

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДОФРАКТАЛЬНИХ ДИФРАКЦІЙНИХ ГРАТОК

*Національний аерокосмічний університет ім. М. С. Жуковського «ХАІ»
17, вул. Чкалова, Харків, 61070, Україна
E-mail: gikosh@gmail.com*

Робота присвячена розробці основ електромагнітної теорії дофрактальних дифракційних ґраток (ДФДГ). Значну увагу приділено системному аналізу процесу творення двох класів самоподібних фракталів зі змінною розмірністю Хаусдорфа, які є основою математичного впорядкування ДФДГ. Наведено кілька математичних моделей процесу взаємодії плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок, що утворюють ґратку. Детально розглядається асимптотична модель слабонаповнених ДФДГ, що є ефективною при дослідженні їх фрактальних властивостей. Іл. 7. Бібліогр.: 11 назв.

Ключові слова: самоподібні фрактали, дифракційні ґратки, чисельно-аналітичні методи, моделювання.

Системи абсолютно тонких та ідеально провідних циліндричних стрічок, що називаються дифракційними ґратками (ДГ) чи решітками, є найпростішими фізичними моделями для вивчення взаємодії провідних об'єктів з плоскими електромагнітними хвилями. Теорія ДГ стрічкового типу та різних модифікацій свого часу була ґрунтовно розроблена школою харківських радіофізиків і знайшла широке застосування, про що свідчить значна кількість публікацій у різних виданнях включно з монографіями [1–5]. У розробці теорії ДГ принципове місце займає математична впорядкованість стрічок чи інших елементів ґратки. Як правило, розглядались періодичні ДГ, що визначаються двома параметрами: ℓ – період системи та a – ширина стрічки ($\ell > a$). Була також побудована строга теорія ДГ зі скінченної кількості стрічок різної ширини, але вона виявилась досить громіздкою за кількістю параметрів і не знайшла заслуженого застосування.

З появою теорії фракталів почалось дослідження так званих «фрактальних» ДГ, але термін «фрактал» до цього часу не має чіткого означення і тлумачиться досить вільно. З різноманіття «фрактальних» об'єктів різного роду можна виділити досить широкий їх клас, для якого можна дати чітке математичне означення як множини, розмірність Φ . Хаусдорфа якої є строго більшою за її топологічну розмірність [6]. Найпростішим і найпоширенішим представником цього класу є досконала множина, вперше запропонована засновником сучасної теорії множин Г. Кантором. Канторова досконала множина (КДМ) детально розглядається у кількох сучасних розділах вищої математики і є основою побудови ряду класичних самоподібних фракталів (СПФ): кривої та «сніжинки» Хельге фон Коха, «килима» чи «серветки» польського математика Серпінського тощо. СПФ взагалі та КДМ, зокрема, є математично впорядкованими і використовують для своєї побудови простий початковий об'єкт (утворювач) та ітераційний принцип творення. Наприклад, КДМ

має як утворювач два однакових сегменти, рівновеликих відкинутому інтервалу з початкового сегмента (ініціатора), і використовує наступний принцип побудови. Утворювач зменшується у три рази та заміщує кожний з двох сегментів. В результаті виникає 4 сегменти, розміщених у певному порядку, що утворюють другу стадію побудови КДМ. Далі знову у три рази зменшують утворювач та заміщують сегменти другої генерації, і виникає третя стадія побудови КДМ. Коли продовжувати такий процес необмежено, то виникне досконала множина з розмірністю Хаусдорфа (P_X), що визначається виразом $d_x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

КДМ є ідеальним з певної точки зору граничним об'єктом, що зветься фракталом, не зручним для використання при моделюванні. Але його стадії генерації досить часто застосовують на практиці, тому доречно вести мову про дофрактальне моделювання. Зокрема, коли взяти як напрямні системи циліндричних стрічок сегменти певної стадії побудови КДМ, то отримаємо дофрактальну ДГ (ДФДГ). Така ґратка має чітку математичну впорядкованість і певні переваги над періодичною ДГ (ПДГ). По-перше, фізична модель ПДГ є нескінченно двовимірною, тоді як модель ДФДГ є тільки нескінченно одновимірною. По-друге, ДФДГ має математичну впорядкованість більш високого рівня, ніж ПДГ, і це надає їй більші можливості, особливо з огляду різноманітності принципів побудови СПФ [7]. Крім того, коли брати дофрактал досить високої генерації, то можна очікувати на певні його властивості відображати фрактальну природу об'єктів дослідження.

У даній статті пропонуються ДФДГ у вигляді систем стрічок, що розташовані у відповідності з відрізками, які утворюють певну стадію побудови КДМ зі змінною фрактальною розмірністю. При цьому постановка задачі є класично строгою в рамках певних припущень [8–10]. Основною метою є розробка електромагнітної теорії ДФДГ з використанням системного аналізу про-

цесу творення двох СПФ зі змінною РХ, що математично впорядковують ДФДГ.

1. Класи СПФ зі змінною РХ. Принцип творення КДМ, а також його початковий об'єкт побудови можна в певних межах змінювати. При цьому будуть виникати нові множини з іншими позитивними значеннями фрактальної розмірності та нульовою топологічною розмірністю. Коли змінити розміри сегментів утворювача класичної КДМ, наприклад, взяти сегменти відносного розміру 2α , що розташовані на відносній відстані $2(\beta - \alpha)$ один від одного, то в результаті нескінченного процесу зменшення утворювача та заміщення ним сегментів виникне СПФ з РХ $d_\chi = \frac{\ln 2}{\ln \kappa}$, де $\kappa = 1 + \beta/\alpha$. Доведення цього виразу РХ можна отримати за її означенням з відповідного дослідження міри Хаусдорфа [6]. Очевидно, що $\beta - \alpha > 0$, тому $\kappa > 2$, а значить, d_χ змінюється в проміжку $(0,1)$ в залежності від коефіцієнта подібності κ , що вказує, як треба зменшувати утворювач при переході від однієї стадії побудови СПФ до наступної. При цьому кількість сегментів певної стадії буде така ж, як і у класичної КДМ, тобто 2^n , де n – номер стадії творення. З ростом цього номера кількість сегментів, що утворюють дофрактал (дану стадію творення СПФ), досить швидко росте, але завдяки самоподібності побудови є можливість параметризації сегментів, необхідної для спрощення математичної моделі процесу взаємодії ДФДГ з плоскою електромагнітною хвилею.

Друге узагальнення класичної КДМ пов'язане зі зміною утворювача, який буде складатись із трьох рівновіддалених сегментів відносної довжини 2α . Коли відстань між ними позначити $\beta - 2\alpha$, то процес творення СПФ визначатиметься коефіцієнтом подібності $\kappa = 1 + \beta/\alpha > 3$. У результаті нескінченного процесу зменшення утворювача та заміщення ним сегментів виникне СПФ з РХ, що визначається формулою $d_\chi = \frac{\ln 3}{\ln \kappa}$. Її можна довести подібно до попереднього виразу РХ. Очевидно, що маємо той же самий інтервал зміни для d_χ . При цьому кількість сегментів певної стадії буде більшою і визначатиметься степенем трійки, тобто 3^n , де n – номер стадії творення.

Таким чином, маємо два досить широкі класи СПФ зі змінною РХ, які визначаються двома геометричними параметрами та є чітко впорядкованими. Ці два параметри β і α є вхідними змінними математичної моделі процесу побудови СПФ. Вихідними змінними моделі слід вважати

набір з 2^n (для 1-го класу СПФ) чи 3^n (для 2-го) функцій, що чітко закріплюють положення сегментів довільної стадії на числовій вісі. Важливість знаходження цих функцій у найбільш простому вигляді пов'язана з розробкою якісної математичної моделі процесу розсіювання ДФДГ плоскої електромагнітної хвилі. Тому слід провести детальний системний аналіз процесу творення СПФ та, зокрема, побудувати структурну схему вказаного процесу.

2. Системний аналіз процесу побудови СПФ. Характерною рисою СПФ є простота початкового об'єкта та ітераційний принцип його творення. Утворювач СПФ можна досить просто формалізувати математично, використавши геометричні параметри β і α та параметр t , для якого $|t| \leq 1$. У випадку 1-го класу СПФ це будуть функції $x_m^1(t) = (-1)^m \beta + \alpha t$, $m = 1, 2$; для 2-го класу СПФ до них долучається центральна функція $x^1(t) = \alpha t$. Верхній індекс у функцій позначає, що маємо першу стадію побудови СПФ. Попередньою стадією вважаємо певний прямолінійний сегмент, скажімо $[-1, 1]$, що зветься ініціатором, який розміщуємо в основі деревовидної структурної схеми процесу побудови СПФ 2-го класу (рис. 1). Наступною – другою стадією побудови 1-го класу СПФ є четвірка сегментів, що формалізується функціями

$$x_m^2(t) = (-1)^m (\beta + \beta_2) + \alpha_2 t \text{ для } m = 1, 4 \text{ та}$$

$$x_m^2(t) = (-1)^m (-\beta + \beta_2) + \alpha_2 t \text{ для } m = 2, 3.$$

Тут $\beta_2 = \beta/\kappa$, $\alpha_2 = \alpha/\kappa$ з $\kappa = 1 + \beta/\alpha$. У випадку 2-го класу СПФ буде 9 сегментів другої стадії, і до наведених вище чотирьох функцій слід ще 5 долучити:

$$x^2(t) = \pm \beta + \alpha_2 t, \quad x^2(t) = \alpha_2 t, \quad x^2(t) = \pm \beta_2 + \alpha_2 t.$$

Ці функції слід занумерувати послідовно у порядку розташування сегментів другої стадії побудови СПФ: $x_m^2(t)$, $m = 1, \dots, 9$. Так саме на основі самоподібності визначаються функції, що відповідають чи, точніше, закріплюють на числовій вісі сегменти наступних стадій. Для довільного натурального n , що визначає стадію побудови СПФ, маємо впорядковану послідовність функцій $x_m^n(t)$, де $m = 1, \dots, 2^n (3^n)$. Коли цей процес зобразити у вигляді дерева, то на кожному рівні, що відповідає певній стадії творення СПФ, маємо розгалуження у точках $x_m^n(t)$ на дві (для СПФ 1-го класу) чи три гілки, які в певному розумінні повторюють все дерево (рис. 1). У цьому і полягає властивість самоподібності фракталів даного класу.

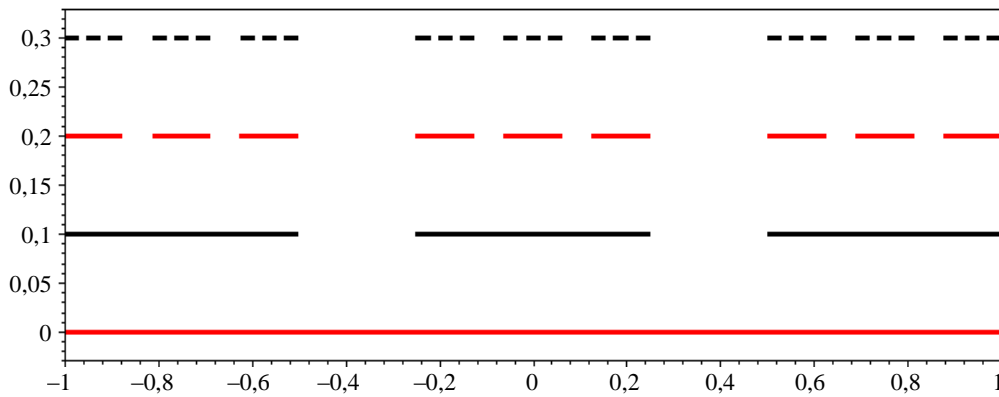
Утворювач	Друга стадія	Третя стадія	...	n -на стадія
		$-\beta - \beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$...	$-\beta - \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$
	$-\beta - \beta_2 + \alpha_2 t$	$-\beta - \beta_2 + \alpha_3 t$
		$-\beta - \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$
		$-\beta - \beta_3 + \alpha_3 t$
$-\beta + \alpha t$	$-\beta + \alpha_2 t$	$-\beta + \alpha_3 t$...	$-\beta + \alpha_n t$
		$-\beta + \beta_3 + \alpha_3 t$
		$-\beta + \beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$
	$-\beta + \beta_2 + \alpha_2 t$	$-\beta + \beta_2 + \alpha_3 t$
		$-\beta + \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$...	$-\beta + \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$
		$-\beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$
	$-\beta_2 + \alpha_2 t$	$-\beta_2 + \alpha_3 t$...	$-\beta_2 + \alpha_n t$
		$-\beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$
		$-\beta_3 + \alpha_3 t$
$[-1,1]$	αt	$\alpha_2 t$...	$\alpha_n t$
		$\alpha_3 t$
		$\beta_3 + \alpha_3 t$
		$\beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$
	$\beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta_2 + \alpha_3 t$...	$\beta_2 + \alpha_n t$
		$\beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$
		$\beta - \beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$...	$\beta - \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$
	$\beta - \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta - \beta_2 + \alpha_3 t$
		$\beta - \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$
		$\beta - \beta_3 + \alpha_3 t$
$\beta + \alpha t$	$\beta + \alpha_2 t$	$\beta + \alpha_3 t$...	$\beta + \alpha_n t$
		$\beta + \beta_3 + \alpha_3 t$
		$\beta + \beta_2 - \beta_3 + \alpha_3 t$
	$\beta + \beta_2 + \alpha_2 t$	$\beta + \beta_2 + \alpha_3 t$
		$\beta + \beta_2 + \beta_3 + \alpha_3 t$...	$\beta + \sum_{m=2}^n \beta_m + \alpha_n t$

Рис. 1. Структурна схема побудови СПФ 2-го класу

Для геометричної ілюстрації процесу творення СПФ можна використовувати дуги різного розміру та форми [8], що опираються на кінці сегментів стадій побудови, або зображувати ці сегменти на різних рівнях, як це показано на рис. 2. На ньому зображено початковий сегмент та 3 стадії побудови, зокрема, 27 сегментів третьої стадії на рівні $y = 0,3$. Слід зазначити, що алгоритм та програма розрахунку для геометричної ілюстрації створюється на основі структурної схеми і разом з нею є елементами системного аналізу процесу творення СПФ. Рис. 2 наглядно показує напрямні трьох ДФДГ,

пов'язаних з першими трьома стадіями побудови СПФ з $PX d_\chi = 0,5$.

Та в обох випадках геометричної ілюстрації суттєвою вадою є те, що стає неможливим зобразити вищі стадії побудови. Особливо це стосується СПФ з невеликими фрактальними розмірностями, де можливо показати тільки 3 чи 2 стадії побудови. Але як раз для таких СПФ виникає можливість отримати прості асимптотичні вирази вихідних змінних електродинамічної моделі розсіювання хвилі ДФДГ і провести дослідження інших характеристик з метою виділити фрактальні властивості.

Рис. 2. Процес побудови СПФ з РХ $d_\chi = 0,5$

Тому основною моделлю процесу побудови СПФ зі змінною РХ є структурна схема, наведена на рис. 1, де міститься, зокрема, повна інформація про вихідні змінні моделі процесу творення. На цій основі можна розглядати різні математичні моделі процесу розсіювання ДФДГ плоскої електромагнітної хвилі у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [8, 9].

3. Математичні моделі та їх перетворення. Загальна постановка задачі розсіювання плоскої електромагнітної хвилі системою ідеально провідних та нескінченно тонких циліндричних стрічок є класичною [10]. Тут є новим провідний об'єкт, який змінює електромагнітне поле внаслідок взаємодії його з плоскою хвилею. Поле цієї хвилі відоме, має досить простий вигляд, і тому, віднявши його від нового поля, отримаємо так зване поле розсіювання: воно і буде предметом дослідження. Перехід від тривимірної фізичної моделі до двовимірної математичної ґрунтується на основі теорії диференціальних рівнянь математичної фізики. В результаті отримуємо двовимірні зовнішні задачі Діріхле (E -поляризація) та задачу Неймана (H -поляризація) для двовимірного рівняння Гельмгольца з відповідною умовою випромінювання на нескінченності та крайовими умовами на кінцях сегментів [10]. За відомим методом інтегральних рівнянь вказані двовимірні задачі переводяться до одновимірної задачі розв'язання систем інтегральних рівнянь (ІР) або інтегрально-диференціальних (ІДР). Випадок H -поляризації є більш складним, але менш цікавим, бо у процесі творення СПФ розміри окремого сегмента суттєво зменшуються при переході від однієї стадії до наступної. Тому основну увагу приділимо дослідженню першого випадку, коли на систему набігає плоска E -поляризована хвиля і основною математичною моделлю є наступна система сингулярних ІР (СІР):

$$\sum_{m=1}^{2^n(3^n)} \int_{-1}^1 j_m(t) H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|) dt = \frac{2i}{\pi} \exp[iq_1 x_\ell^n(\tau)]. \quad (1)$$

Вхідними змінними параметрами тут є: n – номер стадії побудови СПФ, q_1 – перша компонента напрямного вектора плоскої хвилі та вихідні змінні $x_m^n(t)$ геометричної моделі побудови СПФ зі змінною РХ. Вихідними змінними цієї моделі є функції $j_m(t)$, що визначають щільність поверхневих струмів на стрічках.

Серед методів, що успішно застосовуються для визначення вихідних змінних, в першу чергу треба вказати на прямий чисельний метод механічних квадратур (МК) [8, 11]. Але в основному тут буде використовуватись чисельно-аналітичний метод регуляризації Векуа-Карлемана (РВК), який пов'язаний з оберненням частини інтегрального оператора, що містить сингулярність (особливість) у найпростішому вигляді [8, 9]. При цьому СІР першого роду перетворюються в ІР другого роду, до яких вже застосовуються класичні проєкційні методи. Слід також зазначити, що метод РВК у найпростіших випадках дозволяє отримати розв'язок задачі розсіювання в явному вигляді.

Очевидно, ядра системи (1), що не знаходяться на діагоналі ($\ell \neq m$) є регулярними, а ось у діагональних ядрах ($\ell = m$) виникає логарифмічна особливість при $\tau = t$. Виділимо зазначену особливість у найбільш простому вигляді. Для цього застосовуємо відоме розвинення функції Ханкеля в ряд і як результат маємо

$$H_0^{(1)}(|x_m^n(\tau) - x_m^n(t)|) = \frac{2i}{\pi} [R_{mm}(\tau, t) + \ln|\tau - t|]. \quad (2)$$

Тут $R_{mm}(\tau, t)$ вже є регулярним ядром. В результаті таких перетворень можна отримати систему

$$\int_{-1}^1 j_\ell(t) \ln|\tau - t| dt + \sum_{m=1}^{2^n(3^n)} \int_{-1}^1 j_m(t) R_{\ell m}(\tau, t) dt = \exp[iq_1 x_\ell^n(\tau)]. \quad (3)$$

Тут недиагональні ядра

$$R_{\ell m}(\tau, t) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(|x_\ell^n(\tau) - x_m^n(t)|), \ell \neq m.$$

Ця система і є базовою як для застосування прямих чисельних методів, так і для подальшого перетворення за методом РВК. Використовуючи далі формулу обернення Карлемана, досить просто отримати систему ІР другого роду, яка має наступний вигляд:

$$j_\ell(x) + \sum_{m=1}^{2^n(3^n)} \int_{-1}^1 j_m(t) \mathfrak{R}_{\ell m}(x, t) dt = g_\ell(x). \quad (4)$$

Ядра цієї системи, а також праві частини визначаються через ядра і праві частини попередньої системи (3) за допомогою формул, подібних до формули Карлемана. Наведемо тут вираз для правої частини

$$g_\ell(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{1-x^2}} \left[iq_1 \alpha_n \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-x} e^{iq_1 x_\ell^n(\tau)} d\tau - \frac{1}{\ln 2} \int_{-1}^1 e^{iq_1 x_\ell^n(\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \right].$$

Отриманими системами ІР другого роду, власне, і закінчується метод регуляризації, далі застосовують той чи інший метод розв'язку ІР другого роду. Тут для порівняння з попереднім методом обирається проєкційний метод із застосуванням поліномів Чебишева першого роду як координатних функцій: шукані функції подаються у вигляді розвинення

$$j_\ell(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_\ell^m T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Далі їх підставляють до системи (4), множать на $T_\ell(x)/\sqrt{1-x^2}$ і інтегрують, враховуючи ортогональність зазначених поліномів на відрізку $[-1, 1]$ з множником $1/\sqrt{1-x^2}$. У результаті виникає нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно c_ℓ^m , яку розв'язуємо за методом відтинань.

Таким чином, маємо три системи ІР (1), (3) та (4), які описують процес розсіювання плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі ДФДГ.

4. Вузькострічкова ДФДГ. Під час творення СПФ параметр α_n зменшується не менше ніж удвічі для 1-го класу та не менше ніж утричі для 2-го класу СПФ при переході від деякої стадії

до наступної. Тому починаючи з певної стадії творення його можна вважати настільки малим, наскільки це потрібно, і, таким чином, можна розраховувати на ефективність асимптотичної моделі вузьких стрічок, вірніше, слабонаповнених ДФДГ. Це пов'язано з тим, що інший параметр β_n не має бути малим і можна побудувати процес послідовних наближень відносно α_n .

У даних припущеннях, застосовуючи асимптотичні вирази для ядер та правих частин системи (4), приходимо до векторного рівняння наступного типу:

$$\bar{j}(t) = \frac{\mathbf{H}_n \bar{j} - \bar{q}_n}{\pi \sqrt{1-t^2} \ln 2}. \quad (5)$$

Тут вектор-функція $\bar{j}(t)$ складена з компонент $j_m(t)$; \mathbf{H}_n – відома матриця відповідного розміру, елементи якої визначаються наступними виразами: $h_{\ell m} = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(|x_\ell^n(0) - x_m^n(0)|)$ при $\ell \neq m$;

$h_{\ell\ell} = \ln \frac{\gamma \alpha_n}{2i}$; $\bar{j} = \int_{-1}^1 \bar{j}(t) dt$; $\bar{q}_n = \bar{q}_n(\varphi_0)$ – відомий вектор-стовпчик, складений з компонент $\exp[i \cos \varphi_0 x_\ell^n(0)]$; φ_0 – кут, під яким набігає плоска хвиля на ґратку.

Щоб знайти \bar{j} , візьмемо інтеграли від обох частин рівняння (5), тоді виникне СЛАР, що має наступну матричну форму:

$$(\mathbf{H}_n - \ln 2 \mathbf{E}_n) \bar{j} = \bar{q}_n, \quad (6)$$

де \mathbf{E}_n – одинична матриця.

У випадку утворювачів для 1-го класу СПФ маємо наступну матрицю другого порядку

$$\mathbf{H}_1 - \ln 2 \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \ln \frac{\gamma \alpha}{4i} & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(2\beta) \\ \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(2\beta) & \ln \frac{\gamma \alpha}{4i} \end{pmatrix},$$

відповідно для 2-го класу СПФ матриця буде третього порядку

$$\mathbf{H}_1 - \ln 2 \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \ln \frac{\gamma \alpha}{4i} & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\beta) & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(2\beta) \\ \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\beta) & \ln \frac{\gamma \alpha}{4i} & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\beta) \\ \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(2\beta) & \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\beta) & \ln \frac{\gamma \alpha}{4i} \end{pmatrix},$$

при цьому вектор у правій частині складається з компонент $\hat{x}\exp[-i\beta \cos \varphi_0]$, 1 та $\hat{x}\exp[i\beta \cos \varphi_0]$. Визначники $|\mathbf{H}_1 - \ln 2 \mathbf{E}_1|$ у зроблених припущеннях будуть відмінними від нуля. На графіках рис. 3

наведено залежності їх абсолютних величин від геометричних параметрів β і α .

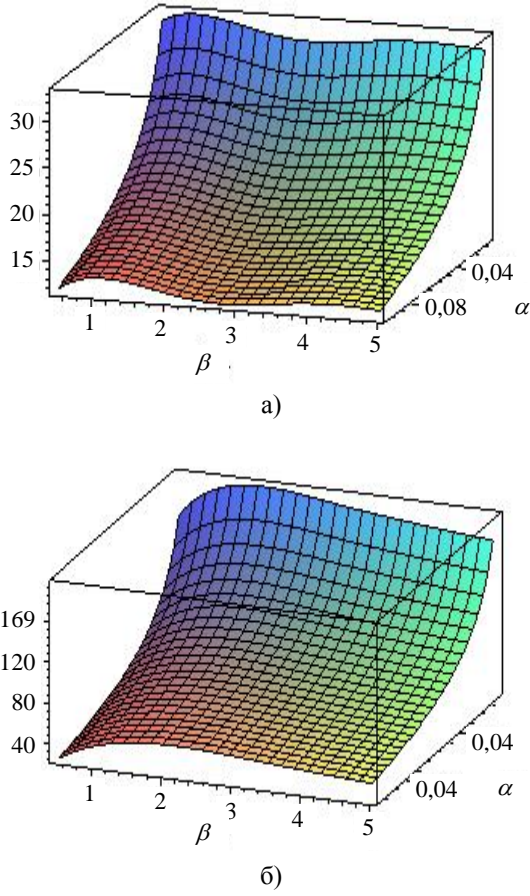


Рис. 3. Графіки залежності $abs|\mathbf{H}_1 - \ln 2\mathbf{E}_1|$ від геометричних параметрів β і α : а) – для 1-го класу СПФ; б) – для 2-го класу СПФ

Тому для шуканого вектора \vec{j} маємо

$$\vec{j} = (\mathbf{H}_1 - \ln 2\mathbf{E}_1)^{-1} \vec{q}_1,$$

при цьому шукана вектор-функція має наступний вигляд:

$$\vec{j}(x) = \frac{\vec{j}}{\pi\sqrt{1-x^2}}. \quad (7)$$

Отже, з математичної точки зору задача розсіювання плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі системою стрічок, що відповідає утворювачам СПФ, є повністю вирішеною.

5. Діаграма направленості ДФДГ. Після математичного розв'язання задачі розсіяне електромагнітне поле навколо розсіювача можна подати за допомогою функції, що визначається сумою інтегральних перетворень розв'язку $j_\ell(t)$

$$v(x, y) = -\frac{i}{4} \sum_{\ell=1}^{2^n(3^n)} \int_{-1}^1 j_\ell(t) H_0^{(1)}(\sqrt{(x-x_\ell(t))^2 + y^2}) dt.$$

Далі зручно для координат точки спостереження взяти полярну систему, тобто $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тоді на достатній віддалі від ґратки отримаємо асимптотичний вираз

$$v = -\sqrt{\frac{i}{8\pi}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \sum_{\ell=1}^{2^n(3^n)} \int_{-1}^1 j_\ell(t) \exp[-ix_\ell(t) \cos \varphi] dt,$$

що визначає розсіяне електромагнітне поле в дальній зоні.

Якщо множник $\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$, що залежить від від-

стані до розсіювача, відкинути, то залишиться вираз, який характеризує розподіл поля в далекій зоні в залежності від полярного кута. Позначимо його $A(\varphi)$:

$$A(\varphi) = -\frac{\sqrt{i}}{2} \sum_{\ell=1}^{2^n(3^n)} \hat{j}_\ell(\cos \varphi),$$

де капелюшок над літерою позначає інтегральне перетворення, тобто

$$\hat{j}_\ell(\cos \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 j_\ell(t) \exp[-ix_\ell(t) \cos \varphi] dt.$$

У випадку квазістатичної моделі

$$\sum_{l=1}^{2^n} \hat{j}_l(\cos \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\vec{q}_n^T(-\cos \varphi), \vec{j}).$$

Зокрема при $n = 2$ маємо

$$(\vec{e}_2^T(\cos \varphi), \vec{j}) = j_1 \exp[i(\beta + \beta_2) \cos \varphi] + j_2 \exp[i(\beta - \beta_2) \cos \varphi] + j_3 \exp[i(\beta_2 - \beta) \cos \varphi] + j_4 \exp[-i(\beta + \beta_2) \cos \varphi].$$

Графіки залежності $|A(\varphi)|$ від полярного кута для значень $\beta = 29\pi/60$, $\alpha = \pi/60$ та різних стадій творення СПФ $n=1$ (суцільна лінія) та $n=2$ (крапки) наведені на рис. 4.

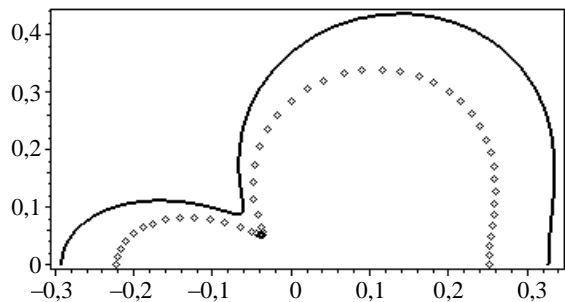


Рис. 4. Діаграми направленості для різних стадій творення СПФ: $\cos \varphi_0 = 0,5$

Тут слід вказати на те, що поперечний розмір ДФДГ становить половину довжини хвилі, а на рис. 5 він співпадає з нею. В обох випадках форми діаграм направленості для різних $n=1,2$

однакові, хоча є відміна в розмірах, та це не завадить говорити про фрактальність даної характеристики ґратки.

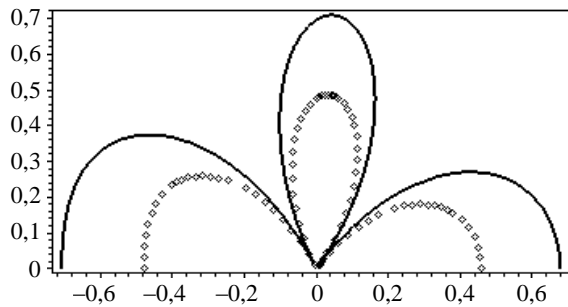


Рис. 5. Діаграми направленості для різних стадій творення СПФ: $\cos\varphi_0 = 0,1$

Коли далі зменшувати довжину хвилі, то випадок $n=1$ вже виходить за межі дії даної асимптотичної моделі, але випадок $n=2$ ще дає впевнені результати.

На рис. 6 наведено діаграму направленості для значень $\beta = 29\pi$, $\alpha = \pi$. Тут маємо коефіцієнт подібності $\kappa = 1 + \beta/\alpha = 30$, тому напрямні ДФДГ відповідають другій стадії побудови СПФ з РХ $d_\chi = \frac{\ln 3}{\ln 30}$.

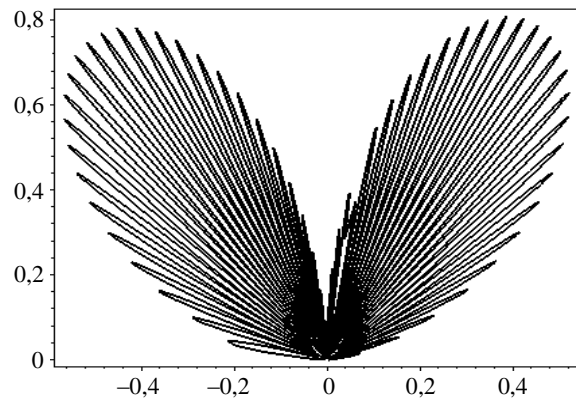


Рис. 6. Діаграма направленості для другої стадії творення СПФ: $\cos\varphi_0 = 0,5$

Діаграма направленості на цьому рисунку має досить багато вузьких пелюстків, але вони формують два широкі пелюстки, що мають напрямок падіння плоскої хвилі. При цьому ДФДГ складається з двох підґраток, поперечний розмір яких дорівнює довжині хвилі.

На рис. 7 наведено діаграму направленості цієї ж ДФДГ (відповідає другій стадії побудови СПФ з РХ $d_\chi = \frac{\ln 3}{\ln 30}$), але з параметрами $\beta = 29\pi/2$, $\alpha = \pi/2$, тобто тут поперечний розмір підґраток становить половину довжини хвилі.

Тут теж маємо досить багато вузьких пелюстків, але вони формують вже один широкий пелюсток.

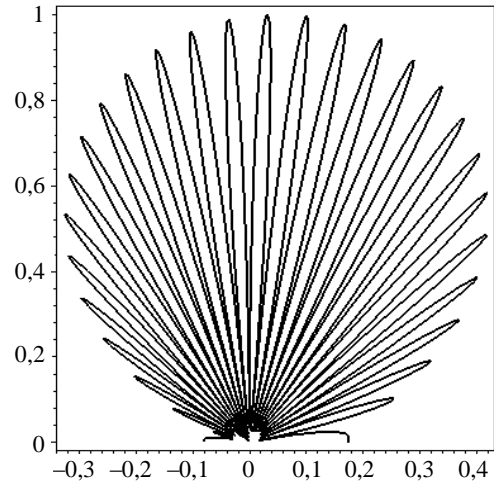


Рис. 7. Діаграми направленості для другої стадії творення СПФ: $\cos\varphi_0 = 0,1$

Висновки. На основі строгої електромагнітної теорії проведено дослідження дифракційних ґраток, що мають вигляд систем циліндричних стрічок, напрямні яких утворюють n -ну стадію побудови СПФ зі змінною РХ. Дослідження також ґрунтується на системному аналізі процесу побудови двох класів СПФ. Наведено кілька математичних моделей процесу взаємодії плоскої E -поляризованої електромагнітної хвилі з системою циліндричних стрічок, що утворюють ґратку. Детально аналізується асимптотична модель слабо наповнених ДФДГ, що є ефективною при дослідженні фрактальних властивостей ДФДГ.

1. Шестопапов В. П. Метод задачи Римана-Гильберта / В. П. Шестопапов. – Х.: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1971. – 400 с.
2. Дифракция волн на решетках / В. П. Шестопапов, Л. Н. Литвиненко, С. А. Масалов, В. Г. Сологуб. – Х.: Изд-во Харьков. гос. ун-та, 1973. – 287 с.
3. Резонансное рассеяние волн: в 2 т. Т. 1. Дифракционные решетки / В. П. Шестопапов, А. А. Кириленко, С. А. Масалов, Ю. К. Сиренко. – К.: Наук. думка, 1986. – 232 с.
4. Литвиненко Л. Н. Спектральные операторы рассеяния в задачах дифракции волн на плоских экранах / Л. Н. Литвиненко, С. Л. Просвирнин. – К.: Наук. думка, 1984. – 240 с.
5. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции / В. П. Шестопапов, Ю. А. Тучкин, А. Е. Поединчук, Ю. К. Сиренко. – Х.: Основа, 1997. – 283 с.
6. Мандельброт Б. Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Б. Мандельброт. – М.: Ин-т компьютерн. исслед., 2002. – 656 с.
7. Кошевой Г. И. Некоторые классы самоподобных фракталов и их использование в радиофизике / Г. И. Кошевой // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2007. – 12, № 11. – С. 28–32.
8. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок / Г. І. Кошовий // Радиофизика и электрон.: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2007. – 12, № 1. – С. 141–147.

9. Кошовий Г. І. Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю / Г. І. Кошовий // *Радиофизика и электрон.*: сб. науч. тр. / Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – Х., 2007. – 12, № 3. – С. 451–455.
10. Хенл Х. Теория дифракции / Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпаль. – М.: Мир, 1964. – 428 с.
11. Панасюк В. В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.

G. I. Koshovy

SYSTEMS APPROACH TO INVESTIGATION OF PREFRACTAL DIFFRACTIONAL GRATINGS

The article deals with electro magnetic theory of prefractal diffractive gratings (PFDG). Much attention is given to systems analysis of two classes of self similar fractals with variable Hausdorff's dimension, which is the base of PFDG's order. Same mathematical models of electromagnetic waves scattering by PFDG are presented. An asymptotical model of weakly filled PFDG is considered in details. The model is effective to examine of fractal properties.

Key words: self similar fractals, diffractive gratings, numeric analytical methods, modeling.

Г. И. Кошевой

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ДОФРАКТАЛЬНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

Работа посвящена разработке основ электромагнитной теории дофрактальных дифракционных решеток (ДФДР). Значительное внимание уделено системному анализу процесса построения двух классов самоподобных фракталов с переменной размерностью Хаусдорфа, которая является основой математического упорядочения ДФДР. Приведено несколько математических моделей процесса взаимодействия плоской E -поляризованной электромагнитной волны с системой цилиндрических лент, образующих решетку. Детально рассмотрена асимптотическая модель слабо наполненных ДФДР, которая эффективна при исследовании их фрактальных свойств.

Ключевые слова: самоподобные фракталы, дифракционные решетки, численно-аналитические методы, моделирование.

Рукопис надійшов 10.09.10 р.