16, 17]. Пряме чисельне інтегрування варіаційних модальних систем теоретично еквівалентне до застосування так званого методу Перко [18, 19]. Оскільки ці системи є жорсткими системами звичайних дифе-

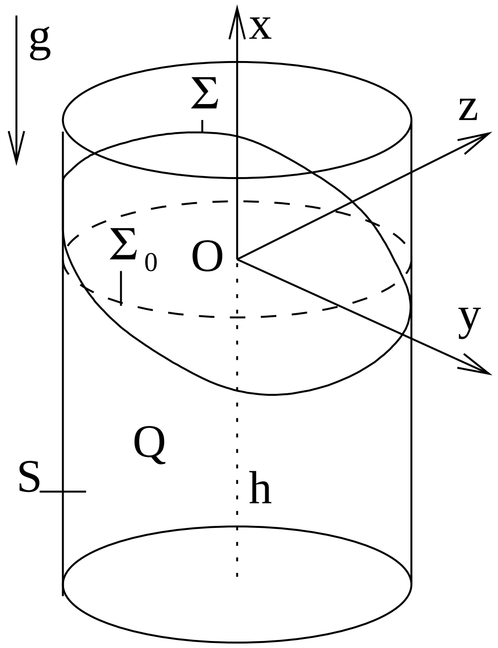

Рис. 2. Геометрія задачі про вимушений рух рідини у круговому циліндричному резервуарі

ренціальних рівнянь, їхнє чисельне інтегрування може бути нестійким для строго нелінійних резонансних режимів [20, 21] за рахунок ампліфікації вищих гармонік та форм, які в реальності сильно демпфуються. Аби уникнути цього, спочатку Мікішев і Рабінович, а потім Ла Рокка та ін. [16] вводили додаткові члени, що відповідають лінійному демпфуванню. Але навіть з такими додатковими членами варіаційні модальні системи не змогли описати строго нелінійні коливання рідини, бо, скоріш за все, вищі форми та гармоніки демпфуються за нелінійним законом [22].

На противагу варіаційним модальним системам, асимптотичні модальні системи враховують той факт, що вищі гармоніки для недомінантних власних форм мають вищий асимптотичний порядок. Вони не є жорсткими і легко інтегруються чисельно за допомогою, наприклад, методу Рунге – Кутта. Ці переваги зробили популярним комбіновані асимптотично-варіаційні методи, які використовують асимптотичні співвідношення (наприклад, співвідношення третього порядку Моісеєва, співвідношення п'ятого порядку Моісеєва – Вотерхоуса [23], або адаптивні модальні співвідношення [20]) для редукції нелінійної варіаційної модальної системи Луковського до більш простого компактного вигляду, нехтуючи членами порядку $o(\epsilon)$.

Для вертикальних циліндричних баків квадратного перерізу [17, 24] варіаційна система, редукована за асимптотикою третього порядку Моісеєва, зв'язує дві домінантні власні форми, три власні форми другого порядку й чотири форми третього порядку. В той же час, асимптотика Моісеєва для кругового перерізу призводить до необхідності враховувати, окрім двох домінантних форм, також нескінченний набір узагальнених координат другого й третього порядків малості. На жаль, наукові літературні джерела не містять асимптотичних модальних систем, які б враховували повний набір узагальнених координат другого й третього порядків малості для циліндричного бака кругового перерізу. Класичною стала п'ятимодова асимптотична нелінійна модальна система Луковського [7], яка враховує лише три власні форми другого порядку. Узагальнення цієї системи, які вибірково враховують деякі інші власні форми другого й третього порядків малості, чи використовують асимптотику Моісеєва – Вотерхоуса п'ятого порядку малості, даються у працях [25 – 29].

У даному дослідженні вперше побудовано таку давно очікувану нелінійну асимптотичну модальну систему для баку кругового перерізу, яка базується на асимптотиці Моісеєва і зв'язує, окрім двох домінантних форм, усі теоретично необхідні власні форми другого й третього порядків (нескінченний набір). Така система – повна, її неможливо узагальнити (покращити) у рамках асимптотики Моісеєва третього порядку. Велика перевага перед чисельно-орієнтованими алгоритмами виводу модальних систем [14, 30] полягає у тому, що вдається визначити всі нульові коефіцієнти такої модальної системи, а також отримати прості аналітичні вирази для ненульових гідродинамічних коефіцієнтів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо рух ідеальної нестисливої рідини у вертикальному циліндричному баці кругового перерізу, який здійснює поступальні рухи зі швидкістю $\vec{v}_0(t)$. Поле швидкостей абсолютного руху рідини описується в рухомій неінерційній системі координат $Oxyz$, яка зв'язана з центром незбуреної вільної поверхні Σ_0 (рис. 2).

1.1. Крайова задача

Відповідна нелінійна крайова задача формулюється для області $Q(t)$ з вільною межею $\Sigma(t)$ у такому вигляді:

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = 0, \qquad \vec{r}\in Q,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0\,\vec{\nu} - \frac{\xi_t}{\sqrt{|\nabla\xi|^2}}, \qquad \vec{r}\in\Sigma,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = \vec{v}_0\,\vec{\nu}, \qquad \vec{r}\in S,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \nabla\Phi\,\vec{v}_0 + U = 0, \quad \vec{r}\in\Sigma.\end{gathered} \tag{1}$$

Тут $\Phi(x,y,z,t)$ – потенціал швидкостей абсолютного руху рідини у зв'язаній системі координат Oxy; $\vec{\nu}$ – орт зовнішньої нормалі до поверхні області $Q(t)$; U – потенціал сил тяжіння, $\vec{r}$ – радіус-вектор точок області $Q(t)$; $S(t)$ і $\Sigma(t)$ – змочена тверда стінка резервуару і збурена вільна поверхня рідини відповідно; $\xi(x,y,z,t)=0$ – рівняння збуреної вільної поверхні рідини.

Крайова задача (1) пов'язує потенціал швидкостей $\Phi(x,y,z,t)$, вектор-функцію $\vec{v}_0=(v_{01},v_{02},v_{03})$ і невідому функцію $\xi(x,y,z,t)$. Для визначення перехідних процесів до задачі треба додати початкові умови, які задають початкову геометрію вільної межі $\Sigma(0)$ й початкове поле швидкостей $\Phi(x,y,z,0)$. Якщо бак рухається за гармонічним законом, можна поставити задачу про усталені (періодичні) рухи. Тоді до співвідношень (1) треба додати умови періодичності для $\Sigma(t)$ і $\Phi(x,y,z,t)$.

1.2. Варіаційна модальна система

У відповідності до варіаційного модального методу вільна поверхня подається у вигляді

$$x = f(y,z,t) = \sum_i \beta_i(t) f_i(y,z), \tag{2}$$

де $f_i(y,z)$ – задана на незбуреній вільній поверхні Σ_0 повна ортогональна разом з константою система функцій. Окрім того, для потенціалу швидкостей використовується представлення

$$\Phi(x,y,z,t) = \vec{v}_0\,\vec{V} + \sum_n R_n(t)\varphi_n(x,y,z), \tag{3}$$

де $\varphi_n(x,y,z)$ – повна система гармонічних функцій. Залежні від часу узагальнені координати $\beta_i(t)$ і $R_n(t)$ підлягають визначенню.

Сукупність гармонічних функцій φ_i та $f_i(y,z)=\varkappa_i\varphi_i(0,y,z)$ типово асоціюється з задачею про власні коливання рідини

$$\Delta\varphi\big|_{Q_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\Sigma_0} = \varkappa\varphi, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|_{S_0} = 0, \tag{4}$$

де Q_0 – незбурений об'єм рідини; Σ_0 – незбурена вільна поверхня рідини; S_0 – незбурена змочена поверхня баку. Параметр $\sigma^2=g\varkappa$ задає власні частоти. Розв'язки такої спектральної задачі утворюють на Σ_0 повну ортогональну разом з константою систему функцій $f_i(y,z)$.

Використовуючи варіаційний метод Майлса – Луковського [1, 7], показано, що узагальнені координати β_i та R_n будуть розв'язками нескінченновимірної нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь (варіаційна модальна система Луковського):

$$\sum_k \frac{\partial A_i}{\partial\beta_k}\dot{\beta}_k - \sum_k A_{ik}R_k = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\sum_n \frac{\partial A_n}{\partial\beta_i}\dot{R}_n + \frac{1}{2}\sum_n\sum_k \frac{\partial A_{nk}}{\partial\beta_i}R_nR_k +\\ +\sum_{j=1}^{3}(\dot{v}_{0j} - g_j)\frac{\partial\vec{l}}{\partial\beta_i} = 0\end{gathered} \tag{6}$$

$(i = 1,2,\ldots)$. Тут v_{0j} і g_j – проекції векторів $\vec{v}_0$ та $\vec{g}$ на координатні вісі зв'язаної з тілом системи координат. Коефіцієнти

$$A_n = \rho\int\limits_{Q(t)} \varphi_n\,dQ; \tag{7}$$

$$\begin{gathered}A_{nk} = A_{kn} = \rho\int\limits_{Q(t)}(\nabla\varphi_n,\nabla\varphi_k)\,dQ =\\ = \rho\int\limits_{S(t)+\Sigma(t)}\varphi_n\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS;\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}l_1 = \rho\int\limits_{Q(t)} x\,dQ, \qquad l_2 = \rho\int\limits_{Q(t)} y\,dQ,\\ l_3 = \rho\int\limits_{Q(t)} z\,dQ\end{gathered} \tag{9}$$

є функціями узагальнених координат $\beta_i(t)$ внаслідок того, що вільна поверхня $\Sigma(t)$ області $Q(t)$ задається представленням (2).

2. Асимптотична нелінійна модальна система

Надалі вважатимемо, що всі геометричні розміри віднесено до радіуса циліндричного бака R. Це передбачає, що його глибина h – безрозмірна величина, а прискорення вільного падіння нормоване до R.

Для цилiндричного бака кругового перерiзу спектральна крайова задача (4) має аналiтичний розв'язок у цилiндричнiй системi координат $Ox\xi\eta$:

$$\varphi_{m,n,1}(x,\xi,\eta)=\psi_{m,n}(x,\xi)\cos m\eta,$$

$$\varphi_{m,n,2}(x,\xi,\eta)=\psi_{m,n}(x,\xi)\sin m\eta,$$

де

$$\psi_{m,n}(x,\xi)=\frac{\mathrm{ch}\,(\zeta_{m,n}(x+h))}{\mathrm{ch}\,(\zeta_{m,n}h)}f_{m,n}(\xi);\qquad(10)$$

$$f_{m,n}(\xi)=\frac{J_m(\zeta_{m,n}\xi)}{J_m(\zeta_{m,n})};\qquad(11)$$

$\zeta_{m,n}$ – коренi рiвнянь $J'_m(\zeta)=0$ (тут $J_m(\,)$ – функцiї Бесселя першого роду). Квадрат власної частоти коливань рiдини обчислюється за формулою

$$\sigma^2_{m,n}=g\zeta_{m,n}\mathrm{th}\,(\zeta_{m,n}h).\qquad(12)$$

Наявнiсть такого аналiтичного розв'язку дозволяє переписати модальнi представлення (2) й (3) у явному виглядi

$$x=f(\xi,\eta,t)=\sum_{m,n}(r_{m,n}(t)\sin(m\eta)+ \\ +p_{m,n}(t)\cos(m\eta))f_{m,n}(\xi),\qquad(13)$$

$$\Phi=\vec{v}_0\,\vec{V}+\textstyle\sum_{m,n}[R_{m,n}(t)\sin(m\eta)+ \\ +P_{m,n}(t)\cos(m\eta)]\psi_{m,n}(x,\xi).\qquad(14)$$

2.1. Асимптотика Моiсеєва

Для узагальнених координат $r_{m,n}$, $p_{m,n}$, $R_{m,n}$ i $P_{m,n}$ можна формально ввести порядки малостi вiдносно малого параметра ϵ, який позначає безрозмiрну амплiтуду коливань бака, вiднесену до його радiуса. Аналiзуючи можливi полiномiальнi вирази вiдносно власних мод $f_{m,n}(r)\cos(m\eta)$ i $f_{m,n}(r)\cos(m\eta)$, а також їхнiх похiдних i використовуючи тригонометричну алгебру вiдносно кутової координати, можна показати, що якщо в рамках асимптотики Моiсеєва є двi домiнантнi узагальненi координати для перших власних мод:

$$p_{1,1}\sim r_{1,1}\sim P_{1,1}\sim R_{1,1}=O(\epsilon^{1/3}),\qquad(15)$$

то наступнi узагальненi координати мають формально другий порядок малостi:

$$p_{0,n}\sim P_{0,n}\sim p_{2,n}\sim P_{2,n}\sim \\ \sim r_{2,n}\sim R_{2,n}=O(\epsilon^{2/3}),\quad n=1,2,\ldots,\qquad(16)$$

а узагальненi координати

$$p_{3,n}\sim r_{3,n}\sim P_{3,n}\sim R_{3,n}=O(\epsilon),\quad n=1,2,\ldots; \\ p_{1,k}\sim r_{1,k}\sim P_{1,k}\sim R_{1,k}=O(\epsilon),\quad k=2,3,\ldots\qquad(17)$$

мають третiй порядок малостi. Iншi узагальненi координати мають порядок $p_{k,n}\sim r_{k,n}=o(\epsilon)$, $n\geq 1$, $k\neq 1,2,3$ i ними можна знехтувати в рамках теорiї третього порядку малостi. Це скорочує суми у модальних представленнях (13) i (14), зокрема,

$$x=f(\xi,\eta,t)=\sum_{m=0}^{3}\sum_{n=1}^{\infty}\big(r_{m,n}(t)\sin(m\eta)+ \\ +p_{m,n}(t)\cos(m\eta)\big)f_{m,n}(\xi).\qquad(18)$$

2.2. Виведення асимптотичної модальної системи

Для виведення асимптотичних модальних рiвнянь, якi виходять з варiацiйної системи Луковського (5) – (6) й асимптотичних спiввiдношень (15) – (17), треба виконати наступнi кроки:

1. Пiдставити модальний розв'язок (18) в iнтегральнi представлення для $\partial A_n/\partial\beta_i$ й $A_{n,k}$ (формули (7) i (8)) й розкласти їх в асимптотичнi ряди, враховуючи члени до порядку $O(\epsilon^{2/3})$;

2. Розв'язати систему рiвнянь (5) вiдносно узагальнених координат R_n, зберiгаючи лише члени до порядку $O(\epsilon)$;

3. Пiдставити асимптотичнi вирази для $\partial A_n/\partial\beta_i$, $A_{n,k}$ й R_n у рiвняння (6) й вiдкинути члени порядку $o(\epsilon)$.

Реалiзацiя аналiтичних перетворень, породжених цим алгоритмом, стала практично можливою завдяки засобам комп'ютерної алгебри. У результатi вдалося отримати систему звичайних диференцiальних рiвнянь другого порядку вiдносно узагальнених координат, яка мiстить усi узагальненi координати до $O(\epsilon)$ включно, а також аналiтичнi формули для знаходження гiдродинамiчних коефiцiєнтiв. Рiвняння вiдносно домiнантних узагальнених координат мають вигляд

$$
\begin{gathered}
\mu_{1,1}[\ddot{p}_{1,1}+\sigma_{1,1}^2 p_{1,1}]+p_{1,1}\sum_{n=1}^{N_2} d_{0,n}^{(2)}\ddot{p}_{0,n}+\\
+\sum_{n=1}^{N_2} d_{0,n}^{(3)}(\ddot{p}_{1,1}p_{0,n}+\dot{p}_{1,1}\dot{p}_{0,n})+\\
+d_1(p_{1,1}^2\ddot{p}_{1,1}+p_{1,1}\dot{p}_{1,1}^2+\\
+r_{1,1}p_{1,1}\ddot{r}_{1,1}+p_{1,1}\dot{r}_{1,1}^2)+\\
+d_2(r_{1,1}^2\ddot{p}_{1,1}+2r_{1,1}\dot{r}_{1,1}\dot{p}_{1,1}-\\
-r_{1,1}p_{1,1}\ddot{r}_{1,1}-2p_{1,1}\dot{r}_{1,1}^2)+\\
+\sum_{n=1}^{N_2} d_{2,n}^{(2)}(p_{1,1}\ddot{p}_{2,n}+r_{1,1}\ddot{r}_{2,n})+\\
+\sum_{n=1}^{N_2} d_{2,n}^{(3)}(\ddot{p}_{1,1}p_{2,n}+\ddot{r}_{1,1}r_{2,n}+\\
+\dot{p}_{1,1}\dot{p}_{2,n}+\dot{r}_{1,1}\dot{r}_{2,n})=-\frac{\mu_{1,1}\varkappa_{1,1}}{\zeta_{1,1}^2-1}\dot{v}_{02},\\
\mu_{1,1}[\ddot{r}_{1,1}+\sigma_{1,1}^2 r_{1,1}]+r_{1,1}\sum_{n=1}^{N_2} d_{0,n}^{(2)}\ddot{p}_{0,n}+\\
+\sum_{n=1}^{N_2} d_{0,n}^{(3)}(\ddot{r}_{1,1}p_{0,n}+\dot{r}_{1,1}\dot{p}_{0,n})+\\
+d_1(r_{1,1}^2\ddot{r}_{1,1}+r_{1,1}\dot{r}_{1,1}^2+\\
+r_{1,1}p_{1,1}\ddot{p}_{1,1}+r_{1,1}\dot{p}_{1,1}^2)+\\
+d_2(p_{1,1}^2\ddot{r}_{1,1}+2p_{1,1}\dot{r}_{1,1}\dot{p}_{1,1}-\\
-r_{1,1}p_{1,1}\ddot{p}_{1,1}-2r_{1,1}\dot{p}_{1,1}^2)+\\
+\sum_{n=1}^{N_2} d_{2,n}^{(2)}(p_{1,1}\ddot{r}_{2,n}-r_{1,1}\ddot{p}_{2,n})+\\
+\sum_{n=1}^{N_2} d_{2,n}^{(3)}(\ddot{p}_{1,1}r_{2,n}-\ddot{r}_{1,1}p_{2,n}+\\
+\dot{p}_{1,1}\dot{r}_{2,n}-\dot{r}_{1,1}\dot{p}_{2,n})=-\frac{\mu_{1,1}\varkappa_{1,1}}{\zeta_{1,1}^2-1}\dot{v}_{03},
\end{gathered}
\qquad (19)
$$

де N_2 – відповідна кількість узагальнених координат $p_{0,n}(t)$, $r_{2,n}(t)$ і $p_{2,n}(t)$.

Рівняння відносно узагальнених координат другого порядку мають вигляд

$$
\begin{gathered}
2\mu_{0,n}[\ddot{p}_{0,n}+\sigma_{0,n}^2 p_{0,n}]+d_{0,n}^{(1)}(\dot{p}_{1,1}^2+\dot{r}_{1,1}^2)+\\
+d_{0,n}^{(2)}(\ddot{p}_{1,1}p_{1,1}+\ddot{r}_{1,1}r_{1,1})=0,\\
\mu_{2,n}[\ddot{p}_{2,n}+\sigma_{2,n}^2 p_{2,n}]+d_{2,n}^{(1)}(\dot{p}_{1,1}^2-\dot{r}_{1,1}^2)+\\
+d_{2,n}^{(2)}(\ddot{p}_{1,1}p_{1,1}-\ddot{r}_{1,1}r_{1,1})=0,\\
\mu_{2,n}[\ddot{r}_{2,n}+\sigma_{2,n}^2 r_{2,n}]+2d_{2,n}^{(1)}\dot{r}_{1,1}\dot{p}_{1,1}+\\
+d_{2,n}^{(2)}(\ddot{p}_{1,1}r_{1,1}+\ddot{r}_{1,1}p_{1,1})=0.
\end{gathered}
\qquad (20)
$$

Рівняння відносно узагальнених координат третього порядку мають вигляд

$$
\begin{gathered}
\mu_{3,n}[\ddot{p}_{3,n}+\sigma_{3,n}^2 p_{3,n}]+\\
+d_3(p_{1,1}\dot{p}_{1,1}^2-2r_{1,1}\dot{p}_{1,1}\dot{r}_{1,1}-p_{1,1}\dot{r}_{1,1}^2)+\\
+d_4(p_{1,1}^2\ddot{p}_{1,1}-2p_{1,1}r_{1,1}\ddot{r}_{1,1}-r_{1,1}^2\ddot{p}_{1,1})+\\
+\sum_{n=1}^{N_3} d_{3,n}^{(1)}(\dot{p}_{1,1}\dot{p}_{2,n}-\dot{r}_{1,1}\dot{r}_{2,n})+\\
+\sum_{n=1}^{N_3} d_{3,n}^{(2)}(p_{1,1}\ddot{p}_{2,n}-r_{1,1}\ddot{r}_{2,n})+\\
+\sum_{n=1}^{N_3} d_{3,n}^{(3)}(\ddot{p}_{1,1}p_{2,n}-\ddot{r}_{1,1}r_{2,n})=0,\\
\mu_{3,n}[\ddot{r}_{3,n}+\sigma_{3,n}^2 r_{3,n}]+\\
+d_3(r_{1,1}\dot{p}_{1,1}^2+2p_{1,1}\dot{p}_{1,1}\dot{r}_{1,1}-r_{1,1}\dot{r}_{1,1}^2)+\\
+d_4(p_{1,1}^2\ddot{r}_{1,1}+2r_{1,1}p_{1,1}\ddot{p}_{1,1}-r_{1,1}^2\ddot{r}_{1,1})+\\
+\sum_{n=1}^{N_3} d_{3,n}^{(1)}(\dot{p}_{1,1}\dot{r}_{2,n}+\dot{r}_{1,1}\dot{p}_{2,n})+\\
+\sum_{n=1}^{N_3} d_{3,n}^{(2)}(p_{1,1}\ddot{r}_{2,n}+r_{1,1}\ddot{p}_{2,n})+\\
+\sum_{n=1}^{N_3} d_{3,n}^{(3)}(\ddot{p}_{1,1}r_{2,n}+\ddot{r}_{1,1}p_{2,n})=0,
\end{gathered}
\qquad (21)
$$

де N_3 – відповідна кількість узагальнених координат $p_{3,n}(t)$ і $r_{3,n}(t)$.

Важливо те, що вдалося знайти аналітичні вирази для гідродинамічних коефіцієнтів наведеної модальної системи в явному вигляді:

$$\mu_{m,n}=\frac{\pi}{\varkappa_{m,n}}j^{(1)}_{m,n};\qquad \varkappa_{m,n}=\zeta_{m,n}\mathrm{th}\,(\zeta_{m,n}h);$$

$$d^{(1)}_{0,n}=-\frac{\pi}{2}\left[j^{(2)}_{0,n}-\frac{1}{\varkappa^2_{1,1}}\left(j^{(3)}_{0,n}+j^{(4)}_{0,n}\right)\right]+d^{(2)}_{0,n};$$

$$d^{(2)}_{0,n}=\frac{\pi}{2}\left[2-\frac{\zeta^2_{0,n}}{\varkappa_{0,n}\varkappa_{1,1}}\right]j^{(2)}_{0,n};$$

$$d^{(1)}_{2,n}=-\frac{\pi}{4}\left[j^{(2)}_{2,n}-\frac{1}{\varkappa^2_{1,1}}\left(j^{(3)}_{2,n}-j^{(4)}_{2,n}\right)\right]+d^{(2)}_{2,n};$$

$$d^{(2)}_{2,n}=\frac{\pi}{2}\left[j^{(2)}_{2,n}-\frac{1}{\varkappa_{2,n}\varkappa_{1,1}}\left(j^{(5)}_{2,n}+2j^{(4)}_{2,n}\right)\right];$$

$$d^{(3)}_{0,n}=\pi\left[j^{(2)}_{0,n}-\frac{1}{\varkappa^2_{1,1}}\left(j^{(3)}_{0,n}+j^{(4)}_{0,n}\right)\right];$$

$$d^{(3)}_{2,n}=\frac{\pi}{2}\left[j^{(2)}_{2,n}-\frac{1}{\varkappa^2_{1,1}}\left(j^{(3)}_{2,n}-j^{(4)}_{2,n}\right)\right];$$

$$d_1=\frac{\pi}{2\varkappa_{1,1}}\left[\frac{\zeta^4_{0,1}\left(j^{(2)}_{0,1}\right)^2}{4\varkappa_{0,1}\varkappa_{1,1}}\frac{1}{j^{(1)}_{0,1}}+i^c_1-i^c_2\right]+d_2;$$

$$d_2=\frac{\pi}{4\varkappa_{1,1}}\left[\frac{\left(j^{(5)}_{21}+2j^{(4)}_{2,1}\right)^2}{\varkappa_{1,1}\varkappa_{21}}\frac{1}{j^{(1)}_{21}}-3i^c_1-i^c_2\right];$$

$$j^{(1)}_{m,n}=\int_0^1\xi f^2_{m,n}(\zeta_{m,n}\xi)\,d\xi;$$

$$j^{(2)}_{m,n}=\int_0^1\xi f^2_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\,f_{m,n}(\zeta_{m,n}\xi)\,d\xi;$$

$$j^{(3)}_{m,n}=\int_0^1\xi\left(f'_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\right)^2\,f_{m,n}(\zeta_{m,n}\xi)\,d\xi;$$

$$j^{(4)}_{m,n}=\int_0^1\frac{1}{\xi}f^2_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\,f_{m,n}(\zeta_{m,n}\xi)\,d\xi;$$

$$j^{(5)}_{m,n}=\int_0^1\xi f_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\,f'_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\,f'_{m,n}(\zeta_{m,n}\xi)\,d\xi;$$

$$i^c_1=\int_0^1\tfrac{1}{\xi}f^4_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\,d\xi;$$

$$i^c_2=\int_0^1\xi f^2_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\left(f'_{1,1}(\zeta_{1,1}\xi)\right)^2\,d\xi.$$

Як буде показано нижче, узагальнені координати третього порядку не впливають на діапазони існування усталених резонансних рухів. Тому громіздкі аналітичні вирази для коефіцієнтів рівнянь (21) у даній публікації не наводимо.

3. Усталені резонансні режими

Використовуючи рівняння (19) – (21), проаналізуємо усталені коливання вільної поверхні рідини за умов гармонічного збурення баку вздовж осі Oz за законом

$$u(t)=\epsilon\cos(\omega t),\tag{22}$$

де $\epsilon\ll 1$ – безрозмірна амплітуда коливань баку; ω – частота зовнішнього збурення.

3.1. Асимптотичний розв'язок

Для знаходження наближеного розв'язку системи (19) – (22) використаємо метод Бубнова–Гальоркіна, подавши дві домінуючі узагальнені координати $r_{1,1}(t)$ та $p_{1,1}(t)$ у вигляді рядів Фур'є:

$$\begin{aligned}r_{11}(t)&=a_1\cos(\omega t)+a_3\cos(3\omega t)+\ldots,\\ p_{11}(t)&=b_1\sin(\omega t)+b_3\sin(3\omega t)+\ldots.\end{aligned}\tag{23}$$

Зважаючи на те, що систему (19) – (21) отримано з точністю до членів третього порядку малості по відношенню до узагальнених координат $r_{1,1}(t)$ і $p_{1,1}(t)$, а також беручи до уваги властивості тригонометричних функцій, у формулах (23) доцільно обмежитись гармоніками до $\cos(3\omega t)$ і $\sin(3\omega t)$ включно. Решта коефіцієнтів a_i, b_i, $i>3$ тотожно дорівнюють нулю або відповідають членам більш високого порядку малості. Підставивши $r_{1,1}(t)$ і $p_{1,1}(t)$ у рівняння системи (20), знайдемо

$$\begin{aligned}p_{m,n}(t)&=c^{(0)}_{m,n}+c^{(2)}_{m,n}\cos(2\omega t)+\\&+c^{(4)}_{m,n}\cos(4\omega t)+c^{(6)}_{m,n}\cos(6\omega t),\\&\qquad m=0,2;\\ r_{m,n}(t)&=s^{(2)}_{m,n}\sin(2\omega t)+\\&+s^{(4)}_{m,n}\sin(4\omega t)+s^{(6)}_{m,n}\sin(6\omega t),\\&\qquad m=2;\end{aligned}\tag{24}$$

де

$$c^{(0)}_{m,n} = \frac{1}{2}\gamma h^{(0)}_{m,n} D^{(1)}_{m,n}\bigl(a_1^2+\gamma b_1^2+9(a_3^2+b_3^2)\bigr);$$

$$c^{(2)}_{m,n} = \gamma h^{(2)}_{m,n}\bigl(\frac{1}{2}D^{(2)}_{m,n}(a_1^2-\gamma b_1^2)+ +K^{(1)}_{m,n}(a_1a_3+\gamma b_1b_3)\bigr);$$

$$c^{(4)}_{m,n} = \gamma h^{(4)}_{m,n}K^{(2)}_{m,n}(a_1a_3-\gamma b_1b_3);$$

$$c^{(6)}_{m,n} = \frac{9}{2}\gamma h^{(6)}_{m,n}D^{(2)}_{m,n}(a_3^2-\gamma b_3^2);$$

$$s^{(2)}_{m,n} = h^{(2)}_{m,n}\bigl(D^{(2)}_{m,n}b_1a_1+ +K^{(1)}_{m,n}(a_1b_3-b_1a_3)\bigr);$$

$$s^{(4)}_{m,n} = h^{(4)}_{m,n}K^{(2)}_{m,n}(a_1b_3+b_1a_3); \qquad (25)$$

$$s^{(6)}_{m,n} = 9h^{(6)}_{m,n}D^{(2)}_{m,n}a_3b_3;$$

$$h^{(k)}_{0,n} = \frac{\omega^2}{2\mu_{0,n}(\sigma^2_{0,n}-k^2\omega^2)};$$

$$h^{(k)}_{2,n} = \frac{\omega^2}{\mu_{2,n}(\sigma^2_{2,n}-k^2\omega^2)};$$

$$D^{(k)}_{m,n} = d^{(2)}_{m,n}+(-1)^k d^{(1)}_{m,n};$$

$$K^{(k)}_{m,n} = 5d^{(2)}_{m,n}+(-1)^k 3d^{(1)}_{m,n};$$

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{для} \quad m=0; \\ -1, & \text{для} \quad m=2. \end{cases}$$

Коефіцієнти a_1, b_1, a_3 і b_3 у формулах (25) мають такі порядки малості:

$$\begin{aligned} p_{1,1} \sim r_{1,1} \sim a_1 \sim b_1 = O(\epsilon^{1/3}), \\ p^3_{1,1} \sim r^3_{1,1} \sim a_3 \sim b_3 = O(\epsilon) \end{aligned} \qquad (26)$$

у рамках теорії третього порядку Моісеєва. Формули для знаходження $c_{m,n}$ та $s_{m,n}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} c^{(0)}_{m,n} &= \frac{1}{2}\gamma h^{(0)}_{m,n}D^{(1)}_{m,n}(a_1^2+\gamma b_1^2); \\ c^{(2)}_{m,n} &= \frac{1}{2}\gamma h^{(2)}_{m,n}D^{(2)}_{m,n}(a_1^2-\gamma b_1^2); \\ s^{(2)}_{m,n} &= h^{(2)}_{m,n}D^{(2)}_{m,n}b_1a_1; \\ c^{(i)}_{m,n} &= s^{(i)}_{m,n} = 0, \qquad i=4,6. \end{aligned} \qquad (27)$$

Підставивши вирази (23) і (24) у диференціальні рівняння відносно домінантних мод (19) і зібравши члени при однакових гармоніках, отримуємо нелінійну алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a_1, a_3, b_1 та b_3, причому коефіцієнти a_3 і b_3 можна виразити через a_1 і b_1:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{a_1c_1-b_1s_1+a_1c_0}{\mu_{1,1}(\bar\sigma^2_{1,1}-9)-9z_1}, \\ b_3 &= \frac{b_1c_2+a_1s_1+b_1c_0}{\mu_{1,1}(\bar\sigma^2_{1,1}-9)-9z_2}, \end{aligned} \qquad (28)$$

де

$$c_0 = \frac{1}{2}d_1(a_1^2-b_1^2);$$

$$c_1 = \sum_{n=1}^{N}\Bigl[c^{(2)}_{0,n}D_{0,n}-c^{(2)}_{2,n}D_{2,n}\Bigr];$$

$$c_2 = \sum_{n=1}^{N}\Bigl[c^{(2)}_{0,n}D_{0,n}+c^{(2)}_{2,n}D_{2,n}\Bigr];$$

$$s_1 = \sum_{n=1}^{N}s^{(2)}_{2,n}D_{2,n};$$

$$z_1 = \sum_{n=1}^{N}\Bigl[c^{(0)}_{0,n}d^{(3)}_{0,n}-c^{(0)}_{2,n}d^{(3)}_{2,n}\Bigr];$$

$$z_2 = \sum_{n=1}^{N}\Bigl[c^{(0)}_{0,n}d^{(3)}_{0,n}+c^{(0)}_{2,n}d^{(3)}_{2,n}\Bigr];$$

$$D_{m,n} = 2d^{(2)}_{m,n}+\frac{3}{2}d^{(3)}_{m,n}.$$

Тут нелінійна система алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів a_1 і b_1 має вигляд

$$\begin{cases} a_1[\mu_{1,1}(\bar\sigma^2_{1,1}-1)+m_1a_1^2+m_2b_1^2] = \\ \qquad = \dfrac{\mu_{1,1}\varkappa_{1,1}}{\zeta^2_{1,1}-1}\epsilon, \\ b_1[\mu_{1,1}(\bar\sigma^2_{1,1}-1)+m_1b_1^2+m_2a_1^2] = 0, \end{cases} \qquad (29)$$

де коефіцієнти

$$m_1 = \sum_{n=1}^{N}\left(L_{2,n}^{(1)} + \frac{1}{2}L_{0,n}^{(1)}\right) - \frac{1}{2}d_1;$$

$$m_2 = \sum_{n=1}^{N}\left(L_{2,n}^{(2)} - \frac{1}{2}L_{0,n}^{(2)}\right) + \frac{1}{2}d_1 - 2d_2;$$

$$L_{m,n}^{(1)} = \frac{1}{\mu_{m,n}}\left[A_{m,n} - B_{m,n}\right];$$

$$L_{m,n}^{(2)} = \frac{1}{\mu_{m,n}}\left[(2-\gamma)\,A_{m,n} + B_{m,n}\right];$$

$$A_{m,n} = \frac{d_{m,n}^{(2)} + d_{m,n}^{(1)}}{\bar{\sigma}_{m,n}^2 - 4}\left(\frac{1}{4}d_{m,n}^{(3)} - d_{m,n}^{(2)}\right);$$

$$B_{m,n} = \frac{d_{m,n}^{(3)}\left(d_{m,n}^{(2)} - d_{m,n}^{(1)}\right)}{2\bar{\sigma}_{m,n}^2};$$

$$\bar{\sigma}_{m,n}^2 = \frac{\sigma_{m,n}^2}{\omega^2}.$$

При заданих параметрах зовнішнього збурення ϵ та ω з системи (29) можна отримати значення a_1 і b_1. Далі, за формулами (28) і (27) визначаємо коефіцієнти у представленнях узагальнених координат (23) і (24), а отже, й представлення вільної поверхні рідини у вигляді (18).

Існує два типи розв'язків системи (29), які пов'язуються з так званими плоскими та круговими хвилями. Плоскі хвилі характеризуються розв'язком системи (29), в якому $b_1 = 0$. Зовнішній вигляд руху вільної поверхні рідини протягом періоду коливання у випадку плоских коливань дано на рис. 3.

Для визначення плоских усталених хвиль систему (29) можна звести до кубічного рівняння відносно a_1:

$$m_1 a_1^3 + \mu_{1,1}\left(\bar{\sigma}_{1,1}^2 - 1\right)a_1 = \frac{\mu_{1,1}\varkappa_{1,1}}{\zeta_{1,1}^2 - 1}\epsilon. \qquad (30)$$

Кругова усталена хвиля характеризується розв'язком системи (29), в якому $a_1 \neq 0$ і $b_1 \neq 0$. Як випливає зі співвідношень (27), у даному випадку збуджуються всі узагальнені координати ($r_{m,n} \neq 0$ і $p_{m,n} \neq 0$). Вільна поверхня рідини здійснює обертальні хвильові рухи навколо осі симетрії циліндра. Зовнішній вигляд руху вільної поверхні рідини протягом періоду для випадку просторових коливань дано на рис. 4.

Розв'язок (29) у випадку просторових коливань рідини визначається з таких співвідношень:

$$b_1 \neq 0 \Rightarrow \mu_{1,1}\left(\bar{\sigma}_{1,1}^2 - 1\right) + m_1 b_1^2 + m_2 a_1^2 = 0. \qquad (31)$$

Тому

$$b_1^2 = \frac{-m_2 a_1^2 - \mu_{1,1}(\bar{\sigma}_{1,1}^2 - 1)}{m_1},$$

$$a_1^3 + \frac{\mu_{1,1}(\bar{\sigma}_{1,1}^2 - 1)}{m_1 + m_2}a_1 - \frac{\mu_{1,1}\varkappa_{1,1}}{\zeta_{1,1}^2 - 1}\,\frac{\epsilon m_1}{m_1^2 - m_2^2} = 0.$$

3.2. Дослідження стійкості усталених розв'язків

Зазначимо, що серед можливих усталених розв'язків модальної системи слід виділити такі, що визначають стійкі усталені коливання вільної поверхні рідини. З метою дослідження стійкості розв'язків системи звичайних диференціальних рівнянь (19) – (21) використаємо метод повільно змінних амплітуд [1]. Для цього введемо до розгляду повільний час $\tau = \epsilon^{2/3}\omega t/2$ й подамо збурення домінантних мод у вигляді

$$\begin{aligned} r_1(t) &= (a_1 + \alpha(\tau))\cos(\omega t) + \\ &\quad + \tilde{\alpha}(\tau)\sin(\omega t) + o(\epsilon^{1/3}); \\ p_1(t) &= \tilde{\beta(\tau)}\cos(\omega t) + \\ &\quad + (b_1 + \beta(\tau))\sin(\omega t) + o(\epsilon^{1/3}), \end{aligned} \qquad (32)$$

де a_1, b_1 – розв'язки системи (29): α, $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\beta}$ – відповідні малі збурення, які залежать від τ.

Підставляючи вирази (32) у систему рівнянь (19) й групуючи доданки за порядками малості, лінеаризуємо її по α, $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\beta}$ й отримаємо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\vec{c}' + C\vec{c} = 0, \qquad (33)$$

де $\vec{c} = (\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta})^T$, а штрих означає диференціювання по τ. Матриця C містить такі ненульові коефіцієнти, що залежать від a_1 та b_1:

$$c_{21} = -c_{12} = \bar{\sigma} + 3m_1 a_1^2 + m_2 b_1^2;$$

$$c_{43} = -\left(\bar{\sigma} + 3m_1 b_1^2 + m_2 a_1^2\right);$$

$$c_{32} = -c_{14} = (m_1 - m_2)\,a_1 b_1;$$

$$c_{23} = -c_{41} = 2m_2 a_1 b_1;$$

$$c_{34} = \bar{\sigma} + m_1\left(a_1^2 + b_1^2\right);$$

$$\bar{\sigma} = \mu_{1,1}\left(\bar{\sigma}_{1,1}^2 - 1\right).$$

Фундаментальний розв'язок системи (33) пов'язується з характеристичним рівнянням

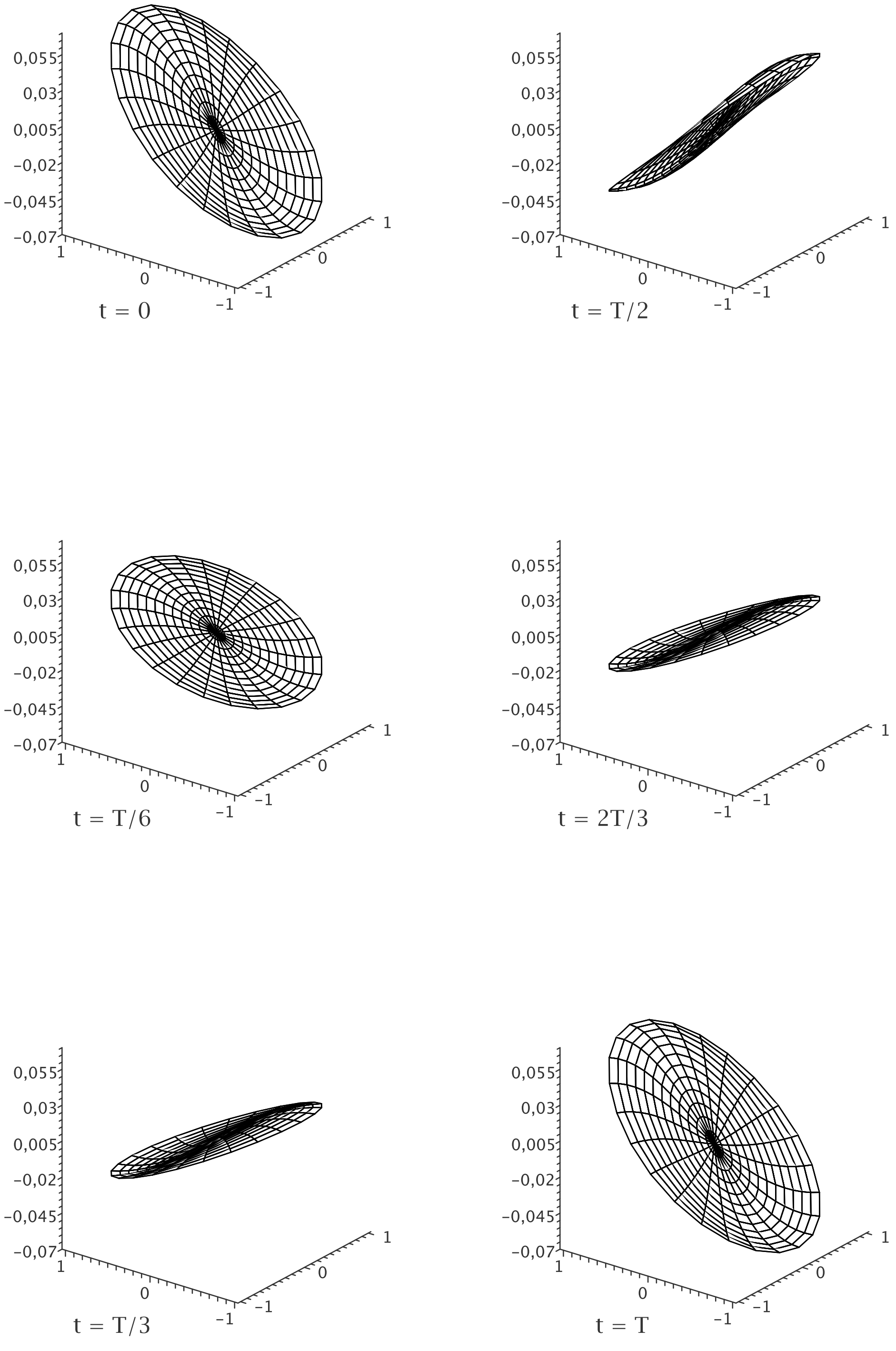

Рис. 3. Плоскі усталені поверхневі хвилі
($T = 2\pi/\omega$ – період зовнішнього збурення)

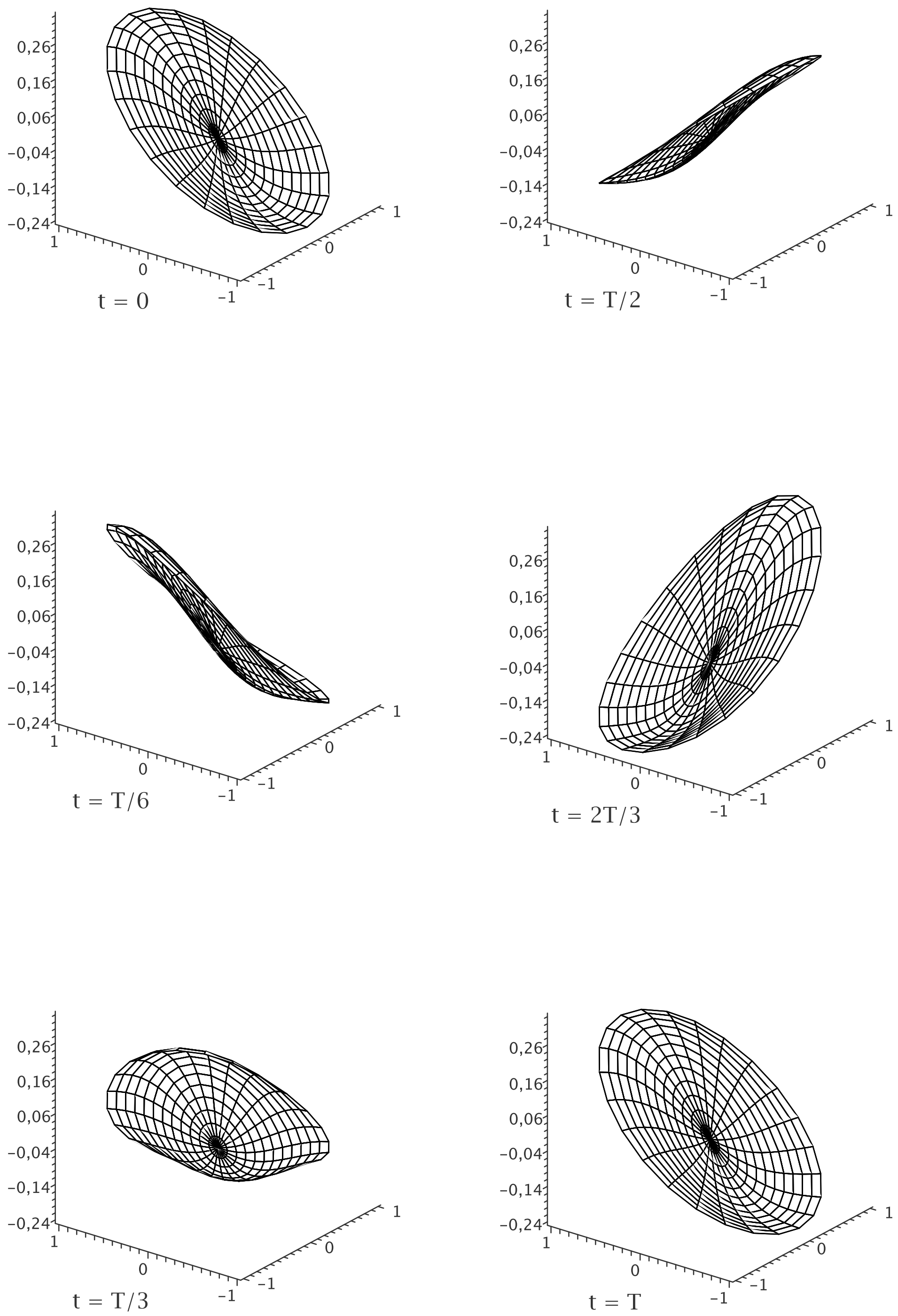

Рис. 4. Кругові усталені поверхневі хвилі
($T=2\pi/\omega$ – період зовнішнього збурення)

$\det(\lambda E + C) = 0$, яке зводиться до біквадратного рівняння

$$\lambda^4 + \bar{c}_1\lambda^2 + \bar{c}_0 = 0, \qquad (34)$$

де

$$\bar{c}_0 = (c_{32}^2 - c_{34}^2)(c_{23}^2 + c_{21}c_{43});$$

$$\bar{c}_1 = c_{34}(c_{21} - c_{43}) - 2c_{23}c_{32}.$$

Необхідна умова стійкості розв'язку системи (19) – (21), яка задається набором домінантних амплітуд $\{a_1, b_1\}$, знайдених зі співвідношень (29), виглядає так:

$$\bar{c}_0 > 0; \qquad \bar{c}_1 > 0; \qquad \bar{c}_1^2 - 4\bar{c}_0 > 0. \qquad (35)$$

Рівності $\bar{c}_0 = 0$ і $\bar{c}_1^2 - 4\bar{c}_0 = 0$ можуть бути використані для знаходження точок біфуркації, аналіз яких проводиться нижче при вивченні амплітудно-частотних характеристик.

4. Амплітудно-частотні характеристики й діапазони існування усталених рухів

У цьому дослідженні головну увагу зосереджено на модельній задачі про вплив узагальнених координат другого порядку[1] на амплітудно-частотні характеристики й діапазони існування двох можливих типів усталених рухів рідини. Зважаючи на домінантний вплив a_1 і b_1, дві безрозмірні амплітуди $A = |a_1|$ і $B = |b_1|$ характеризують ці два типи усталених рухів, так що перша описує домінантну компоненту амплітуди у площині дії зовнішнього збурення, а друга – амплітуду хвильових рухів у перпендикулярній площині.

4.1. Дослідження за п'ятимодовою системою Луковського [7]

Класична модальна система Луковського [7, 27] утримує лише три узагальнені координати другого порядку малості, а саме, $p_{0,1}(t)$, $p_{2,1}(t)$ і $r_{2,1}(t)$. Разом з урахуванням домінантних мод $p_{1,1}(t)$ і $r_{1,1}(t)$ це дозволяє отримати амплітудно-частотні характеристики, зображені на рис. 5 і 6 для випадку глибокої рідини ($h = 2$). Неперервна лінія на рис. 6 відповідає стійкім усталеним розв'язкам, а штрихова – нестійким.

У відповідності до рис. 6, діапазон частот збурення, при яких існують усталені плоскі коливання вільної поверхні рідини, обмежені точками T і P, між якими плоскі режими – нестійкі. Між точками H та P існують лише стійкі кругові хвилі. У той

[1] Форми третього порядку не впливають на розв'язок системи (29), а значить, на діапазони існування плоскої й кругової хвиль.

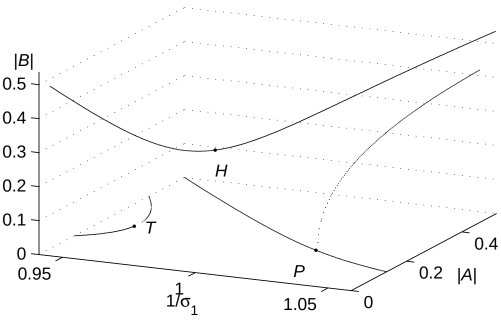

Рис. 5. Залежність амплітуди хвильових рухів вільної поверхні рідини від частоти зовнішнього збурення ω ($\sigma_1 = \sigma_{1,1}/\omega$) при фіксованому значенні амплітуди зовнішнього збурення ϵ (одержано за п'ятимодовою модальною системою при $h = 2$ і $\epsilon = 0.01$)

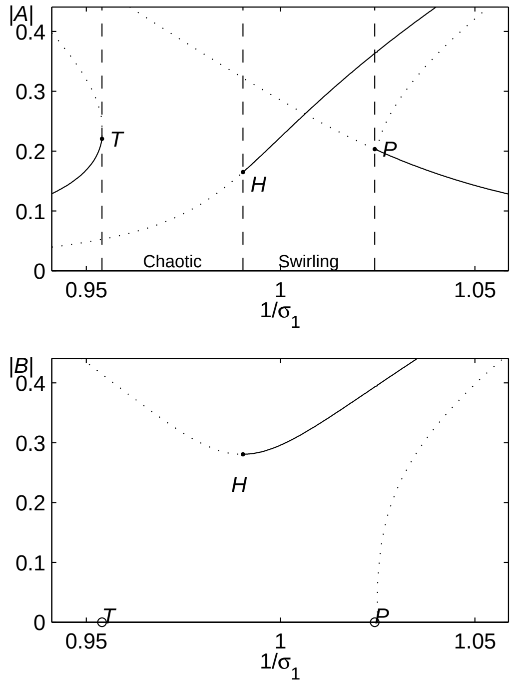

Рис. 6. Проекція кривих амплітудно-частотних характеристик з рис. 5 на координатні осі

же час, між T та H не існує стійких усталених режимів і тут можуть реалізовуватися хаотичні рухи рідини.

4.2. Дослідження за модальною системою (19) – (20)

Для дослідження впливу вищих власних форм на амплітудно-частотні характеристики будемо збільшувати N_2 у рівняннях (19) й аналізувати,

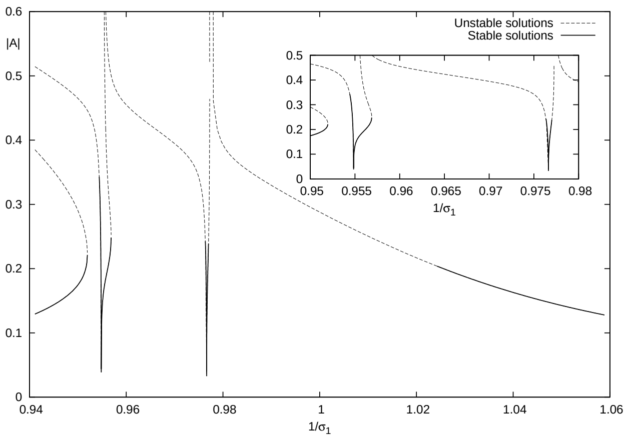

Рис. 7. Амплітудно-частотні характеристики плоских коливань рідини при $N_2\geq 2$, $h=2$ і $\epsilon=0.01$

як кількість узагальнених координат другого порядку малості впливає на амплітудно-частотні характеристики. При $N_2=2$, тобто при врахуванні впливу узагальнених координат $p_{0,2}(t)$, $r_{2,2}(t)$ і $p_{2,2}(t)$, отримуємо амплітудно-частотні характеристики для плоских режимів, показані на рис. 7. Графік демонструє виникнення двох нових (у порівнянні з результатами для п'ятимодової системи Луковського) вузьких резонансних смуг у частотному діапазоні, де п'ятимодова модель передбачала існування виключно хаотичних рухів. Подальше збільшення кількості узагальнених координат другого порядку ($N_2>2$) не впливає на характер амплітудно-частотної характеристики. Відносні величини $|A|$ змінюються зі зростанням N_2 менше, ніж на 1 %. Таким чином, вплив узагальнених координат $p_{0,2}(t)$, $r_{2,2}(t)$ і $p_{2,2}(t)$ – принциповий для глибокої води в частотному діапазоні між точками T та H, але інші вищі форми другого порядку вносять лише незначні кількісні зміни. Аналогічно, збільшення N_2 не впливає якісно на стійкі кругові хвильові режими, але стають можливими резонансні явища в діапазоні між точками T та H, де очікувались хаотичні рухи.

4.3. Аналіз відмінностей і вторинні резонанси

Існування якісних відмінностей між результатами, одержаними для скороченої та повної модальних систем, яке помітне у смузі частот між точками T та H, пояснюється існуванням вторинних (внутрішніх) резонансів другого порядку, природа яких детально обговорюється у монографії [1, розд. 8, 9] і праці [31] (для кругового циліндра). Існування таких вторинних резонансів пов'язується з іншими гармоніками, які породжуються нелінійністю другого порядку й можуть дорівнювати власним частотам мод другого порядку. Це означає одночасне виконання умови $\omega\approx\sigma_{1,1}$ і хоча б однієї з умов $2\omega=\sigma_{2,n}$ чи $2\omega=\sigma_{0,n}$ для деяких значень n, або з математичної точки зору:

$$i_{m,n}(h)=\sqrt{\frac{\zeta_{m,n}\mathrm{th}\,(\zeta_{m,n}h)}{4\zeta_{1,1}\mathrm{th}\,(\zeta_{1,1}h)}}\approx 1 \qquad (36)$$

для деяких значень $m=0,2$ і $n\geq 1$.

Обчислення дають $i_{2,2}(2)=0.9545$ та $i_{0,2}(2)=0.9766$, що відповідає за резонансну поведінку мод 2,2 і 0,2 в діапазоні між T і H (див. рис. 7).

Ситуація з внутрішніми резонансами другого порядку змінюється зі зменшенням глибини рідини, коли величини $i_{m,n}$ монотонно зростають до значень $\zeta_{m,n}/(2\zeta_{1,1})$. Рис. 8 демонструє залежність $i_{m,n}$ від безрозмірної глибини. З графіка видно, що зменшення глибини рідини може призвести до зникнення внутрішніх резонансів другого порядку відносно мод 0,2 та 2,2 (в околі основного резонансу), але стають можливими внутрішні резонанси другого порядку для мод 2,1 та 0,1.

ВИСНОВКИ

Уперше представлено нелінійну асимптотичну модальну систему для коливань рідини у вертикальному циліндричному баці кругового перерізу, яка зв'язує усі теоретично необхідні узагальнені координати аж до порядку $O(\epsilon)$, які випливають з асимптотики Моісеєва. Для виведення цієї асимптотичної системи використано варіаційну модальну систему Луковського.

Для модельної задачі про усталені рухи, що виникають при гармонічних горизонтальних збуреннях баку, побудовано усталені розв'язки одержаної асимптотичної модальної системи. Проведене їхнє порівняння з відповідними розв'язками асимптотичної п'ятимодової системи, яка показала хорошу відповідність експериментальним даним [1, 7] при описі діапазонів існування плоских і кругових хвильових усталених рухів рідини для глибокої води. Для згаданого випадку показано, що урахування вищих форм другого порядку малості якісно не впливає на діапазони існування стійких усталених рухів у порівнянні з результатами Луковського. Кількісні зміни також не перевищують 1 %.

У той же час, в діапазоні, де обидві модальні системи передбачають відсутність стійких усталених рухів й можливе існування хаотичних рухів, нова модальна система вказує на появу вторинних (внутрішніх) резонансів, у околі яких можуть

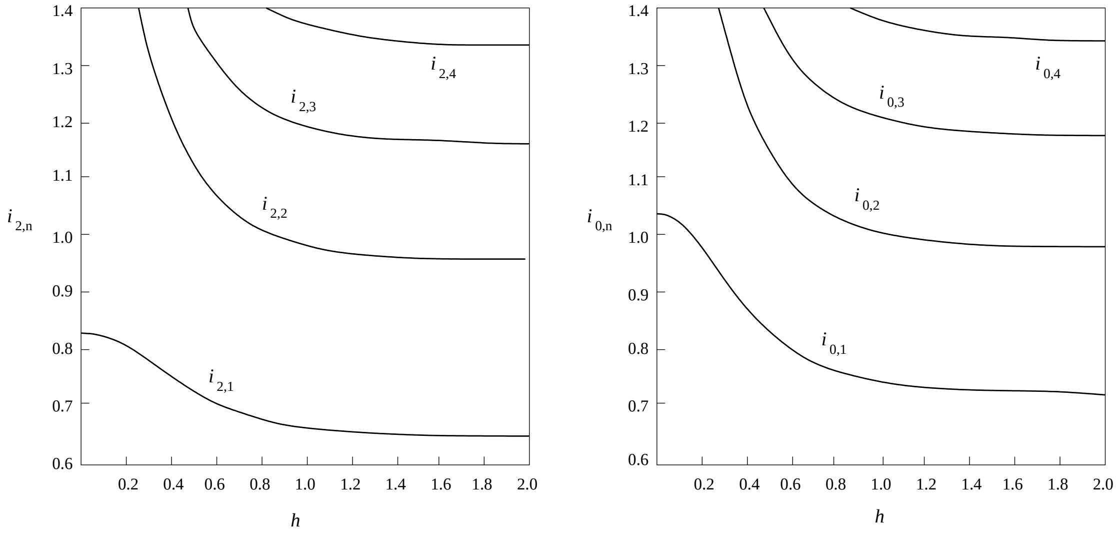

Рис. 8. Значення параметрів $i_{m,n}(h)$, одержаних за формулою (36)

збуджуватися три вищі форми другого порядку (за асимптотикою Моісеєва). Коректний опис внутрішніх резонансів потребує так званої адаптивної асимптотики [20], яка вказує на наявність більшої кількості домінантних узагальнених координат. Тому знаходження таких резонансів робить дискусійним питання про хаотичні рухи рідини у цьому діапазоні, якщо ці результати було отримано з використанням асимптотики Моісеєва, де лише дві перші власні форми характеризуються домінантним внеском. У контексті сказаного особливу увагу в подальшому слід приділити аналізу силової взаємодії рідини зі стінками бака.

ПОДЯКА

Роботу виконано за часткової підтримки НДР 0107U002198 і Німецького дослідницького товариства.

1. *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Sloshing.– Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009.– 608 p.
2. *Rebouillat S., Liksonov D.* Fluid-structure interaction in partially filled liquid containers: A comparative review of numerical approaches // Comp. Fluids.– 2010.– **39**.– P. 739–746.
3. *Нариманов Г. С.* О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движений последней // Прикл. мат. мех.– 1957.– **21**, № 4.– С. 513–524.
4. *Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью.– М.: Машиностроение, 1977.– 208 с.
5. *Moiseev N. N.* On the theory of nonlinear vibrations of a liquid of finite volume // J. Appl. Math. Mech.– 1958.– **22**.– P. 860–872.
6. *Луковский И. А.* Вариационный метод в нелинейных задачах динамики ограниченого объема жидкости со свободной поверхностью // Колебание упругих конструкций с жидкостью.– М.: Волна, 1976.– С. 260–264.
7. *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику тел с полостями, частично заполненными жидкостью.– К.: Наук. думка, 1990.– 296 с.
8. *Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Lukovsky I. A., Timokha A. N.* Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth // J. Fluid Mech.– 2000.– **407**.– P. 201–234.
9. *Miles J. W.* Nonlinear surface waves in closed basins // J. Fluid Mech.– 1976.– **75**.– P. 419–448.
10. *Луковский И. А.* Определение сил взаимодействия между телом и жидкостью в нелинейной задаче о движении тела с полостью, содержащей жидкость // Нелинейные краевые задачи.– К.: Ин-т математики АН УССР, 1980.– С. 181–190.
11. *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью.– К.: Наук. думка, 2010.– 408 с.
12. *Miles J. W.* Internally resonant surface waves in a circular cylinder // J. Fluid Mech.– 1984.– **149**.– P. 1–14.
13. *Miles J. W.* Resonantly forced surface waves in a circular cylinder // J. Fluid Mech.– 1984.– **149**.– P. 15–31.
14. *Limarchenko O. S.* Application of a variational method to the solution of nonlinear problems of the dynamics of combined motions of a tank with a fluid // Sov. Appl. Mech.– 1983.– **19**, № 11.– P. 1021–1025.
15. *Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu., Timokha A.* Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 2. Nonlinear resonant waves // J. Eng. Math.– 2007.– **57**.– P. 57–78.
16. *La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M. A.* A fully nonlinear model for sloshing in a rotating container // Fluid Dyn. Res.– 2000.– **27**.– P. 23–52.

17. *Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Timokha A. N.* Resonant three-dimensional nonlinear sloshing in a square base basin // J. Fluid Mech.– 2003.– **487**.– P. 1–42..
18. *Moore R. E., Perko L. M.* Inviscid fluid flow in an accelerating cylindrical container // J. Fluid Mech.– 1964.– **22**.– P. 305–320.
19. *Perko L. M.* Large-amplitude motions of liquid-vapour interface in an accelerating container // J. Fluid Mech.– 1969.– **35**.– P. 77–96.
20. *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Adaptive multimodal approach to nonlinear sloshing in a rectangular tank // J. Fluid Mech.– 2001.– **432**.– P. 167–200.
21. *Faltinsen O. M., Timokha A. N.* Asymptotic modal approximation of nonlinear resonant sloshing in a rectangular tank with small fluid depth // J. Fluid Mech.– 2002.– **470**.– P. 319–357.
22. *Богоряд И. Б.* Колебания вязкой жидкости в полости твердого тела.– Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1999.– 134 с.
23. *Waterhouse D. D.* Resonant sloshing near a critical depth // J. Fluid Mech.– 1994.– **281**.– P. 313–318..
24. *Faltinsen O. M., Rognebakke O. F., Timokha A. N.* Classification of three-dimensional nonlinear sloshing in a square-base tank with finite depth // Journal of Fluids and Structures.– 2005.– **20**.– P. 81–103.
25. *Луковський І.О., Овчинников Д.В.* Нелінійна математична модель п'ятого порядку малості в задачах про коливання рідини в циліндричному резервуарі // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Праці Інституту математики НАН України.– 2003.– **47**.– С. 119–160.
26. *Луковський І.О., Овчинников Д.В.* Дослідження вимушених коливань рідини у циліндричному резервуарі на основі моделі п'ятого порядку малості // Комплексний аналіз і течії з вільними границями: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.– 2004.– **1**, № 5.– С. 325–330.
27. *Луковський І.О., Овчинников Д.В.* Оптимальна модель третього порядку малості в задачі про нелінійні коливання рідини в циліндричному резервуарі // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України.– 2005.– **2**, № 1.– С. 254–265.
28. *Луковський І. О., Солодун О. В.* Дослідження вимушених нелінійних коливань рідини у кругових циліндричних ємностях на основі семимодової моделі третього порядку // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Праці Ін-ту математики НАН України.– 2003.– 47.– С. 161–179.
29. *Овчинников Д. В.* Дослідження стійкості вимушених коливань рідини у циліндричному резервуарі на основі моделі пятого порядку малості // Зб. праць Ін-ту математики НАН України.– 2004.– **1**, № 2.– С. 158–176.
30. *Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Ovchynnykov D., Timokha A.* Computer-based multimodal modeling of liquid sloshing in a circular cylindrical tank // FSU-Jena, Rep. Numer. Math.– 2010.– **10-03**.– P. 1–14.
31. *Bryant P. J.* Nonlinear progressive waves in a circular basin // J. Fluid Mech.– 1989.– **205**.– P. 453–467.