УДК 519.41/47

Л. А. Курдаченко, Х. М. Муньос-Есколано, Х. Отал, М. М. Семко

Локально нільпотентні лінійні групи з деякими обмеженнями для підгруп нескінченної центральної вимірності

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Досліджено локально нільпотентні лінійні групи, у яких система підгруп, що мають нескінченну центральну вимірність, задовольняє слабку умову мінімальності.

Нехай F — поле, A — векторний простір над F. Група $GL(F, A)$ усіх автоморфізмів A та різні її підгрупи (лінійні групи) являють собою один з найдавніших об'єктів досліджень в алгебрі. Теорія лінійних скінченновимірних груп є однією з найбільш розвинених в теорії груп. Однак у випадку, коли $\dim_F A$ є нескінченною, ситуація кардинально інша. Вивчення лінійних груп у цьому випадку потребує істотних додаткових обмежень.

У статті [1] було розпочато вивчення нескінченновимірних лінійних груп, які у деякому сенсі є близькими до скінченновимірних. Цей підхід базується на такому понятті: якщо H — підгрупа $GL(F, A)$, то H реально діє на факторпросторі $A/C_A(H)$. Наслідуючи [1], будемо говорити, що H має скінченну центральну вимірність, якщо $\dim_F(A/C_A(H))$ скінченна. У цьому випадку $\dim_F(A/C_A(H))$ називатиметься центральною вимірністю підгрупи H і позначатиметься через $\operatorname{centdim}_F(H)$.

Нехай $G \leqslant GL(F, A)$ та нехай $L_{icd}(\mathrm{G})$ — це система всіх підгруп G, що мають нескінченну центральну вимірність. Природно розглядати такі лінійні групи G, у яких система $L_{icd}(G)$ буде "досить невеликою" у деякому сенсі. Так, у статті [1] розглядались лінійні групи, у яких система $L_{icd}(G)$ задовольняє умову мінімальності. Протилежна ситуація, тобто лінійні групи, у яких система $L_{icd}(G)$ задовольняє умову максимальності, розглядалась у роботі [2]. Слабкі умови мінімальності та максимальності є природним узагальненням звичайних умов мінімальності та максимальності. Ці умови введені в теорію груп Р. Бером [3] та Д. І. Зайцевим [4]. Витоки їх можна знайти у понятті вимірності Крулля, яка відіграє вагому роль в теорії кілець та модулів.

Нехай G — група, M — система її підгруп. Будемо говорити, що M задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно, максимальності) або G задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно, максимальності) для M-підгруп, якщо для кожної спадаючого (відповідно, зростаючого) ряду $\{H_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ підгруп системи M існує такий номер $m \in \mathbb{N}$, що індекси $|H_n : H_{n+1}|$ (відповідно, $|H_{n+1} : H_n|$) будуть скінченними при $n \geqslant m$.

Групи зі слабкими умовами мінімальності і максимальності для різноманітних важливих систем підгруп вивчалися багатьма дослідниками (див., напр., [5, 5.1; 6; 7]).

Будемо говорити, що група $G \leqslant GL(F, A)$ задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно, максимальності) для підгруп нескінченної центральної вимірності або, коротше, $W\min -icd$ (відповідно, $W\max -icd$), якщо система $L_{icd}(G)$ задовольняє слабку умову мінімальності (відповідно, максимальності).

Періодичні локально радикальні лінійні групи, що задовольняють слабку умову мінімальності (відповідно, максимальності) для підгруп нескінченної центральної вимірності, були вивчені у статті [8]. У статті [9] було розпочато вивчення лінійних локально нільпотентних груп з умовами $W\min - icd$ або, відповідно, $W\max - icd$ над полями простої характеристики. Зокрема, доведено, що якщо така група має нескінченну центральну вимірність, то факторгрупа $G/\operatorname{Tor}(G)$ є мінімаксною ($\operatorname{Tor}(G)$ — множина всіх елементів, що мають скінченні порядки). У даній роботі вивчаються локально нільпотентні лінійні групи, що задовольняють умову $W\min - icd$.

Лема 1. *Нехай $G \leqslant GL(F, A)$. Припустимо, що H — гіперцентральна підгрупа G. Якщо H ненільпотентна і кожна її факторгрупа не містить у собі квазіциклічних p-підгруп для кожного простого числа p, то H має нескінченну центральну вимірність.*

Нехай $G \leqslant GL(F, A)$. Покладемо $FD(G) = \{x \in G \mid \langle x \rangle$ має скінченну центральну вимірність$\}$.

Неважко побачити, що $FD(G)$ — нормальна підгрупа G. Ця підгрупа була введена до розгляду в статті [1].

Підгрупу $FD(G)$ називають фінітарним радикалом лінійної групи G.

Лема 2. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W\min - icd$ і нехай g — такий елемент нескінченного порядку, що $g \notin FD(G)$. Якщо U, V — такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи G, що U — нормальна обмежена підгрупа V і V/U — елементарна абелева p-група для деякого простого числа p, то V/U є скінченною.*

Наслідок. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W\min - icd$, та нехай g — такий елемент нескінченного порядку, що $g \notin FD(G)$. Якщо V — $\langle g \rangle$-інваріантна нільпотентна обмежена p-підгрупа G, p — просте число, то V є скінченною.*

Теорема 1. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W\min - icd$ та G не є фінітарною лінійною групою. Якщо $\operatorname{char} F = p > 0$, то G є мінімаксною.*

Лема 3. *Нехай G — мінімаксна нільпотентна група без скруту. Тоді G має такий скінченний субнормальний ряд*

$$K = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G,$$

що K — скінченно породжена підгрупа, а фактори H_j/H_{j-1} — подільні абелеві черніковські групи, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Теорема 2. *Нехай G — гіперцентральна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W\min - icd$ та $\operatorname{char} F = p > 0$. Якщо G має нескінченну центральну вимірність, то G є мінімаксною.*

Лема 4. *Нехай G — група та T — її скінченна нормальна підгрупа. Якщо факторгрупа G/T є абелевою та без скруту, то існує така нормальна підгрупа U групи G, що G/U є обмеженою та $T \bigcap U = \langle 1 \rangle$.*

Лема 5. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W\min - icd$, та нехай g — такий елемент нескінченного порядку, що $g \notin FD(G)$. Якщо U, V — такі $\langle g \rangle$-інваріантні підгрупи G, що $g \notin U$, U є нормальною підгрупою в V та V/U — абелева група без скруту, то V/U є мінімаксною.*

Лема 6. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W\min - icd$ та нехай g — такий елемент нескінченного порядку, що*

$g \notin FD(G)$. Якщо

$$U = U_0 \leqslant U_1 \leqslant \cdots \leqslant U_n \leqslant \cdots \ -$$

ряд таких нормальних підгруп, що $g \notin U$ та фактори U_{n+1}/U_n є абелевими та не мають скруту для всіх $n \in \mathbb{N}$, то існує такий номер m, що $U_m = U_{m+n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Більше того, фактор U_m/U є мінімаксним.

Лема 7. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W \min -icd$, та нехай $\operatorname{char} F = 0$. Тоді її періодична частина $\operatorname{Tor}(G)$ є черніковською підгрупою.*

Теорема 3. *Нехай G — локально нільпотентна підгрупа $GL(F, A)$. Припустимо, що G задовольняє умову $W \min -icd$ та G не є фінітарною лінійною групою. Якщо $\operatorname{char} F = 0$, то G є мінімаксною.*

Для лінійних груп, що задовольняють умову $W \max -icd$, ситуація є іншою. Покажемо це на такому прикладі.

Нехай F — поле простої характеристики p. Розглянемо зчисленновимірний векторний простір над F. Нехай $\{u, v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ — базис цього простору. Тоді $V = uF \oplus (\oplus_{n \in \mathbb{N}} v_n F)$. Позначимо через $GL(N, F)$ множину нескінченних матриць, кожний рядок (відповідно, стовпчик) яких є зчисленним та має тільки скінченну множину ненульових елементів. Тоді можна визначити добуток двох таких матриць за тим самим правилом, за яким визначається добуток звичайних матриць. Нехай $\gamma = \|c_{jk}\|_{j,k \in \mathbb{N}}$, де

$$c_{11} = c_{12} = 1, \qquad c_{1j} = 0, \qquad \text{як тільки} \qquad j > 2;$$

$$c_{22} = 1, \qquad c_{2j} = 0, \qquad \text{як тільки} \qquad j \neq 2;$$

$$c_{j+1j} = c_{jj} = 1, \qquad c_{jk} = 0, \qquad \text{як тільки} \qquad (j, k) \neq (j+1, j), (j, j).$$

Визначимо також матриці $\alpha_n = \|a_{jk}^{(n)}\|_{j,k \in \mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, таким чином:

$$a_{jj}^{(n)} = 1 \qquad \text{для всіх} \qquad n \in \mathbb{N};$$

$$a_{1n+1}^{(n)} = 1;$$

$$a_{jk}^{(n)} = 0 \qquad \text{для всіх інших пар} \qquad (j, k).$$

Використовуючи звичайні обчислення, можна перевірити, що γ має нескінченний порядок, $|\alpha_n| = p$, $[\alpha_n, \alpha_k] = 1$, $\gamma^{-1}\alpha_n\gamma = \alpha_n\alpha_{n-1}$ для всіх $n, k \in \mathbb{N}$.

Нехай $G = \langle \gamma, \alpha_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$. Тоді $G = A \leftthreetimes \langle \gamma \rangle$, де $A = \times_{n \in \mathbb{N}} \langle \alpha_n \rangle$ — нескінченна елементарна абелева p-підгрупа. Більше того, G є гіперцентральною і кожна G-інваріантна підгрупа A є скінченною. За побудовою $C_V(A) = \oplus_{n \in \mathbb{N}} v_n F$, так що $\dim_F(V/C_V(A)) = 1$, тобто A має скінченну центральну вимірність. Далі маємо $C_V(\langle \gamma \rangle) = v_1 F + (u - v_2)F$, зокрема $\operatorname{centdim}_F(\langle \gamma \rangle)$ є нескінченною. Тоді і вся група G має нескінченну центральну вимірність. Можна довести, що група G задовольняє умову $W \max -icd$. У той же час її періодична частина є нескінченною елементарною абелевою, так що G не є мінімаксною.

1. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. – 2004. – **277**, No 1. – P. 172–186.

2. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. – 2006. – **50**, No 1. – P. 103–131.
3. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**, No 1. – P. 1–43.
4. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, № 4. – С. 472–482.
5. *Lennox J. C., Robinson D. J. S.* The theory of infinite soluble groups. – Oxford: Clarendon Press, 2004. – 342 p.
6. *Казарин Л. С., Курдаченко Л. А.* Условия конечности и факторизации в бесконечных группах // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, № 3. – С. 81–126.
7. *Артемович О. Д., Курдаченко Л. А.* Групи, багаті X-підгрупами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – **61**. – С. 218–237.
8. *Muñoz-Escolano J. M., Otal J., Semko N. N.* Linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension // Communs Algebra. – 2008. – **36**. – P. 749–763.
9. *Kurdachenko L. A., Muñoz-Escolano J. M., Otal J.* Locally nilpotent linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. – 2008. – **52**, No 1. – P. 151–169.

Дніпропетровський національний університет
Університет Сарагоси, Іспанія
Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 26.06.2008

L. A. Kurdachenko, J. M. Muñoz-Escolano, J. Otal, M. M. Semko

Locally nilpotent linear groups with some restrictions on subgroups of infinite central dimension

We study the locally nilpotent linear groups, in which the family of subgroups having infinite central dimension satisfies the weak minimal condition.