

В. П. Ревенко

Про конструктивний аналітично-числовий метод розв'язування плоскої задачі для пластини з кутовими точками

(Представлено академіком НАН України Я. М. Григоренком)

Запропоновано новий конструктивний аналітично-числовий метод розв'язання плоскої задачі в обмеженій криволінійній області з кутовими точками. Метод оснований на мінімізації квадратичної форми, яка відповідає інтегралу квадратичного відхилення знайденого розв'язку від заданих граничних умов. Доведена теорема про числове визначення збіжності розв'язку і наведена оцінка точності задоволення граничних умов. Проведено числовий аналіз розподілу напружень і деформацій у пластині. Встановлені нові якісні і кількісні особливості розподілу напружень у пластині.

При розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності широке застосування знайшли методи теорії комплексного змінного [1], проте для обмежених областей за наявності кутових точок ці методи не завжди є ефективними. Внаслідок практичної важливості цієї задачі для її розв'язування в прямокутній області використовувались різноманітні аналітичні підходи [2, 3]. Love [4] і Папкович [5] для задоволення граничних умов уперше запропонували метод власних функцій, але не довели його до числових розрахунків напружень. Gaydon і Shepherd [6] розклали перші 10 власних функцій за спеціальною ортогональною системою та розраховували числові значення напружень. Подальший теоретичний розвиток методу власних функцій з обґрунтуванням використання неортогональних функцій було запропоновано у роботах [7, 8]. В [9] досліджено напружено-деформований стан (НДС) прямокутної пластини під дією різноманітних навантажень. Огляд літератури наведено в [10].

Нижче запропоновано методіку розрахунку криволінійної плоскої пластини та досліджено деякі аспекти моделювання НДС пластини з кутовими точками за допомогою неортогональних функцій.

1. Постановка задачі. Розглянемо плоску статичну задачу для тонкої пластини сталої товщини h , яка займає однозв'язну плоску опуклу область D з обмеженою кількістю кутових точок [2, 3, 7]. Вектор пружних переміщень і напружений стан в області D описується неперервною разом з четвертими частинними похідними функцією $\Phi(x, y)$, яка задовольняє бігармонічне рівняння. На криволінійному контурі L області D задані крайові умови в нормальних та дотичних напруженнях

$$\begin{aligned} h\sigma_n(x, y)|_L &= \sigma_g|_L, \\ h\tau_n(x, y)|_L &= \tau_g|_L, \end{aligned} \tag{1}$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_g, τ_g є кусково-неперервними функціями. Відомо, що задання зовнішніх функцій $\sigma_g|_L$ та $\tau_g|_L$ не є повністю довільним, а повинно задовольняти певні інтегральні і локальні умови [1, 2].

Теорема 1. *Граничні значення зовнішніх напружень $\sigma_{gj}, \tau_{gj}, j = \overline{1, 2}$, у кутовій точці контура L задовольняють умови*

$$(\sigma_{g2} - \sigma_{g1}) \cos \beta = (\tau_{g1} - \tau_{g2}) \sin \beta, \quad (2)$$

де β — кут області D після прикладення зовнішніх навантажень.

Доведення. Покладемо, що дотична до лінії контура L в кутовій точці паралельна осі Ox , $\sigma_{g1} = \sigma_y, \tau_{g1} = \tau_{xy}$. Зовнішні напруження σ_{g2}, τ_{g2} , які задані на нижній стороні кута (індекс 2), можна виразити через нормальні і дотичні напруження [2]. Після виключення напруження σ_x із цих рівнянь випливає умова (2).

Зовнішні навантаження повинні також задовольняти рівняння рівноваги [1–3]. Конкретизуємо ці обмеження. Припустимо, що в область D можна вписати прямокутник Π із сторонами $2a, 2b$. Початок декартової системи координат розмістимо в точці симетрії прямокутника, вісь Oy направимо паралельно сторонам прямокутника довжиною $2b$, відповідно вісь Ox буде проходити паралельно сторонам довжиною $2a$. Вершини прямокутника Π розбивають контур L на чотири частини. Розподілені нормальні та дотичні зовнішні навантаження σ_g, τ_g створюють на контурах L_j пластини D відповідні нормальні T_j та дотичні Q_j зусилля і моменти M_j , які відповідають основному НДС пластини і повинні задовольняти умови рівноваги. Виходячи з роботи [7], виділимо основний напружений стан, після чого залишиться збурений НДС.

Подання збуреного НДС. В роботі [7] теоретично показано, що функцію напружень збуреного стану прямокутної пластини наближено можна подати у вигляді ряду за власними бігармонічними функціями

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \gamma) = & \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \{ b [z_k^{-1} c_k^j f_j(vz_k, \alpha) \varphi(z_k, \gamma) + \xi_k^{-1} c_k^{2+j} f_j(v\xi_k, \alpha) \psi(\xi_k, \gamma)] + \\ & + a [z_k^{-1} c_k^{4+j} f_j(cz_k, \gamma) \varphi(z_k, \alpha) + \xi_k^{-1} c_k^{6+j} f_j(c\xi_k, \gamma) \psi(\xi_k, \alpha)] \}, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} f_j(x, y) &= \exp(x((-1)^j y - 1)); \\ \varphi(z_k, \gamma) &= \gamma \sin(z_k \gamma) - \operatorname{tg}(z_k) \cos(z_k \gamma), \\ \psi(\xi_k, \gamma) &= -\operatorname{ctg}(\xi_k) \sin(\xi_k \gamma) + \gamma \cos(\xi_k \gamma); \end{aligned}$$

$\gamma = y/b, \alpha = x/a$ — безрозмірні змінні; $v = a/b, c = b/a$ — відношення сторін; $c_k^j, j = \overline{1, 8}$, — невідомі комплексні коефіцієнти; z_k, ξ_k — комплексні безрозмірні спектральні числа, ненульові корені характеристичних рівнянь

$$F^+(z) \equiv \sin(2z) + 2z = 0, \quad F^-(\xi) \equiv \sin(2\xi) - 2\xi = 0, \quad (4)$$

для яких $\operatorname{Re} z_k > 0, \operatorname{Re} \xi_k > 0, N$ — кількість вибраних коренів. Функція напружень (3) дозволяє задовольнити довільні самозрівноважені граничні навантаження на виділеному контурі прямокутника Π . Отже, ми можемо, розширюючи прямокутник до однозв'язної області D , використати подання (3) для задоволення збурених граничних умов на контурі L .

Перетворення граничних умов. Граничні умови (1), виходячи з [1], подамо як проєкції зовнішніх зусиль на вісь x і y

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_L = X_\sigma \Big|_L, \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_L = -Y_\sigma \Big|_L, \quad (5)$$

де s — довжина дуги кривої; $X_\sigma \Big|_L = \cos \varphi \sigma_g - \sin \varphi \tau_g \Big|_L$, $Y_\sigma \Big|_L = \sin \varphi \sigma_g + \cos \varphi \tau_g \Big|_L$ — проєкції зовнішніх нормальних і дотичних зусиль $\sigma_g \Big|_L$, $\tau_g \Big|_L$ на осі Ox , Oy . Після інтегрування співвідношень (5) вздовж контура L одержимо граничні умови в такому вигляді:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \int_0^s Y_\sigma ds + C_1 = P_1(\alpha, \gamma) + C_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_0^s X_\sigma ds + C_2 = P_2(\alpha, \gamma) + C_2, \quad (6)$$

де C_1 , C_2 — постійні інтегрування. Якщо вибрати за початок обходу контура L вершину прямокутника Π , то постійні інтегрування C_1 , C_2 в (6) дорівнюватимуть нулю. Підставимо в співвідношення (6) функцію напружень (3) і одержимо явний вигляд граничних умов

$$\sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[c_{8k-8+j} \chi_k^j(\alpha, \gamma)] = P_1(\alpha, \gamma), \quad \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[c_{8k-8+j} \psi_k^j(\alpha, \gamma)] = P_2(\alpha, \gamma), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \chi_k^j(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(vz_k, \alpha) \varphi(z_k, \gamma), & \chi_k^{2+j}(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(v\xi_k, \alpha) \psi(\xi_k, \gamma), \\ \chi_k^{4+j}(\alpha, \gamma) &= f_j(cz_k, \gamma) \psi(z_k, \alpha), & \chi_k^{6+j}(\alpha, \gamma) &= f_j(c\xi_k, \gamma) \chi(\xi_k, \alpha), \\ \psi_k^j(\alpha, \gamma) &= f_j(vz_k, \alpha) \psi(z_k, \gamma), & \psi_k^{2+j}(\alpha, \gamma) &= f_j(v\xi_k, \alpha) \chi(\xi_k, \gamma), \\ \psi_k^{4+j}(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(cz_k, \gamma) \varphi(z_k, \alpha), & \psi_k^{6+j}(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(c\xi_k, \gamma) \psi(\xi_k, \alpha), \\ j = 1, 2; \chi(z_k, \gamma) &= m_k \cos(z_k \gamma) - \gamma \sin(z_k \gamma); & m_k &= \frac{1}{z_k} - \operatorname{ctg}(z_k). \end{aligned}$$

2. Мінімізація відхилення наближеного розв'язку від заданих граничних умов. Виділимо у невідомих комплексних коефіцієнтах c_k^j , $j = \overline{1, 8}$, дійсну і уявну частини $c_k^j = x_{8k-8+j} + ix_{8(N+k-1)+j}$; аналогічно поступимо також із комплексними функціями, які стоять біля цих коефіцієнтів. Для знаходження невідомих x_m використаємо ідею Я. М. Григоренка [11] про зведення неув'язки у крайових умовах (7) до нуля при збільшенні N . Мірою наближення розв'язку (3) до заданих зовнішніх навантажень у крайових умовах (7) є інтеграл квадратичного відхилення вздовж контура L :

$$\begin{aligned} \Psi_M \{x_1, \dots, x_M\} &= \oint_L \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N [x_{8k-8+j} \chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) - x_{8(N+k-1)+j} \chi_{yk}^j(\alpha, \gamma)] - P_1(\alpha, \gamma) \right\}^2 \right. \\ &+ \left. \left\{ \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N [x_{8k-8+j} \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) - x_{8(N+k-1)+j} \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma)] - P_2(\alpha, \gamma) \right\}^2 \right\} ds \equiv \\ &\equiv \sum_{k,j=1}^M x_k x_j W_k^j - 2 \sum_{k=1}^M x_k V_k + P^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}
M &= 16N; & \chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Re} \chi_k^j(\alpha, \gamma), & \chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Im} \chi_k^j(\alpha, \gamma), \\
\psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Re} \psi_k^j(\alpha, \gamma), & \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Im} \psi_k^j(\alpha, \gamma); \\
W_k^j &= W_j^k, & k, j &\leq 16N; \\
W_{8k-8+j}^{8m-8+n} &= \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{rm}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{rm}^n(\alpha, \gamma)] ds, \\
W_{8(N+k-1)+j}^{8m-8+n} &= \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{rm}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{rm}^n(\alpha, \gamma)] ds, \\
W_{8(N+k-1)+j}^{8(N+m-1)+n} &= \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{ym}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{ym}^n(\alpha, \gamma)] ds, & j, n &= \overline{1, 8}, & k, m &= \overline{1, N}; \\
V_l &= \operatorname{Re} A_l, & V_{l+8N} &= \operatorname{Im} A_l, & l &= \overline{1, 8N}; \\
A_{8k-8+j} &= \oint_L [\chi_k^j(\alpha, \gamma) P_1(\alpha, \gamma) + \psi_k^j(\alpha, \gamma) P_2(\alpha, \gamma)] ds, & j &= \overline{1, 8}, & k &= \overline{1, N}; \\
P^2 &= \oint_L [P_1(\alpha, \gamma)^2 + P_2(\alpha, \gamma)^2] ds.
\end{aligned}$$

За означенням, функціонал (8) є невід'ємною квадратичною формою, яка залежить від M коефіцієнтів. Її мінімумом позначимо $F(M)$. Коефіцієнти x_k^M , на яких досягається це мінімальне значення, будуть визначати за формулою (3) найкращий наближений розв'язок $\Phi_M(\alpha, \gamma)$. Невідомі коефіцієнти x_k^M визначимо із умови мінімуму квадратичної форми (8). Для цього знайдемо частинні похідні $\partial \Psi_M / \partial x_j$, $j = \overline{1, M}$, прирівняємо їх до нуля і одержимо систему M лінійних рівнянь

$$\sum_{k=1}^M x_k^M W_k^j = V_j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (9)$$

Покажемо, що для мінімуму квадратичної форми (8) виконується така лема.

Лема. *Функція $F(M)$ є невід'ємною, незростаючою і дорівнює*

$$F(M) = \oint_L [P_1(\alpha, \gamma)^2 + P_2(\alpha, \gamma)^2] ds - \sum_{k=1}^M x_k^M V_k. \quad (10)$$

Доведення. За означенням, функціонал (8) є невід'ємним. Функція $F(M)$ є його мінімальним значенням, отже також буде невід'ємною. Те, що функція $F(M)$ є незростаючою, доведемо від протилежного. Припустимо, що $F(M) < F(M+1)$. Оскільки функціонал Ψ_{M+1} включає в себе Ψ_M як частковий випадок, коли $x_{M+1} = 0$, то таке припущення суперечить визначенню мінімальності $F(M+1)$. Отже, $F(M+1) \leq F(M)$. Після врахування рівнянь (9) із квадратичної форми (8) впливає нерівність (10).

Обчисливши функції $F(M)$, можна чисельно перевірити виконання умови $\lim_{M \rightarrow \infty} F(M) \rightarrow 0$. Покажемо, що числове значення $\delta_M = \sqrt{F(M)}$ можна розглядати як міру відхилення функції $\Phi_M(\alpha, \gamma)$ від точного розв'язку граничної задачі (7).

Теорема 2. *Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує M , таке, що $F(M) < \varepsilon$, то границя функцій $\phi(x, y) = \lim_{M \rightarrow \infty} \Phi_M(\alpha, \gamma)$ існує і буде точним розв'язком задачі (7) у метриці простору $L_2[L]$, а значення δ_N характеризуватиме відхилення функцій $\Phi_M(\alpha, \gamma)$ від цього розв'язку.*

Доведення. Для вибраного M побудуємо функції $F(M)$, $\Phi_M(\alpha, \gamma)$. Для знайдених функцій $F(M)$ в границі виконується $\lim_{M \rightarrow \infty} F(M) = 0$. Покажемо, що при збільшенні M функція $\Phi_M(\alpha, \gamma)$ буде задовольняти граничні умови (7) із заданою похибкою $\varepsilon > 0$, відповідно, у метриці простору $L_2[L]$. Згідно з умовою теореми, для довільного $\varepsilon > 0$ існує M , таке, що $F(M) < \varepsilon$. Для довільного N_1 , $N_1 > M$, згідно з лемою, виконується $F(N_1) \leq F(M)$. Побудуємо функцію Φ_{N_1} . З виразу функціоналу (8) для функції $\Phi_{N_1}(\alpha, \gamma)$ впливають такі нерівності для похибки задоволення граничних умов (7) на контурі L :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[c_{8k-8+j} \chi_k^j(\alpha, \gamma)] - P_1(\alpha, \gamma) \right\|_{L_2[L]} &\leq F(N_1) < \varepsilon, \\ \left\| \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}[c_{8k-8+j} \psi_k^j(\alpha, \gamma)] - P_2(\alpha, \gamma) \right\|_{L_2[L]} &\leq F(N_1) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

Із умов (11) і нерівності трикутника випливає, що послідовність функцій $\Phi_M(\alpha, \gamma)$ є фундаментальною в $L_2[L]$. Простір функцій за нормою $L_2[L]$ є повним. Отже, функція $\phi(x, y)$ існує. Із нерівностей (11) випливає, що функція $\phi(x, y)$ точно задовольняє граничні умови (7) у нормі $L_2[L]$. Оскільки функція $\phi(x, y)$ є сумою бігармонічних функцій, то вона є розв'язком поставленої задачі у метриці простору $L_2[L]$. Нерівності (11) показують, що значення $F(M) < \varepsilon$ є квадратичною оцінкою наближення функції Φ_M до цього розв'язку. Врахувавши лему й вище наведені нерівності, можна вважати, що значення $\sqrt{F(M)}$ є лінійною оцінкою у метриці $L_2[L]$ відхилення функції Φ_M від розв'язку задачі (7).

3. Плоска задача для прямокутної пластини. У цьому випадку область D збігається з прямокутником Π . Позначимо його вершини $A(-a, b)$, $B(-a, -b)$, $C(a, -b)$, $D(a, b)$. Сторони між A і B ; B і C і т. д. позначимо 1, 2, 3, 4. Розглянемо важливий випадок, коли сторони 2, 4 пластини вільні від навантажень, а на сторонах 1, 3 задані симетричні відносно змінної y нормальні і несиметричні дотичні напруження. Функція напружень збуреного стану (3) для цього навантаження набуває вигляду

$$\Phi(\alpha, \gamma) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re}\{b^2 [z_k^{-2} c_k^j \exp(v z_k ((-1)^j \alpha - 1)) \varphi(z_k \gamma)\}. \quad (12)$$

Для цієї задачі вищенаведений виклад приводить до такої системи рівнянь:

$$\sum_{k=1}^{4N} x_k W_{k,j}^1 = N_j, \quad j = \overline{1, 4N}, \quad (13)$$

де явні вирази коефіцієнтів подані в [7].

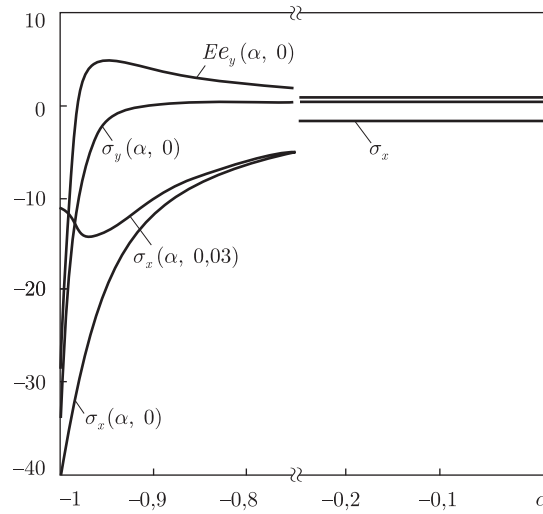


Рис. 1. Напруження і деформації в пластині $a \gg b$ залежно від α

4. Числовий аналіз. Числові розрахунки показали, що запропонований метод дозволяє задовольнити нульові граничні умови на сторонах пластини, вільних від навантаження, з похибкою, меншою ніж 10^{-16} . Квадратична форма (8) вибрана так, що $\sqrt{F(N)}$ характеризує точність задоволення крайових умов (7). Мінімум квадратичної форми прямує до нуля.

Аналіз НДС пластини під дією прикладеної сили у вигляді локально розподіленого нормального навантаження. Силу можна моделювати локальним навантаженням, яке описується максимальним значенням, областю локалізації δ і сумарною силою P . Розглянемо стискальні навантаження, розподілені за параболічним законом

$$\sigma_{g1}(y) = \sigma_{\max}(\gamma_0^2 - \gamma^2)/\gamma_0^2, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0], \quad \sigma_{g1}(\gamma) = 0, \quad \gamma \notin [-\gamma_0, \gamma_0], \quad (14)$$

де $\delta \equiv 2\gamma_0$, $P = 4hb\gamma_0\sigma_{\max}/3$. Щоб зменшити в області прикладання сили вплив умов закріплення пластини, на стороні 3 прикладемо рівномірно розподілені стискальні напруження $\sigma_x^0 = P/2hb$ і прийемо $a = 4b$. Щоб навантаження (14) зрівноважувалися одиничним стискальним напруженням σ_x^0 , область локалізації сили $P = -2hb$ має дорівнювати $\delta = 3/|\sigma_{\max}|$. Збільшуючи $|\sigma_{\max}|$ і, відповідно, зменшуючи γ_0 , будемо моделювати зосереджену силу. Для заданого навантаження основний НДС нормується умовою $\sigma_x^0 = -1$, а всі інші компоненти дорівнюють нулю [7]. Був проведений аналіз розподілу напружень і деформацій $e_y = \partial v/\partial y$ залежно від $\alpha = x/b$. Розглядалася координата $\gamma = 0$, де нормальні напруження набувають максимальних значень. Напруження $\sigma_y(\alpha, 0)$ у випадку $a \gg b$ прямують до значень основного НДС швидше, ніж $\sigma_x(\alpha, 0)$. Область локалізації напружень $\sigma_y(\alpha, \gamma)$ за змінними α, γ приблизно дорівнює $4/|\sigma_{\max}|$. На рис. 1 наведено розподіл нормальних та дотичних напружень в різних перерізах пластини. У точці прикладання максимального зовнішнього нормального навантаження $\sigma_{\max} = -40$, $\sigma_x = -40$ спостерігаються максимальні перпендикулярні нормальні напруження $\sigma_y = -39,1$. Вони швидко спадають при віддаленні від краю пластини, і на відстані порядку δ від краю пластини їх значення наближається до нуля і в подальшому є додатним. При подальшому збільшенні максимального зовнішнього навантаження $|\sigma_{\max}| > 100$, $\delta < 0,03$ максимальні нормальні напруження майже рівні між собою $\sigma_x(0; 0) \approx \sigma_y(0; 0)$. Встановлено, що похибки задоволення граничних умов (7) майже лінійно залежать від значення $\sqrt{F(N)}$. Наведемо знайдені мінімуми

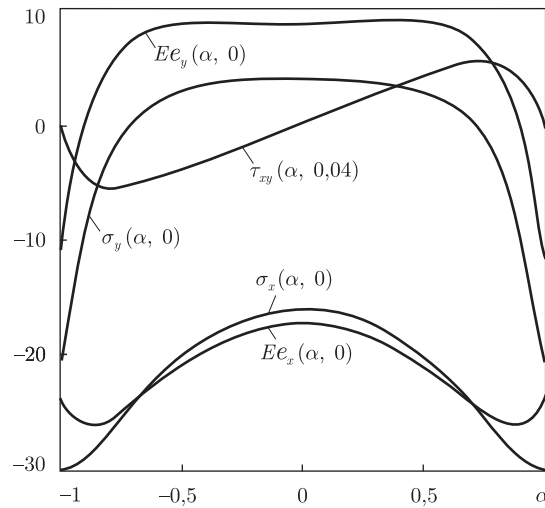


Рис. 2. Розподіл деформацій і напружень: $a/b = 0,1$, $\sigma_{\max} = -30$

квадратичної форми (8) залежно від N : $F(200) = 6,4 \cdot 10^{-5}$; $F(600) = 8,5 \cdot 10^{-7}$. Чисельно знайдена поточкова похибка задоволення граничних умов при $N = 600$ не перевищує 10^{-2} .

На рис. 2 розглянута задача про навантаження пластини двома силами, розподіленими за законом (14), симетрично прикладеними на сторонах 1, 3. Як бачимо, в середині пластини $x = b\gamma = 0$ виникає зона додатних напружень σ_y і деформацій e_y , які можуть спричинити руйнування пластини із крихких матеріалів.

Таким чином, введення інтегральної міри точності задоволення граничних умов на контурі пластини дозволяє побудувати ефективний алгоритм побудови розв'язку плоскої задачі для криволінійної пластини з кутовими точками. Аналіз числових розрахунків підтвердив: значення $\sqrt{F(N)}$ характеризує точність задоволення граничних умов (7); мінімум квадратичної форми (8) прямує до нуля при $N \rightarrow \infty$. Встановлено, що напруження $\sigma_y(x, 0)$ змінюються набагато швидше, ніж $\sigma_x(x, 0)$, отже, вже на відстані порядку $b\delta$ їх знак під максимальним значенням прикладеної сили міняється на протилежний. Знайдено, що під прикладеною стискаючою силою на відстані порядку $3b\delta/4$ виникають максимальні додатні деформації $Ee_y(x, 0)$, які приблизно дорівнюють 10% від максимального за модулем значення навантаження, що може викликати руйнування пластини із крихких матеріалів.

1. Мусхелішвілі Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
2. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 501 с.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
4. Love A. E. H. Biharmonic analysis, especially in rectangle, and its applications to the theory of elasticity // J. London Math. Soc. – 1928. – No 3. – P. 144–156.
5. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. – 1940. – 27, № 4. – С. 335–339.
6. Gaydon F. A., Shepherd W. M. Generalized Plane Stress in a Semi-Infinite Strip Under Arbitrary End-Load // Proceedings of the Royal Society of London., Series A, Math. Phys. Sci. – 1964. – 281, No 1385. – P. 184–206.
7. Ревенко В. П. Розвиток спектрального методу Штурма–Ліувілля розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – 6, № 3. – С. 368–377.
8. Ревенко В. П. Застосування нового аналітично-числового методу Остроградського до розв'язування плоскої задачі теорії пружності // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 59–65.

9. *Revenko V. P.* On Certain Analytical-Numerical Method of the Stress State Analysis of an Elastic Rectangular Plate // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, – No 1. – P. 89–97.
10. *Шалдырван В. А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // *Прикл. механика.* – 2007. – **43**, № 2. – С. 45–69.
11. *Григоренко Я. М.* Решение задач статики некруговых цилиндрических оболочек в различных постановках на основе нетрадиционных подходов // *Прикл. механика.* – 2007. – **43**, № 1. – С. 45–65.

*Інститут проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Надійшло до редакції 16.05.2008

V. P. Revenko

On the constructive analytically numerical method of solution of a plane problem for a plate with corner points

A new constructive analytical-numerical spectral method for solving a plane problem for the bounded region with corner points is proposed. The method is based on the minimization of a quadratic form being the squared integral of a deviation of a found solution from the boundary conditions. The convergence of the obtained solution is proved, and the precision of the satisfaction of the boundary conditions is estimated. The numerical analysis of the distribution of stresses and strains in a plate is carried out. New qualitative peculiarities of the stress distribution in a plate are determined.