

А. С. Костинский

Очаг землетрясения как возбудимая среда: оценка простейшей оптимальной модели с точки зрения сопутствующих дифференцируемых отображений

(Представлено академиком НАН Украины В. И. Старостенко)

У межах підходу до описання осередку землетрусу з позицій механіки збудливих середовищ досліджується обмежена у часі функція стрибка зміщення як результат схеми оптимального конструювання. Для відповідної “квазідинамічної” моделі побудована система нелінійних функціональних рівнянь відносно параметрів. Описується визначуване системою відображення “стандартної” двовимірної області простору параметрів, яке характеризує модель.

В пространстве “квазидинамических” моделей очага [1–3] наблюдаемый вектор смещения описывается как порождаемый скачком смещения на внутренней поверхности Σ :

$$U_i(\vec{r}, t) = \frac{\gamma_i \gamma_p \gamma_q \nu_k}{4\pi \rho \alpha^3} \iint_{\Sigma} \frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \left[U_j \left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi} - \vec{r}|}{\alpha} \right) \right] d\Sigma(\xi) + \\ + \frac{(\delta_{ip} - \gamma_i \gamma_p) \gamma_q \nu_k}{4\pi \rho \beta^3} \iint_{\Sigma} \frac{c_{jkpq}}{|\vec{\xi} - \vec{r}|} \frac{\partial}{\partial t} \left[U_j \left(\vec{\xi}, t - \frac{|\vec{\xi} - \vec{r}|}{\beta} \right) \right] d\Sigma(\xi), \quad (1)$$

и поскольку размеры площадки малы можно полагать, что

$$\iint_{\Sigma} (\dots) \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{U}(\dots)] d\Sigma = \iint_{\Sigma} (\dots) \left(\overline{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{n}(t)} \cdot \|\mathbf{U}(\dots)\| + \overline{\mathbf{n}(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{U}(\dots)\| \right) d\Sigma,$$

где единичный вектор направления $\mathbf{n}(t)$ и его производная по времени вычисляются в некоторой средней точке площадки. Следовательно, характеристика системы при этих предположениях есть векторное поле

$$\vec{\Theta}(\vec{\xi}, t) = \overline{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{n}(t)} \cdot \|\mathbf{U}(\vec{\xi}, t)\| + \overline{\mathbf{n}(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \|\mathbf{U}(\vec{\xi}, t)\|, \quad \vec{\xi} \in \Sigma,$$

для логики традиционного кинематического конструирования это была отправная точка, а путь определялся уверенностью, что для $\vec{\Theta}(\dots)$ можно найти “земной” математический образ. Отсюда плоскость разрыва, распространяющаяся трещина сдвига и “нефизическое” решение самоподобной задачи [4]:

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{n}(t)} = 0, \quad \overline{\mathbf{n}(t)} = \overrightarrow{\text{const}}(t), \quad (2)$$

$$\overline{\mathbf{n}(t)} \vec{\Theta} \equiv \Delta U^s(\rho, t) = K v \sqrt{t^2 - \left(\frac{\rho}{v}\right)^2} H\left(t - \frac{\rho}{v}\right) \{1 - H(\rho - \rho_0)\}, \quad K = \text{const}, \quad (3)$$

бесконечно возрастающее со временем. Тупик хаотических попыток “усовершенствовать” зависимость (3) можно преодолеть, если некоторая физическая конструкция, определенная с максимальной степенью абстракции, займет место “бестелесного” скачка смещения на разрыве. Требуется, в общем, только способность тонкого слоя вещества генерировать и распространять возбуждение, т. е. состояние, дополнительное по отношению к основному состоянию. Это взгляд на явление как на эволюцию возбудимой среды [5], и, согласившись столь радикально изменить язык описания процесса в очаге, мы получаем дополнительные “степени свободы” конструирования, позволяющие оптимальным образом перейти от зависимости (3) к решению, физически более приемлемому, ограниченному во времени [6]:

$$\overline{\mathbf{n}(t)}\vec{\Theta} \equiv \Delta U^g(\rho, t) = K v T_c \arccos \left(\frac{ch \left(\frac{\rho}{v T_c} \right)}{ch \left(\frac{t}{T_c} \right)} \right) H \left(t - \frac{\rho}{v} \right) \{1 - H(\rho - \rho_0)\}, \quad (4)$$

$K = \text{const.}$

Как можно оценить очаговую модель? Сформулируем цель как задачу расчета (“восстановления”) параметров модели по данным на одной или группе станций. Это “координатное представление” модели, когда на первый план выходит дискретный набор ее параметров (“координат” в пространстве всевозможных способов описания). Оговоримся сразу, что будут рассматриваться только последовательно математические алгоритмы расчета, в основе которых — система уравнений относительно параметров. Чтобы замкнуть систему, необходим набор “наблюдаемых”, в данном случае это должны быть вещественные числа, сконструированные по сейсмограмме. Возможны разные “рецепты” функционалов “наблюдаемых”, один из них был предложен автором в работе [7], он очень прост и состоит в следующем:

Пусть для некоторой модели очага получено смещение в точке наблюдения как функция времени, зависящая от k параметров модели $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$. Пусть существуют и сходятся некоторые из интегралов по времени от этой функции с весовыми множителями $f(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, взятые по всей области определения (конечной или бесконечной). Не будем предполагать, что сходятся все такие интегралы; требуется только, чтобы число сходящихся интегралов достигло k . Если удастся вычислить в аналитическом виде k интегралов по времени от функции смещения (не обязательно соответствующих последовательным значениям $n = 0, 1, 2, \dots$), мы получаем k функций:

$$u_s = u_s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \quad s = 1, \dots, k, \quad (5)$$

каждая из которых зависит от k параметров модели. Для каждого набора числовых значений параметров интегралы — конкретные числа, поэтому искомая система получается, если заменить левые части функций (5) на текущие значения “наблюдаемых” $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$. Приравнявая значения, получаем систему уравнений

$$\zeta_s = u_s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k), \quad s = 1, \dots, k, \quad (6)$$

из которой в принципе можно найти числовые значения параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, соответствующих данному сейсмическому событию (очагу) и выбранной модели. Свойства системы (6) и порождаемого ею отображения множества параметров во множество “наблюдаемых”, в сущности, не имеют отношения к эксперименту и могут служить характеристикой модели [8].

Как эта общая схема будет выглядеть в данном конкретном случае? Подставим выражение (4) в формулу (1). Принимая предположения (2), получим, что форма импульса смещения в дальней зоне однородной изотропной среды описывается интегралом

$$\begin{aligned} \Omega_c(\vec{r}_S, t) &= 2Kv\rho_0^2 \frac{T_c}{\tau} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{t'}{\tau}\right)} \iint_{C_+} dx dy \arccos \left(\frac{ch \frac{\tau}{T_c} r}{ch \frac{\tau}{T_c} \left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma\right)} \right) H\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma - r\right) \equiv \\ &\equiv 2Kv\rho_0^2 \Lambda_c(\vec{r}_S, t), \end{aligned} \quad (7)$$

где x, y — безразмерные декартовы координаты; $r^2 = x^2 + y^2$, C_+ есть область, ограниченная верхней единичной полуокружностью и осью Ox . Разрыв зарождается в точке, соответствующей \vec{r}_0 , $t' = t - \tau_0$, $\tau_0 = |\vec{r}_S - \vec{r}_0|/c$ — время запаздывания системы; ρ_0 — радиус площадки, $\tau = \rho_0/v$, $\gamma = v/c \sin \vartheta$. Угол ϑ образован нормалью к площадке и направлением из центра площадки на точку наблюдения \vec{r}_S .

Из формулы (7) следует, что смещение в точке наблюдения (как для Р-, так и для S-волн) может быть представлено в виде

$$M \cdot \Lambda_c(\vec{r}_S, t), \quad M = \text{const}(t),$$

интегралы от смещения по времени с весовым множителем $(t')^n$ есть

$$s_n(M, T_c, \tau, \gamma) = M\tau^{n+1} \int_0^\infty \left(\frac{t'}{\tau}\right)^n \Lambda_c(\vec{r}_S, t) d\left(\frac{t'}{\tau}\right), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \left(\frac{t'}{\tau}\right)} \iint_{C_+} dx dy \arccos \left(\frac{ch \frac{\tau}{T_c} r}{ch \frac{\tau}{T_c} \left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma\right)} \right) \cdot H\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma - r\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \iint_{C_+} dx dy \delta\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma - r\right) - \frac{\partial}{\partial \left(\frac{t'}{\tau}\right)} \iint_{C_+} dx dy \arcsin(\dots) \cdot H\left(\frac{t'}{\tau} + x\gamma - r\right), \end{aligned}$$

$$s_0(M, T_c, \tau, \gamma) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 MT_c,$$

$$s_1(M, T_c, \tau, \gamma) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 MT_c \tau \cdot 2 \left\{ \frac{1}{3} + P_0\left(\frac{T_c}{\tau}\right) \right\},$$

$$s_2(M, T_c, \tau, \gamma) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 MT_c \tau^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\gamma^2\right) + 4P_1\left(\frac{T_c}{\tau}\right) \right\},$$

$$s_3(M, T_c, \tau, \gamma) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 MT_c \tau^3 \cdot \left\{ \frac{2}{5} + 6P_2\left(\frac{T_c}{\tau}\right) + 3\gamma^2 \left(\frac{1}{5} + Q\left(\frac{T_c}{\tau}\right)\right) \right\},$$

.....

$$P_j(x) \equiv \frac{2}{\pi} x^{3+j} \int_0^{1/x} r dr \int_r^\infty t^j \arcsin\left(\frac{chr}{cht}\right) dt, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

$$Q(x) \equiv \frac{2}{\pi} x^5 \int_0^{1/x} r^3 dr \int_r^\infty \arcsin\left(\frac{chr}{cht}\right) dt,$$

и, достаточно оборвать процесс на функции s_3 , чтобы образовать простейшую замкнутую систему относительно параметров $\xi_1 = T_c/\tau$, $\xi_2 = \gamma$, $\xi_3 = \tau$.

Аналитические выражения интегралов обозначены буквой s , чтобы подчеркнуть, что любой из них может соответствовать любой из упомянутых выше функций u .

Пусть численные значения интегралов (8), измеренные по записи, равны σ_n (упомянутое выше множество $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ образовано из элементов последовательности $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots$). Удобно с самого начала исключить M , записав

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_0} = \frac{s_n(M, T_c, \tau, \gamma)}{s_0(M, T_c, \tau, \gamma)}, \quad n = 1, 2, 3,$$

а затем, поскольку “трехмерный” якобиан

$$J^{(3)} = \frac{D\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \frac{\sigma_2}{\sigma_0}, \frac{\sigma_3}{\sigma_0}\right)}{D(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$$

пропорционален якобиану “двумерному”

$$J^{(2)} = \frac{D(\eta_1, \eta_2)}{D(\xi_1, \xi_2)}, \quad \eta_1 = \frac{\sigma_2 \sigma_0}{\sigma_1^2}, \quad \eta_2 = \frac{\sigma_3 \sigma_0^2}{\sigma_1^3},$$

$$J^{(3)} = 64\tau^5 \left(\frac{1}{3} + P_0\right)^6 J^{(2)},$$

и нулевые линии их совпадают, исследовать отображение

$$\xi_1, \xi_2 \rightarrow \eta_1, \eta_2, \tag{9}$$

$$\eta_1 = \frac{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \xi_2^2\right) + 4P_1(\xi_1)}{4 \left\{\frac{1}{3} + P_0(\xi_1)\right\}^2},$$

$$\eta_2 = \frac{\frac{2}{5} + 6P_2(\xi_1) + 3\xi_2^2 \left(\frac{1}{5} + Q(\xi_1)\right)}{8 \left\{\frac{1}{3} + P_0(\xi_1)\right\}^3},$$

соответствующее исключенному τ . Сразу можно показать с помощью простых вычислений, что якобианы $J^{(2)}$ и $J^{(3)}$ обращаются в нуль на оси $\gamma = 0$ и на кривой, задаваемой

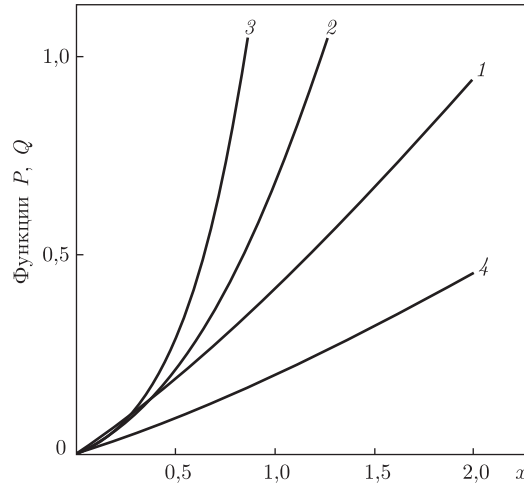


Рис. 1. Графики функций: 1 – $P_0(x)$; 2 – $P_1(x)$; 3 – $P_2(x)$; 4 – $Q(x)$

уравнением (' (штрих) означает производную по аргументу)

$$\gamma^2 = \Phi\left(\frac{T_c}{\tau}\right), \quad (10)$$

$$\Phi \equiv \frac{4\left(\frac{1}{5} + Q\right) \left\{ P_0'(1 + 8P_1) - 4P_1'\left(\frac{1}{3} + P_0\right) \right\} - 2P_0'\left(\frac{1}{5} + 3P_2\right) + 2P_2'\left(\frac{1}{3} + P_0\right)}{P_0'\left(\frac{1}{5} + Q\right) - \left(\frac{1}{3} + P_0\right)Q'}$$

Функции P_0 , P_1 , P_2 , Q монотонно возрастают (рис. 1). Числитель и знаменатель правой части выражения (9) малы, но положительны при нулевом значении аргумента: числитель возрастает, пройдя через положительный минимум, знаменатель монотонно убывает, оставаясь положительным при любых “разумных” значениях аргумента. Кривая особенности отображения $\Gamma_0: \gamma = \sqrt{\Phi(T_c/\tau)}$, следовательно, существует в положительном квадранте, ее начальная ордината равна $\sqrt{2/3} < 1$ (рис. 2).

Характеристические времена τ и T_c , по определению, — независимые параметры, все значения $0 < \tau < \infty$ и $0 < T_c < \infty$ считаются допустимыми. Основная область значений параметра γ по-прежнему есть интервал $(0, 1)$, хотя отказ от трактовки модели (4) как процесса, родственного сдвиговому разрыву, лишает надежды оценить сверху отношение v/c , $0 < v/c < \infty$. Разумно в качестве “стандартной” области S_ξ принять прямоугольник $ABCD$ не слишком больших размеров

$$S_\xi: 0 \leq \xi_1 \leq \left(\frac{T_c}{\tau}\right)_{\max}, \quad 0 \leq \xi_2 \leq \gamma_{\max},$$

его образ на плоскости декартовых координат η_1 , η_2 конструируется как наложение образов подобластей $ABCQP$ и PQD (рис. 3, а). Кривая нулевого якобиана Γ_0 отсекает часть $ABCD$, сильная вытянутость криволинейного треугольника $P'Q'D'$ мешает рассмотреть детали. Если перейти к новой системе координат η'_1 , η'_2 , связанной с η_1 , η_2 преобразованием переноса и поворота, то геометрия образа искажается, но граф отрезков пересечения кривых и взаимная конфигурация областей сохраняются, и становится хорошо видимой

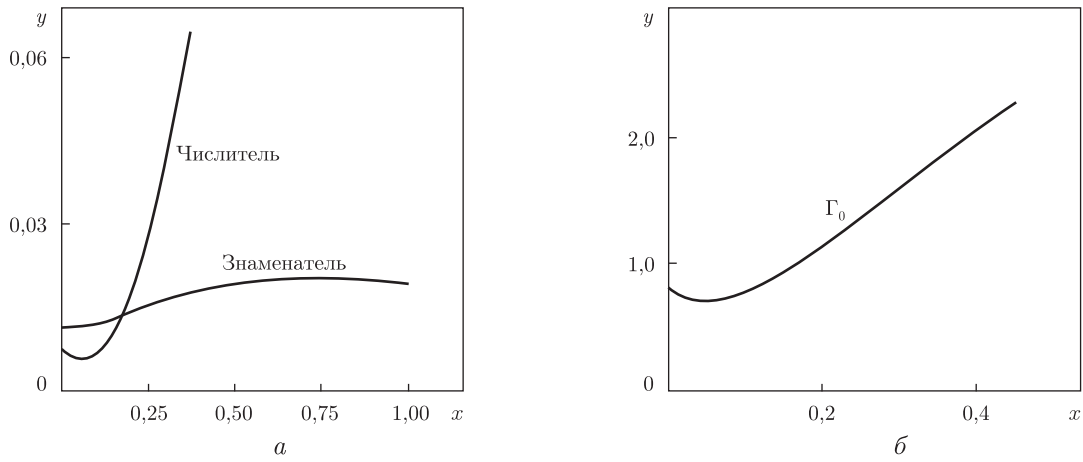


Рис. 2. Линия нулевого якобиана отображения (9): а — числитель и знаменатель функции Φ ; б — кривая Γ_0

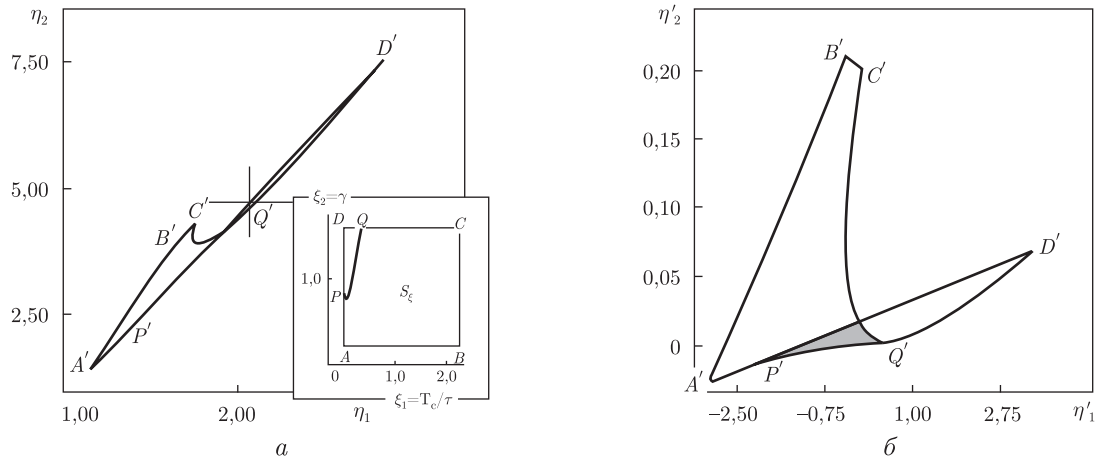


Рис. 3. “Карта отображений” модели (4): а — “стандартная” область S_ξ (на врезке); б — затенена область “двойного листа”.

Соответствие точек устанавливается с помощью тех же букв, но со штрихом; перекрестие означает начало новой системы координат η'_1, η'_2

область “двойного листа” (см. рис. 3, б). Особенности отображения не существует вообще, а параметры $T_c/\tau, \gamma$ восстанавливаются единственным образом для $\gamma_{\max} < \sqrt{2/3}$ и каких угодно $(T_c/\tau)_{\max}$. Модель (4), обнаруживающая такую возможность, работоспособна на большей части диапазона практически интересных значений параметров и может быть названа “хорошей” моделью.

1. Molnar P., Tucker B. E., Brune J. N. Corner frequencies of P- and S-waves and models of earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1973. – **63**. – P. 2091. – 2104.
2. Sato T., Hirasawa T. Body wave spectra from propagating shear crack // J. Phys. Earth. – 1973. – **21**. – P. 415–431.
3. Dahlen F. A. On the ratio of P-wave to S-wave corner frequencies for shallow earthquake sources // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1974. – **64**. – P. 1159–1180.
4. Burridge R., Willis J. The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid // Proc. Camb. Philosoph. Soc. – 1969. – **66**. – P. 443–468.
5. Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. – Москва: Наука, 1984. – 304 с.

6. *Костинский А. С.* Очаг землетрясения как возбудимая среда: простейший пример оптимального конструирования // Доп. НАН України. – 2002. – № 12. – С. 87–94.
7. *Kostinsky A. S.* A calculation of kinematic model parameters for a focus from integral characteristics of a spectrum of body waves // Там само. – 1995. – № 5. – С. 88–90.
8. *Костинский А. С.* “Карты отображений” очаговой модели как элемент автоматизированной системы обработки сейсмических записей // Там само. – 2003. – № 2. – С. 110–118.

Отдел сейсмологии Института геофизики
им. С. И. Субботина НАН Украины, Симферополь

Поступило в редакцию 04.10.2007

A. S. Kostinsky

The earthquake focus as an excitable medium: the estimation of the simplest optimum model from the viewpoint of associated differentiable mappings

In the context of the approach to the description of an earthquake focus from the positions of excitable medium mechanics, a bounded-in-time displacement discontinuity function obtained by the author as the outcome of an optimum construction scheme is studied. For a corresponding “quasidynamic” model, a system nonlinear functional equations for parameters is built up. As a characteristic of the model, a system-dependent mapping of the “routine” two-dimensional region in the space of parameters is described.