

УДК 539.3

РЕЗОНАНС НА НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГОМ ПОЛУСЛОЕ

В. Т. ГРИНЧЕНКО*, Н. С. ГОРОДЕЦКАЯ*, В. В. МЕЛЕШКО**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Получено 15.10.2010

Проведен анализ особенностей резонанса на неоднородных волнах на частотах, для которых SV-волна является распространяющейся, а P-волна – неоднородной. Причину возникновения такого сложного волнового движения как краевой резонанс удалось качественно объяснить, основываясь на свойствах отражения плоских упругих волн от свободной границы упругого тела. Показано, что эффективность проявления краевого резонанса и соответствующая собственная частота существенно зависят от коэффициента Пуассона.

Проведено аналіз особливостей резонансу на неоднорідних хвилях на частотах, для яких SV-хвиля – така, що поширюється, а P-хвиля – неоднорідна. Причину виникнення такого складного хвильового руху як крайовий резонанс вдалося якісно пояснити, базуючись на властивостях відбиття плоских пружних хвиль від вільної межі пружного тіла. Показано, що ефективність прояву крайового резонансу й відповідна власна частота істотно залежать від коефіцієнта Пуассона.

The paper deals with analyzing the features of a resonance on the inhomogeneous waves at frequencies for which the SV-wave is a propagating one, while the P-wave is nonpropagating. We have managed to explain the occurrence of such complex motion as the edge resonance is on the base of reflection properties of plane elastic waves at the free boundary of elastic body. The efficiency of edge resonance exhibition and the corresponding eigen-frequency have been shown to significantly depend on the Poisson's ratio.

ВВЕДЕНИЕ

Значительное возбуждение неоднородных волн вблизи вертикальных границ в упругих волноводах со свободными боковыми поверхностями приводит к ряду специфических волновых эффектов, проявляющихся в сильной локализации движения вблизи вертикальной границы. Одним из наиболее известных и хорошо изученных примеров такой локализации является краевой резонанс, который выражается в резком увеличении амплитуд смещений в окрестности торца волновода со значительным их убыванием при удалении от торца.

Возникновение краевого резонанса было впервые отмечено Шоу при изучении колебаний пьезокерамических дисков [1]. При этом наблюдалась локализация зоны больших смещений на краю диска и независимость резонансной частоты от его радиуса. Аналогичный тип колебаний обнаружил Оливер в опытах на длинных стальных цилиндрах [2]. При экспериментальном исследовании краевой формы возникают определенные трудности, которые в значительной мере связаны с тем, что эффективный коэффициент электромеханической связи на указанной моде в пьезоактивных пластинах, дисках и цилиндрах близок к нулю. Несмотря на это, в настоящее время накоплен обширный фактический материал, характеризующий явление краевого резонанса [3].

С точки зрения теоретического объяснения наблюдаемого эффекта важную роль сыграли работы Газиса и Миндлина [4]. Здесь феномен краевого резонанса впервые был связан со спецификой возбуждения неоднородных волн. Тем самым подчеркнута особо важная роль волн с комплексными постоянными распространения для более полного описания волнового поля. В дальнейшем появилось значительное количество публикаций, посвященных изучению краевого резонанса в цилиндрах [3, 5], круглых дисках [4, 6] и прямоугольных пластинках конечной длины [7].

Более глубоко понять специфику возбуждения неоднородных волн позволил анализ краевого резонанса в полубесконечных телах. Многочисленные работы по краевому резонансу в полуограниченных телах [4, 8–16] показали, что в полуполосе и полуцилиндре частота краевого резонанса, на которой происходит локализация движения вблизи торца, совпадает с резонансной частотой в конечных цилиндрах и пластинах.

Для изучения волнового поля в таких телах использовались различные подходы – метод однородных решений [5, 12], метод суперпозиции [9, 18], метод конечных элементов [16, 17], метод конечных разностей [11] и другие. В рамках метода однородных решений при описании явления краевого резонанса широкое распространение получила теория “второго порядка” [4, 7], а также вариацион-

ные методы [8, 12]. Краевой резонанс на основе метода суперпозиции исследовался в работах [9, 14]. Отметим, что значения частоты краевого резонанса, полученные различными методами для заданного коэффициента Пуассона, отличаются не более, чем на 0.05 %.

К настоящему времени накоплен огромный объем информации, полученной на основе экспериментальных, численных и численно-аналитических подходов, описывающий различные стороны проявления краевого резонанса. Значительная часть ранних публикаций по этой тематике обсуждалась в книге В. Т. Гринченко и В. В. Мелешко [9]. Заметим лишь, что обсуждаемое явление справедливо связывают с резонансом на неоднородных волнах Лэмба в полосе. Несмотря на большое количество работ, посвященных крайному резонансу, здесь все еще остается ряд невыясненных аспектов. Прежде всего, это относится к оценке интенсивности возбуждения неоднородных волн на резонансной частоте при различных способах возбуждения колебаний и разных параметрах среды (например, коэффициенте Пуассона).

Помимо традиционного источника колебаний в виде заданных на границе силовых или кинематических параметров в случае полуполосы появляется такой источник с конечной энергией как падающая из бесконечности волна. Подобное возбуждение волновода соответствует источнику с конечной энергией во всем частотном диапазоне. Кроме того, отраженная (уходящая на бесконечность) волна формирует специфический радиационный механизм затухания. О возникновении резонансных ситуаций можно говорить, анализируя частотную зависимость силовых или кинематических характеристик отраженного волнового поля. В случае возбуждения волнового поля падающей из бесконечности волной в области частот, где имеются распространяющиеся нормальные моды, существование резонансов на распространяющихся волнах невозможно. Здесь речь может идти лишь об особом характере возбуждения неоднородных волн, причем амплитуды их возбуждения всегда остаются конечными величинами. Указанная ограниченность амплитуд обусловлена связанностью через граничные условия единственной распространяющейся и неоднородных волн, вследствие чего в полуслой вносится радиационное демпфирование.

В ряде работ, посвященных крайному резонансу [19, 20], существование радиационного демпфирования учитывалось путем введения комплексной частоты (по аналогии с теорией колеба-

ний систем с демпфированием). При этом частота краевого резонанса получена как функция коэффициента Пуассона ν . Зависимость действительной части частоты от ν хорошо согласуется с известными данными и близка к линейной. Мнимая же ее часть имеет два нуля. Первый из них соответствовал $\nu=0$, а второй наблюдался при $\nu=0.2248$ и соответствовал частоте краевого резонанса $\omega h/c_s = \pi/\sqrt{2}$. Указанные работы в значительной мере стимулировали нас более внимательно рассмотреть особенности проявления краевого резонанса при различных коэффициентах Пуассона и попытаться дать физическую интерпретацию данного явления.

При возбуждении колебаний заданной силовой нагрузкой ситуация может измениться. Вынужденные колебания характеризуются возможностью в ряде случаев устранить связь между распространяющейся и неоднородными волнами и получить крайовой резонанс в “чистом виде”, т.е. обращение амплитуд смещений на резонансной частоте в бесконечность.

При симметричных колебаниях полуполосы и полуцилиндра связь между распространяющейся и неоднородными волнами устраняется для коэффициента Пуассона $\nu=0$ за счет выбора нагрузки на торце соответствующим образом. Так, при возбуждении колебаний самоуравновешенной нагрузкой амплитуды неоднородных волн на резонансной частоте стремятся к бесконечности [9, 10, 13].

В случае неосесимметричных колебаний полубесконечного цилиндра наименьшая частота записания волновода будет больше нуля при всех возможных значениях коэффициента Пуассона. Поскольку частота краевого резонанса оказалась меньше значения нижней критической частоты, неограниченный рост амплитуды неоднородных волн при вынужденных колебаниях здесь наблюдается при произвольном ν [9].

В случае симметричных колебаний полуполосы эффективность проявления краевого резонанса существенно различна при разных коэффициентах Пуассона: при $\nu=0$ амплитуды неоднородных волн стремятся к бесконечности, а при $\nu \neq 0$ – конечны.

Таким образом, эффективность возбуждения краевого резонанса существенно зависит от параметров среды (например, коэффициента Пуассона) и способа возбуждения волнового поля в упругом теле. Влияние обоих этих факторов будет рассмотрено в данной работе.

Кроме того, основное внимание будет уделено вопросу о физических причинах возникновения краевого резонанса. В работах [9, 14, 15] предло-

жена интерпретации эффектов локализации волновых движений вблизи границы, основанная на анализе особенностей взаимодействия и взаимопревращения продольных и поперечных волн на граничных поверхностях. Эта идея оправдала себя при исследовании явления краевого резонанса при симметричных колебаниях упругого полуслоя и анализе эффектов локализации движения вблизи границы в составных волноводах [15, 21].

Как известно, краевой резонанс при продольных колебаниях полуограниченного слоя наблюдается на тех частотах, на которых в волноводе существует единственная распространяющаяся нормальная волна (первая нормальная волна, мода). В области частот, где может существовать только одна распространяющаяся нормальная волна, при симметричных колебаниях слоя на его боковых поверхностях она может быть представлена как суперпозиция распространяющейся SV-волны и неоднородной Р-волны. При отражении распространяющейся SV-составляющей первой нормальной волны от торца волновода образуются отраженные SV- и Р-волны. При этом отраженные SV-волны – всегда распространяющиеся, а Р-волны, в зависимости от угла падения и частоты, могут быть как распространяющимися так и неоднородными. При таком представлении единственной распространяющейся волны особой оказывается частота $\omega h/c_s \approx 2.2 = \pi/\sqrt{2}$, на которой решение дисперсионного уравнения имеет вид $\omega h/c_s = \xi\sqrt{2}$. Такой тип движения в волноводе соответствует моде Ламе, для которой характерно отсутствие объемного расширения и касательных напряжений во всем объеме волновода [9]. Моде Ламе представляет собой только SV-компоненту, которая падает на свободную боковую поверхность под углом 45° . Это специфичный случай отражения от свободной границы, когда процесс отражения не сопровождается возбуждением волн другого типа движения (имеет место полное сохранение типа движения). При возбуждении полуслоя первой нормальной волной, приходящей из бесконечности на данной частоте, SV-волна отражается от свободного торца только с изменением фазы и формирует стоячую по толщине волновода волну. Здесь для эффективной передачи энергии в дальнее поле не нужна перестройка волнового поля вблизи торца, что приводит к нулевым амплитудам неоднородных волн.

При вынужденных колебаниях полуслоя на указанной частоте возможно подобрать нагрузку, которая будет ортогональна распространяющейся волне. В этой ситуации, аналогично случаю $\nu=0$, возникает принципиальная возможность устано-

вить связь между неоднородными и распространяющимися волнами и исследовать эффективность возбуждения неоднородных волн на частоте $\omega h/c_s \approx 2.2 = \pi/\sqrt{2}$ в зависимости от коэффициента Пуассона.

Хорошо известно, что частота краевого резонанса и его добротность существенно зависят от ν [14, 16]. Их чувствительность к этой характеристике материала связана с особенностями возбуждения отраженной Р-волны. Для $0.153 \leq \nu$ при отражении SV-составляющей первой нормальной волны от свободной границы вблизи частоты краевого резонанса на свободном торце возникает распространяющаяся Р-волна. Одновременно на боковых поверхностях волновода Р-составляющая единственной распространяющейся волны является неоднородной волной. Такое рассогласование характера движения на вертикальной границе и боковых поверхностях полуслоя приводит к необходимости значительного возбуждения других типов нормальных волн – неоднородных, которые и обуславливают существование краевого резонанса.

В рамках такой физической интерпретации краевого эффекта в полуслое становятся понятными причины изменения частоты краевого резонанса и его добротности при изменении коэффициента Пуассона среды. Эти вопросы будут проанализированы в данной работе.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим плоскую задачу определения свойств волнового поля в изотропном полубесконечном упругом слое

$$|Y| \leq H, \quad Z \geq 0, \quad -\infty < X < \infty$$

с заданными физическими характеристиками – модулем сдвига μ , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ (случай плоской деформации). Волны предполагаются гармоническими с круговой частотой ω . Зависимость от времени кинематических и силовых характеристик поля задается множителем $\exp -i\omega t$, который опускается в последующих выкладках. Частота ω считается положительной вещественной величиной. Рассматривается симметричное и антисимметричное относительно плоскости $Y=0$ волновое поле. При построении решения безразмерные координаты вводятся соотношениями $y=Y/H$, $z=Z/H$.

Рассматриваются два случая возбуждения поля в волноводе. В первом из них изучается про-

песс отражения приходящей из бесконечности нормальной волны $\mathbf{u}^{(0)}(y, z)$ от свободного от напряжений торца волновода. Для нахождения характеристик отраженных волн $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$ необходимо решить следующую граничную задачу для уравнений движения Ламе [9]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= 0, \quad z=0, \quad |y| \leq 1, \\ \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0, \quad z=0, \quad |y| \leq 1, \\ \sigma_{yy}^{(1)}(\pm 1, z) + \tau_{yz}^{(1)}(\pm 1, z) &= 0, \quad y = \pm 1, \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

При рассмотрении второго случая – вынужденных колебаний – ограничимся заданием только нормальной нагрузки на торце. Для определения характеристик генерируемого волнового поля $\mathbf{u}^{(1)}(y, z)$ следует решить задачу с граничными условиями

$$\frac{\sigma_{zz}^{(1)}}{2\mu} = f(y), \quad \frac{\tau_{zz}^{(1)}}{2\mu} = 0. \quad (2)$$

В обоих случаях поверхности $y = \pm 1$ считаются свободными от напряжений. Частные решения применяемых здесь уравнений движения Ламе, по форме соответствующие бегущим в направлении оси Oz волнам в выбранной системе координат, хорошо известны [9]. При выборе необходимых комбинаций таких решений для удовлетворения граничных условий следует принимать во внимание условия излучения. Поскольку рассматриваемый диапазон частот не включает частоту запертия второй нормальной волны, знак фазовой скорости в используемых частных решениях однозначно определен. Компоненты вектора смещений в падающей из бесконечности волне представляются в виде

$$\begin{aligned} u_z(y, z) &= -i\xi_j \left(\alpha_1^2 \alpha_2 \frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \alpha_1 \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}, \\ u_y(y, z) &= \alpha_1^2 \left(\xi^2 \frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} - \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} \right) e^{-i\xi z}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ξ – волновое число. Приведенные выражения тождественно удовлетворяют уравнениям движения упругого тела, если параметры α_j связаны с волновым числом и частотой следующими соотно-

шениями:

$$\alpha_j = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| < \Omega_j. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь введены безразмерные частоты $\Omega_1 = \omega H / c_l$ и $\Omega_2 = \omega H / c_s$, привязанные к скоростям продольной c_l и поперечной c_s волн.

Для того, чтобы соответствующие выражениям (3) компоненты тензора напряжений σ_{zz} и τ_{yz} обращались в нуль на свободных поверхностях $y = \pm 1$, при заданном значении частоты постоянная распространения ξ должна определяться из дисперсионного уравнения

$$\Delta(\xi) = \left(2\xi^2 - \Omega_2 \right)^2 \alpha_1 \text{cth } \alpha_1 - 4\xi^2 \alpha_1^2 \alpha_2 \text{cth } \alpha_2 = 0. \quad (5)$$

Оно хорошо изучено и при фиксированном значении частоты имеет конечное число вещественных и чисто мнимых корней, а также бесконечное число комплексных корней [9]. Решения уравнений движения для вещественных корней определяют систему распространяющихся волн в слое. Решения для мнимых и комплексных корней характеризуются существенной изменчивостью соответствующих полевых компонент по координате z и используются лишь для удовлетворения граничных условий вблизи торцевых поверхностей. Численные процедуры определения значений корней также хорошо отработаны. Отметим, что в рассматриваемом диапазоне частот уравнение (5) имеет один вещественный корень и ни одного мнимого. Это обстоятельство будет учтено нами при построении общих решений граничной задачи.

Проведенный анализ дает возможность записать общее представление для вектора смещений, позволяющее выполнить граничные условия для рассмотренных двух вариантов постановки задачи. В случае возбуждения волнового поля в слое приходящей из бесконечности нормальной волной получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(y, z) &= A_0 \mathbf{u}(\xi_1, y) e^{-i\xi_1 z} + A_1 \mathbf{u}(\xi_1, y) e^{i\xi_1 z} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left(A_k \mathbf{u}(\xi_k, y) e^{i\xi_k z} + B_k \mathbf{u}(\xi_k^*, y) e^{-i\xi_k^* z} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где A_0 – заданная амплитуда падающей волны. Неизвестные постоянные A_k и B_k должны определяться из однородных граничных условий. Амплитудные функции, зависящие от толщинной координаты y , определяются в соответствии с выражениями (3). Для выбранной системы координат при

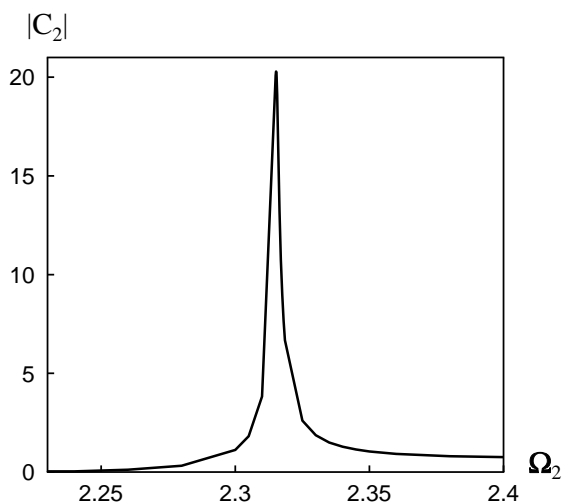


Рис. 1. Частотные зависимости модуля амплитуды первой неоднородной волны $C_j/C^{(0)}$ для $\nu=0.3$

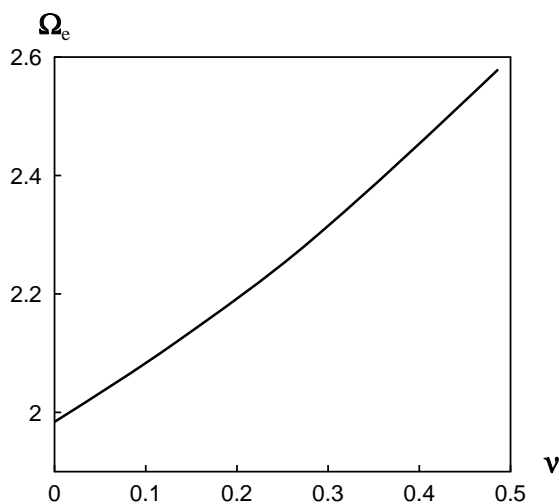


Рис. 2. Зависимость частоты краевого резонанса от величины коэффициента Пуассона

проведении вычислений следует использовать корни дисперсионного уравнения (5) с положительной мнимой частью.

При рассмотрении задачи о вынужденных колебаниях в выражении (6) следует опустить слагаемое с A_0 , а неизвестные коэффициенты A_k и B_k определять из неоднородных граничных условий (2).

В настоящее время сформировался ряд подходов и методов, используемых для решения поставленной граничной задачи. Среди них можно выделить как прямые численные схемы, так

и численно-аналитические методы. К последним относятся метод однородных решений, который использовался в работах [4, 8, 12] и метод суперпозиции, применявшийся в работах [9, 14]. В рамках данного исследования мы не будем останавливаться на детальном описании подходов к решению граничной задачи. Отметим лишь, что реализация обоих численно-аналитических методов в конечном итоге приводит к бесконечным алгебраическим системам. При этом в рамках метода однородных решений бесконечная система решается методом простой редукции. Метод же суперпозиции позволяет использовать улучшенную сходимость посредством учета асимптотических свойств неизвестных. Решение граничной задачи, полученное в рамках метода суперпозиции, может быть представлено через комплексные амплитуды C_k , D_k нормальных волн. Отметим, что оба метода дают практически одинаковые значения для величин комплексных амплитуд и близкую точность выполнения граничных условий.

2. ВОЗБУЖДЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ ТОРЦА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ

Дальнейший анализ основан на результатах численного решения граничной задачи для различных значений частоты и коэффициента Пуассона. Прежде всего, остановимся на количественном описании некоторых особенностей явления локализации движения вблизи торца полубесконечного слоя.

Хорошо известно [9], что форма колебаний на частоте краевого резонанса в основном определяется первой неоднородной волной. Неоднородные волны высших порядков здесь также имеют максимум, однако уровень их возбуждения значительно падает с увеличением порядка. Исходя из этого, количественные результаты будут приведены только для первой неоднородной волны.

Вначале рассмотрим отражение первой распространяющейся моды от свободного торца. На рис. 1 представлены частотные зависимости модуля амплитуды первой неоднородной волны, нормированной на амплитуду падающей волны ($C_j/C^{(0)}$), для коэффициента Пуассона $\nu=0.3$. На частоте $\Omega_2=2.3152$ наблюдается максимум, причем модуль амплитуды первой неоднородной волны превышает амплитуду распространяющейся волны более, чем в 20 раз. Амплитуды мод с комплексными волновыми числами высших порядков здесь также имеют максимумы, однако они существенно меньше амплитуды распространяющейся волны и убывают с увеличением номера моды. Не-

однородные волны всех порядков и первая распространяющаяся волна изменяют фазу при переходе через частоту $\Omega_2 = 2.3152$. Все перечисленные признаки говорят о существовании резонансной ситуации. Таким образом, для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$ наблюдается резонанс на неоднородных волнах на частоте $\Omega_2 = 2.3152$. Указанные нами особенности его проявления хорошо известны и описаны многими авторами.

Хотелось бы добавить, что приведенные на рис. 1 данные получены при условии, что амплитуда падающей волны постоянна. В то же время, в отличие от обычных резонансных ситуаций в теории колебаний, краевой резонанс реализуется на собственных формах, которые существенно зависят от частоты и коэффициента Пуассона. Эту особенность необходимо учитывать при сравнении эффективности проявления краевого резонанса при разных значениях ν и способах нагружения.

В частотном диапазоне, где наблюдается краевой резонанс при симметричных колебаниях полуслоя, существует только одна распространяющаяся мода. Средний за период поток мощности, переносимый этой волной, определяется следующим образом:

$$W = \omega \mu |C_1|^2 \Omega_2^2 (\xi^2 - \Omega_1^2) \frac{\Delta'}{2}.$$

Для реализации требования равенства энергии, вносимой в полуслой на разных частотах, необходимо изменять амплитуду падающей волны таким образом, чтобы удерживать $W/(\omega \mu) = \text{const}$. В частности, на частоте краевого резонанса для $\nu = 0.3$ получаем $W = \omega \mu 17.99$, т. е. для постоянства энергии амплитуда падающей волны на резонансной частоте должна быть уменьшена в $\sqrt{17.99}$ раз, что приведет к пропорциональному уменьшению амплитуд неоднородных волн.

Рассмотрим влияние коэффициента Пуассона на особенности проявления краевого резонанса при симметричных колебаниях полуслоя. Известно, что частота краевого резонанса с ростом ν увеличивается [14, 16, 20]. Эту тенденцию иллюстрирует рис. 2.

При изменении коэффициента Пуассона изменяется и эффективность возбуждения краевой моды. На рис. 3 представлены частотные зависимости модуля амплитуды первой неоднородной волны для различных значений ν . На рис. 3, а кривая 1 соответствует коэффициенту Пуассона $\nu = 0.25$, при этом максимальное значение амплитуды на частоте краевого резонанса достигает значения 56 (на рисунке кривая урезана), кривая 2 –

$\nu = 0.35$, кривая 3 – $\nu = 0.4$. Как видно из графиков, с возрастанием коэффициента Пуассона наблюдается снижение уровня возбуждения неоднородных волн. При этом полоса частот, в которой происходит эффективное их возбуждение, расширяется. Увеличение степени возбуждения неоднородных волн с уменьшением ν отмечалось в работе [15] (для конкретных его значений), а также в [16] (в диапазоне $\nu > 0.2$). Конечно же, нельзя ожидать монотонного увеличения амплитуды неоднородных волн с уменьшением коэффициента Пуассона. При отражении первой распространяющейся волны от свободного торца существуют такие его величины, при которых неоднородные волны не возбуждаются, т. е. их амплитуды равны нулю. Для рассматриваемого типа нагружения на частоте краевого резонанса амплитуды неоднородных волн равны нулю для $\nu = 0$. Кроме того, неоднородные волны не возбуждаются на частоте моды Ламе ($\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$).

Как видно из рис. 2, при определенном значении коэффициента Пуассона ($\nu \approx 0.224$) частота краевого резонанса может совпасть с частотой моды Ламе. Для данного ν при отражении первой распространяющейся моды от свободного торца в отраженном поле неоднородные волны не возбуждаются. Рассмотрим более подробно эффективность возбуждения неоднородных волн вблизи этого значения коэффициента Пуассона (см. рис. 3, б). Кривая 1 соответствует $\nu = 0.225$ (для него на частоте краевого резонанса максимальное значение амплитуды достигает 4472), а кривая 2 – $\nu = 0.223$. При приближении коэффициента Пуассона справа и слева к $\nu \approx 0.224$ (кривая 3, частота краевого резонанса приближается к частоте моды Ламе) амплитуда первой неоднородной волны увеличивается и добротность резонанса возрастает.

Проанализируем более подробно волновой процесс в полуслое на частоте моды Ламе. Смещения первой распространяющейся волны на ее частоте $\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$ имеют вид

$$u_z = i \frac{\pi^4}{16} \frac{\nu}{1-\nu} \cos \frac{\pi y}{2},$$

$$u_y = \frac{\pi^4}{16} \frac{\nu}{1-\nu} \sin \frac{\pi y}{2},$$

а напряжения, соответствующие моде Ламе –

$$\sigma_{zz}^L = -\frac{\pi^5}{32} \frac{\nu}{1-\nu} \cos \frac{\pi y}{2} = D \cos \frac{\pi y}{2},$$

$$\tau_{zy}^L = 0.$$

Важным свойством моды Ламе является ее ортогональность по напряжениям модам с компле-

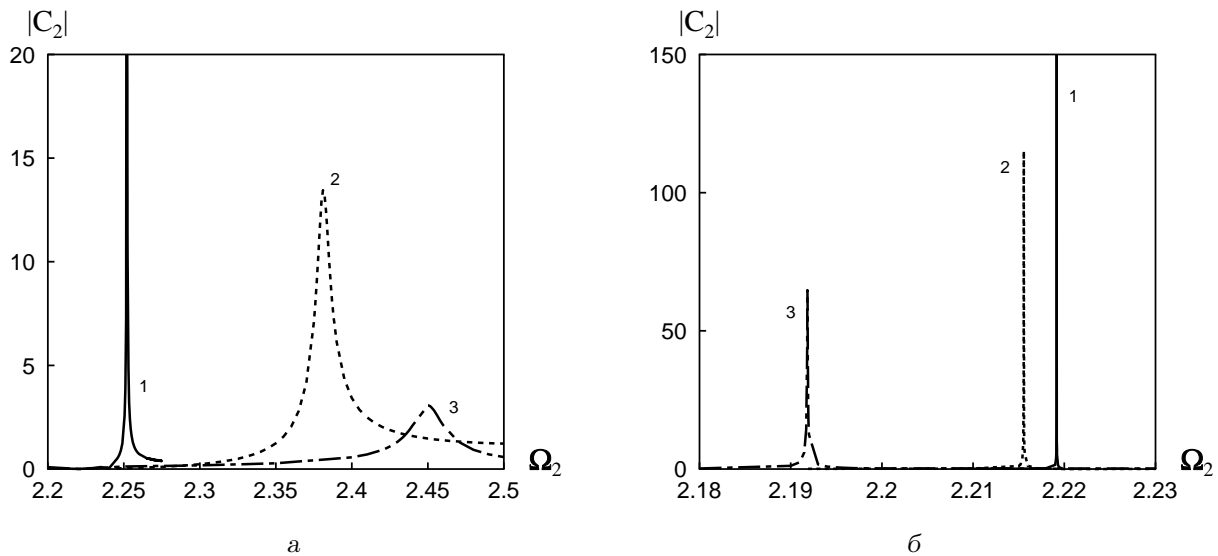


Рис. 3. Частотные зависимости модуля амплитуды первой неоднородной волны для различных коэффициентов Пуассона:
 а - $\nu \geq 0.25$ б - $0.223 \leq \nu < 0.225$

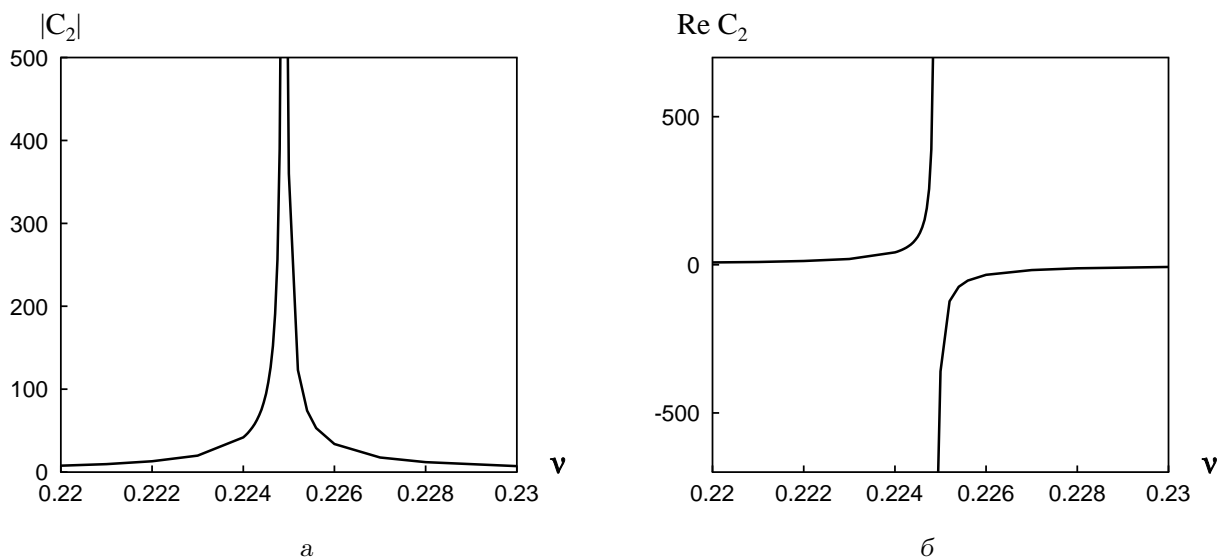


Рис. 4. Зависимость амплитуды первой неоднородной волны от коэффициента Пуассона на частоте $\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$:
 а - модуль; б - действительная часть

ксными волновыми числами [19]. Для любого $j \geq 2$, соответствующего комплексному волновому числу дисперсионного уравнения (5), на частоте ($\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$) выполняется равенство

$$\int_{-1}^1 [\sigma_{zz}^L(y)\sigma_{zz}^j(y) + \tau_{zy}^L(y)\tau_{yz}^j(y)] dy = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^j(y) &= -\alpha_1^2 \alpha_2 \xi^2 \frac{\text{ch } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} + \\ &\quad + \alpha_1 \frac{(\xi^2 + \alpha_2^2)(\xi^2 + \Omega_0^2)}{2} \frac{\text{ch } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1}; \\ \tau_{zy}^j(y) &= -i \xi \alpha_1^2 \frac{\xi^2 + \alpha_2^2}{2} \left(\frac{\text{sh } \alpha_2 y}{\text{sh } \alpha_2} - \frac{\text{sh } \alpha_1 y}{\text{sh } \alpha_1} \right). \end{aligned}$$

Для анализа степени возбуждения неоднородных волн на частоте $\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$ рассмотрим вынужденные колебания полуслоя. При этом зададим на торце такую нагрузку, которая ортогональна моде Ламе, в частности,

$$f(y) = 2\mu \cos \pi y.$$

В этом случае первая распространяющаяся мода не возбуждается, а амплитуды неоднородных волн могут быть найдены при решении граничной задачи с условиями (2) при отбрасывании в отраженном поле первой распространяющейся моды.

На рис. 4 представлена зависимость амплитуды первой неоднородной волны от коэффициента Пуассона на частоте $\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$. Это – типичная резонансная ситуация. Для коэффициента Пуассона $\nu = 0.224896$ модуль амплитуды первой неоднородной волны резко возрастает, а действительная часть амплитуды изменяет знак. Полученные данные позволяют говорить, что для $\nu \approx 0.2249$, как и в случае $\nu = 0$, можно получить действительный резонанс на неоднородных волнах при соответствующем выборе нагрузки на торце.

3. АНАЛИЗ КИНЕМАТИКИ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Чтобы дать физическую интерпретацию явлению локализации смещений на торце, а также зависимости резонансной частоты и добротности от коэффициента Пуассона, рассмотрим особенности формирования распространяющихся волн вблизи резонансной частоты. Для этого проанализируем выражение для вектора перемещений (3). В общем случае в упругом теле произвольной формы волновое движение, независимо от способа возбуждения, может быть представлено суммой продольных и поперечных волн. В выражении для перемещения первое слагаемое определяет вклад поперечных (SV) волн в волновое движение в нормальной волне, в второе – вклад продольных (P) волн. На частотах ниже частоты записания для второй распространяющейся волны первая нормальная мода образована бегущей SV-компонентой (α_1 – мнимая величина) и неоднородной, распространяющейся вдоль границ ($y = \pm 1$), P-компонентой (α_2 – действительная величина). Отметим, что вдали от границы именно таким и должно быть отраженное поле, так как оно представляется единственной распространяющейся волной. Если возбуждение происходит на первой нормальной моде, падающая волна имеет аналогичную структуру.

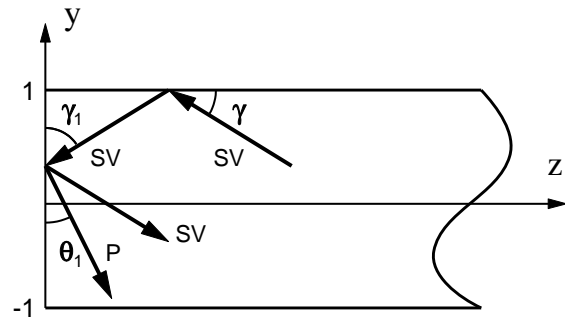


Рис. 5. Схема отражения SV-волны от свободной границы упругого полуслоя

Для анализа формирования волнового поля вблизи торца полуслоя проанализируем процесс отражения SV-компоненты в падающей волне. Для этого оказывается полезной информация об отражении SV-волны от свободной границы упругого полупространства. Хорошо известно, что, отражаясь от границы, SV-волна порождает как SV-, так и P-волны. Структура отраженных волн показана на рис. 5. Здесь угол будет функцией частоты:

$$\cos \theta_1 = \frac{c_l}{c_s} \sin \sqrt{\frac{\Omega_2^2 - \xi^2}{\Omega_2}}.$$

Отраженная SV-волна всегда является распространяющейся, а P-волна может быть как распространяющейся, так и неоднородной, в зависимости от угла падения (частоты). Кроме того, амплитуды отраженных P- и SV-волн Φ и Ψ зависят от угла падения (частоты) и могут быть вычислены следующим образом:

$$\Phi = \frac{4s(s^2 - 1)}{4sr + (s^2 - 1)^2}, \quad \Psi = \frac{4sr - (s^2 - 1)^2}{4sr + (s^2 - 1)^2},$$

$$s = \operatorname{tg} \gamma_1, \quad r = \operatorname{tg} \theta.$$

На рис. 6 представлено поведение амплитуд отраженных SV- (кривая 1) и P-волн (кривая 2) при изменении частоты (угла падения) для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$. На графике можно выделить две характерные частоты. Первая из них – $\Omega_2 = \pi/\sqrt{2}$, при которой полностью сохраняется тип движения. Она соответствует углу падения 45° , при котором в отраженном поле P-волна отсутствует. При волноводном распространении для $\nu = 0.3$ эта частота соответствует моде Ламе и на ней по высоте волновода укладывается целое число SV-полуволн. Вторая характерная частота – это критическая частота для P-волны, на-

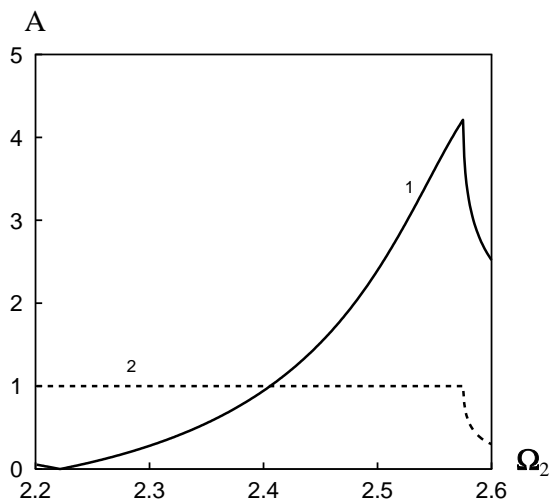


Рис. 6. Зависимости амплитуд отраженных SV- и P-волн от изменения частоты (угла падения) для коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$

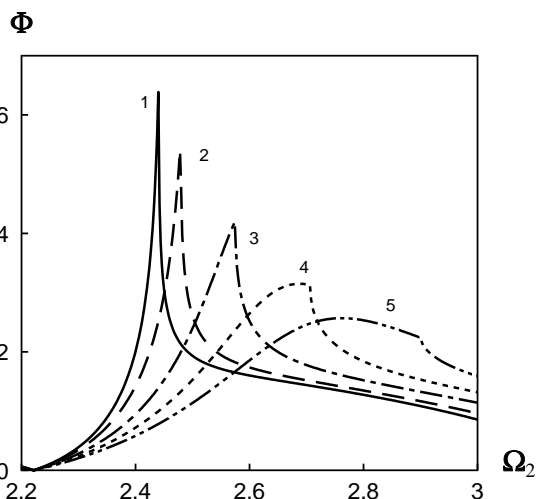


Рис. 7. Амплитуды отраженной P-волны при падении SV-волны на свободную границу упругого полупространства для разных значений коэффициента Пуассона

чиная с которой продольная волна становится распространяющейся. Наблюдается ярко выраженный резонансный характер поведения амплитуды отраженной P-волны. Частота, на которой наблюдается максимум ее амплитуды для $\nu = 0.3$, несколько выше частоты краевого резонанса при симметричных колебаниях полуслоя со свободным торцом. При этом следует учитывать, что на частоте краевого резонанса в слое первая распространяющаяся мода образована суперпозицией ра-

спространяющейся SV-волны и неоднородной P-волны. Поэтому, не рассматривая отражение неоднородной P-волны от свободного торца, невозможно точно найти частоту краевого резонанса.

Приведенные рассуждения могут только качественно объяснить эффект локализации движения на торце полуслоя. Ситуация выглядит следующим образом. Вдали от торца на частоте краевого резонанса существует только одна распространяющаяся нормальная волна, в которой для каждой частоты имеется определенное соотношение между продольными и поперечными движениями. Однако при отражении от торца это соотношение нарушается, поскольку наблюдается сильная частотная зависимость амплитуд отраженных SV- и P-компонент. На определенных частотах полностью SV-волна или P-волна исчезает. Чтобы сохранить требуемое соотношение между продольными и поперечными движениями в дальнем поле вблизи указанных частот около торца необходимо интенсивно возбудить неоднородные волны. Именно за счет их возбуждения и удается “перестроить” колебательные движения вблизи торца в требуемые соотношения продольных и поперечных колебания в нормальной волне в дальнем поле.

Еще одним подтверждением приведенного качественного анализа могут служить данные рис. 7, на котором представлены амплитуды отраженной P-волны при падении SV-волны на свободную границу упругого полупространства для разных значений коэффициента Пуассона. Кривые 1–5 соответствуют $\nu = 0.225, 0.25, 0.3, 0.35$ и 0.4 . Рассматриваемый график хорошо согласуется зависимостями, изображенными на рис. 3 – при увеличении коэффициента Пуассона на них наблюдается рост резонансной частоты и уменьшение добротности колебательной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Явление краевого резонанса в упругих телах иллюстрирует фундаментальные особенности процесса распространения упругих волн в телах конечных размеров. В этой работе представлены данные, позволяющие углубить представления о механизме формирования волновых движений, определяемых как краевой резонанс. Важная особенность полученных результатов состоит в том, что причину возникновения такого сложного волнового движения удалось качественно объяснить, основываясь на свойствах отражения плоских упругих волн от свободной границы упругого тела.

Характеристики формы колебаний, соответствующих краевому резонансу, и добротность ко-

лебаний существенно зависят от коэффициента Пуассона упругого материала. Такая зависимость отражает влияние коэффициента Пуассона на степень преобразования сдвиговых движений в продольные при отражении упругих волн от свободной границы. Нами показано, что эффективность проявления краевого резонанса и соответствующая собственная частота Ω_e также существенно зависят от коэффициента Пуассона. При изменении его величины от 0 до 0.5 частота краевого резонанса растет. Степень возбуждения первой неоднородной волны падает при увеличении ν от 0.2249 до 0.5.

Установленные количественные зависимости удается во многом качественно объяснить несколькими причинами. Прежде всего, существенно, что низшая нормальная волна в волноводе формируется суперпозицией бегущей сдвиговой волны и неоднородной продольной. При этом сдвиговые компоненты будут определяющими в области частот, близких к частоте краевого резонанса. Поскольку в упругих телах при отражении волн от границы сильно выражено преобразование одного типа движения в другой, то важным фактором для возникновения краевого резонанса становится рассогласованность типов движения вблизи торца полуслоя и в дальнем поле.

1. *Shaw E. A. G.* On the resonant vibration of thin barium titanate disks // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1956.– **20**, № 1.– P. 38–50.
2. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1957.– **29**, № 2.– P. 189–194.
3. *Onoe M.* Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1961.– **33**, № 11.– P. 1627.
4. *Gazis D. C., Mindlin R. D.* Extensional vibration and waves in a circular disk and semi-infinite plate // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1960.– **27**, № 3.– P. 541–547.
5. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1972.– **51**, Pt 2, № 1.– P. 265–283.
6. *Ikegami S., Ueda I., Kobayashi S.* Frequency spectra of resonant vibration in disk plates of PbTiO_3 piezoelectric ceramics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1974.– **55**, № 2.– P. 339–344.
7. *Мелешко В. В.* О возможностях теории “второго порядка” при изучении высокочастотного спектра упругих дисков // Докл. АН УССР, Сер. А.– 1978.– № 7.– С. 621–625.
8. *Auld B. A., Tsao E. J.* A variational analysis of edge resonance in semi-infinite plate // *IEEE Trans. SU.*– 1977.– **24**, № 5.– P. 317–326.
9. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
10. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. мех.– 1980.– **16**, № 2.– С. 58–63.
11. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V.* Free localized vibration of semi-infinite cylindrical shell // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2000.– **107**, № 3.– P. 1383–1393.
12. *Torvic P. J.* Reflection of wave trains in semiinfinite plates // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1967.– **41**, № 2.– P. 346–353.
13. *Roitberg J., Vassiliev D., Wilde M. V.* Edge resonance in an elastic semi-strip // *Q. J. Mech. Appl. Math.*– 1998.– **51**.– P. 1–13.
14. *Городецкая Н. С.* Еще раз о краевом резонансе // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 4.– С. 35–44.
15. *Гринченко В.Т., Городецкая Н. С.* Анализ физических особенностей явления краевого резонанса в упругих телах // Акуст. вісн.– 2004.– **7**, № 1.– С. 30–43.
16. *Le Clezio E., Predoi M. V., Castaings M., Hoster B., Rousseau M.* Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode // *Ultrasonics.*– 2003.– **41**.– P. 25–40.
17. *Cho Y. H., Rose J. L.* A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1996.– **99**, № 4.– P. 2097–2109.
18. *Гомилко А. М., Городецкая Н. С., Мелешко В. В.* Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое // Прикл. мех.– 1991.– **27**, № 6.– С. 53–59.
19. *Zernov V., Pichugin A. V., Kaplunov J.* Eigenvalue of semi-infinite elastic strip // *Proc. Roy. Soc. Lond.*– 2006.– **A462**.– P. 1255–1270.
20. *Pagneux V.* Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2006.– **120**, № 2.– P. 649–656.
21. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея–Лэмба на границе раздела двух состыкованных упругих полуполос разной ширины // Акуст. вісн.– 2000.– **3**, № 3.– С. 32–43.