УДК 621.384

Применение конформного отображения для моделирования плоских полей, создаваемых гладкими полюсами

А.О.Мыцыков

ИФВЭЯФ ННЦ ХФТИ, г. Харьков

ВВЕДЕНИЕ

Обычным способом достижения требуемых параметров современных установок [1,2] стало применение магнитов со сложным мультипольным составом. Необходимость моделирования таких сложных полей (обусловленная требуемыми допустимыми отклонениями $\sim 10^{-4}$) порождает желание иметь выражение, связывающее поле с геометрическими характеристиками магнита, а именно с формой полюса. Ибо даже насыщение железа может быть скомпенсировано геометрическими предыскажениями профиля полюса [3].

Как известно, поле можно выразить как через комплексный $z(\omega)$–потенциал, так и через обратную комплексному потенциалу функцию $\omega(z)$ ($\omega(z)$–отображение полосы $0<Im(z)<H$ на полюс [4]):

$$B = -i\overline{(dz/d\omega)} = -i\overline{(d\omega/dz)^{-1}} . \quad (1)$$

Получению отображения "полоса-полюс" и посвящено дальнейшее изложение.

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛОСЫ В ПОЛОСУ

Пусть в каждой точке t берегов полосы известен угол наклона $v=v(t)$ касательной к L в точке ω, соответствующей t (рис.1).

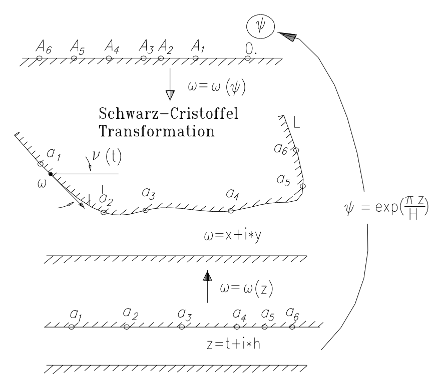

Рис. 1. *Отображение полосы $0<Im(z)<H$ на полосу с произвольными границами с промежуточным отображением на полуплоскость и без такового.*

Пусть также $dz=dt$ и $d\omega=|d\omega|\exp[iv(t)]$ — элементы берега полосы и контура L, соответствующие друг другу при рассматриваемом конформном отображении, тогда

$$d\omega/dz = \exp[iv(t)]\,|d\omega|/dt . \quad (2)$$

Заметим, что

$$-i\ln[d\omega/dz] = v(t) - i\ln[|d\omega|/dt] = g(z) , \quad (3)$$

где $g(z)$ — функция, реальная часть которой на берегах полосы принимает значения $\nu(t)$. Очевидно, что искомое отображение имеет вид:

$$\omega(z) = C\int_{z_0}^{z} \exp[ig(z)]dz + C_0 , \quad (4)$$

где C, C_0 — константы интегрирования.

Положим, что $\omega(0)=0$, и, значит, $C_0=0$. Для ω(z) важно соотношение реальной и мнимой частей. Поэтому положим $C=1$. Функция $g(z)$ в силу вышеуказанного свойства (3) восстанавливается интегралом Шварца для полосы. Для отображения круга на произвольную односвязную область формула вида (4) известна как формула Чизотти [4].

Интеграл Шварца для полосы

Интеграл Шварца для круга $|\zeta|<1$ имеет вид

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V(\exp(i\tau))\frac{\exp(i\tau)+\zeta}{\exp(i\tau)-\zeta}d\tau , \quad (5)$$

где τ — угловая координата плоскости ζ, содержащей круг $|\zeta|<1$. Рассмотрим конформное отображение полосы $0<\mathrm{Im}(z)<H$ плоскости $z=t+ih$ на круг $|\zeta|<1$ плоскости $\zeta=r\cdot exp(i\tau)$,

$$\zeta(z) = \mathrm{th}(\pi(2z-iH)/4H) , \quad (6)$$

переводящее нижний и верхний берега полосы в нижнюю и верхнюю полуокружности соответственно, и обозначим $G[\zeta(z)]=g(z)$, $V[\exp(i\tau)]=v(t)$. Выделив два интервала интегрирования $\tau\in[-\pi,0] \Rightarrow t\in[-\infty,\infty]$; $\tau\in[0,\pi] \Rightarrow t\in[\infty,-\infty]$ и произведя замену переменных, получим

$$g(z) = \frac{i}{2H}\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} v_0(t)\left[\mathrm{cth}\frac{\pi(t-z)}{2H} - \mathrm{th}\frac{\pi t}{H}\right]dt + \int_{-\infty}^{\infty} v_H(t)\left[\mathrm{th}\frac{\pi(t-z)}{2H} - \mathrm{th}\frac{\pi t}{H}\right]dt\right\} . \quad (7)$$

Первый интеграл отвечает за степени симметрии, второй — за форму полюса. Сохранение под интегралом слагаемого $\mathrm{th}(\pi t/H)$ (в [4] оно занесено в константы интегрирования) позволяет, подставив (7) в (4), получить аналитическое выражение для отображения "полоса-полоса". Формулы (4,7) позволяют описать практически все "геометрии Хальбаха" [5].

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ В ОПИСАНИИ МНОГОПОЛЮСНИКОВ С ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Функцию, описывающую поведение угла наклона профиля полюса $v_H(t)$, определим как

$$v_H(t) = \begin{cases} const = U_{-\infty}, & t \in [-\infty, a_1]; \\ q_j(t), \quad t \in [a_j, a_{j+1}], & j = 1 \cdots M-1; \\ const = U_{-\infty}, & t \in [a_1, \infty]; \end{cases} \qquad (8)$$

M - число точек на верхнем берегу полосы, между которыми $v_H(t)$ непрерывна. В случае мультипольной симметрии $v_0(t)$ определяется как

$$v_0(t) = \begin{cases} const = U_{mult,} & t \in [-\infty, 0] \\ const = 0, & t \in [0, \infty] \end{cases}. \qquad (9)$$

Для квадрупольной симметрии U_{mult}=-π/2; для секступольной U_{mult}=-π2/3; и т.д. Подставляя эти выражения в (4,7) и приняв для лаконичности

$$P(t,z) = \mathrm{ch}(\pi(t-z)/2H) \cdot [\mathrm{ch}(\pi t/H)]^{-0.5},$$

получим отображение полосы $0<\mathrm{Im}(z)<H$ на полосу области w (см. рис.1):

$$\omega(z) = 2^{(U_{-\infty} - U_{\infty})/2\pi} \int_{z_0}^{z} \left\{ \exp\left(z \frac{U_{-\infty} + U_{-\infty}}{2H} \right) \right.$$

$$\prod_{j=1}^{M} \left[P(a_{j+1}, z) \right]^{\frac{\Delta U_j}{\pi}} \prod_{j=1}^{M-1} \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_{a_j}^{a_{j+1}} \frac{dq_j(t)}{dt} \ln[P(t,z)] dt \right)$$

$$\left. \left[[1 - \exp(-\pi z/H)] / \sqrt{2} \right]^{U_{mult}/\pi} \right\} dz. \qquad (10)$$

Здесь $\Delta U_j = q_j(a_j) - q_{j-1}(a_j)$ – угол излома в a_j-й вершине. В случае если $v_H(t)$ постоянна на каждом из интервалов $[a_j, a_{j+1}]$, и, следовательно, $dq_j(t)/dt = 0$, полученное отображение с точностью до констант интегрирования совпадает с результатом, который получается с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца.

ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ УЧАСТКОВ ПРОФИЛЯ ПОЛЮСА НА ПОЛЕ

Формально (10) можно представить как произведение сомножителей, каждый из которых отвечает за вклад в поле от определенного участка профиля полюса. Тогда каждый из сомножителей можно рассматривать как функцию, порождающую свое конформное отображение, переводящее прямолинейную полосу в полосу с выброшенной луночкой (для серединных частей профиля) или в полосу с отогнутым краем (для граничных участков профиля). Действительно, интеграл Шварца для таких полос совпадает с множителем, отвечающим за тот или иной участок профиля полюса. Значит–*поле, в координатах плоскости, содержащей прямолинейную полосу, равно произведению полей от элементарных конформных отображений, определяемых параметрами участков исходного профиля .*

Рис. 2 иллюстрирует вклад участков профиля полюса диполя. Профиль образуется заданием угла наклона образующей полюса между 6-ю точками.

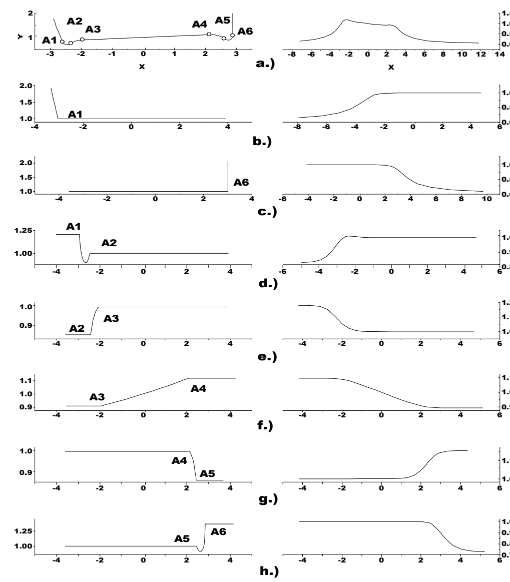

Рис. 2. *Влияние участков профиля полюса на поле. Слева участки профиля полюса. Справа поля, соответствующие этим участкам профиля полюса*

Возможность учесть влияние отдельных участков профиля полюса открывает дорогу к эффективному решению задачи реконструкции полюса по требуемому полю.

Литература

1. E.V.Bulyak et. al. IEEE Transactions on Magnetics, Vol.30, No.4, July 1994, p.2643–2645.
2. M.Barthes-Corlier, at al J.P. IEEE Transactions on Magnetics, Vol.30, NO.4, July 1994, p.2451–2454.
3. E.Bulyak, I.Karnaukhov and A.Mytsykov, IEEE Transaction on magnetics, Vol.30, NO.4, July 1994 p.2689–2691.
4. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функции компл. переменного М.:Наука, 1973 .
5. The Art and Science of Magnet Design. Selected Notes of Klaus Halbach LBL, 1995, vol.2.

Статья поступила: в редакцию 25 мая 1998 г.,
в издательство 1 июня 1998 г.