

УДК 523.44:523.035.24

С. Я. Колесник, Н. С. Згоняйко

Астрономическая обсерватория Одесского национального университета им. И. И. Мечникова
65014, Одесса, парк Шевченко

Определение ориентации оси вращения астероида

Предложена методика определения ориентации и фазовой кривой астероида, использующая модель выпуклого 38-гранника (число граней может быть произвольно увеличено). Форма модели определяется площадями граней. Решение этой задачи сведено к симплекс-минимизации квадратичного функционала. Рассмотрена также другая методика определения ориентации астероида, использующая критерий взаимного согласия его фотометрических кривых. Методы проверены на модельных примерах и на фотометрических кривых астероида 433 Эрос.

ВИЗНАЧЕННЯ ОРІЄНТАЦІЇ ОСІ ОБЕРТАННЯ АСТЕРОЇДА, Колесник С. Я., Згоняйко Н. С. — Запропоновано методику визначення орієнтації та фазової кривої астероїда, де використано модель опуклого 38-гранника (число граней можна довільно збільшувати). Форма моделі визначається площами граней. Розв'язання цієї задачі зведено до симплекс-мінімізації квадратичного функціоналу. Розглянуто також іншу методику визначення орієнтації астероїда, що використовує критерій взаємної узгодженості його фотометричних кривих. Методи перевірено на модельних прикладах та на фотометричних кривих астероїда 433 Ерос.

THE DETERMINATION OF THE ORIENTATION OF THE ROTATION AXIS OF AN ASTEROID, by Kolesnik S. Ya., Zgonyaiko N. S. — We present a method for determination of the orientation and phase curve of an asteroid with the use of the bulging 38-hedron model (the number of sides may be arbitrary increased). The model shape is determined by the areas of the sides. The decision of the problem is reduced to the simplex-minimization of quadratic functional. We discuss another method for determination of the asteroid orientation with the use of the criterion of reciprocal accordance of its photometric curves as well. The methods are verified with both model examples and photometric curves of the asteroid (433) Eros.

МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ

Задача массового определения ориентации, формы и отражательных свойств астероидов в настоящее время остается актуальной, несмотря на успех космических миссий к отдельным объектам. Непосредственное фотографи-

рование астероида Эрос показало, что его форма (и видимо, форма других астероидов) существенно отличается от простых моделей, таких как «трехосный эллипсоид», «цилиндр с полусферическими торцами» [3, 15]. Расширение возможностей вычислительной техники в настоящее время позволяет разрабатывать более сложные и адекватные методики [11, 12].

В данной работе сделана попытка продвинуться в двух направлениях.

1. В качестве модели астероида выбран выпуклый многогранник с большим числом граней. Ориентация граней относительно тела астероида фиксирована; тогда форма модели однозначно определяется площадями S_i граней [4]. Для конкретных параметров ориентации модели величина $O - C$, определяющая отличие теоретических кривых блеска (фотометрических кривых) от наблюдаемых, является положительно определенной квадратичной функцией величин S_i . Определив минимум этой функции, получим для каждой выбранной ориентации оптимальный набор параметров S_i и оптимальное значение $O - C$. Тогда оптимальные параметры ориентации можно найти простым перебором значений α и δ оси вращения астероида и периода вращения.

2. При достаточно большом количестве и разнообразии фотометрических наблюдений можно сделать следующий шаг, являющийся обобщением метода Кинмана—Лафлера—Холопова. Независимо от закона отражения света и формы астероида, наблюдаемые фотометрические кривые должны быть согласованы между собой. Если при выбранной ориентации модели для двух точек одной или разных фотометрических кривых реализуются близкие геометрические условия отражения света, то и значения блеска астероида в этих точках должны быть примерно равны. Минимизируя соответствующим образом выбранный параметр согласия между наблюдаемыми кривыми блеска, можно определить и оптимальную ориентацию астероида.

МОДЕЛЬ — ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК

Будем рассматривать астероид как твердое тело, вращающееся в режиме «кувыркания», т. е. имеющее ось вращения, неподвижную в пространстве и в теле астероида. Введем подвижную систему координат $Oxyz$, жестко связанную с астероидом, так, чтобы ось Oz была направлена вдоль орта оси вращения Ω . В этой системе зафиксируем направления внешних нормалей \mathbf{n}_i^0 к граням модели-многогранника. Каждый из векторов \mathbf{n}_i^0 определяется «астероидоцентрическими» координатами β_i, θ_i (на рис. 1 изображена сферическая проекция астероида):

$$\mathbf{n}_i^0 = (\cos\theta_i \cos\beta_i; \cos\theta_i \sin\beta_i; \sin\theta_i). \quad (1)$$

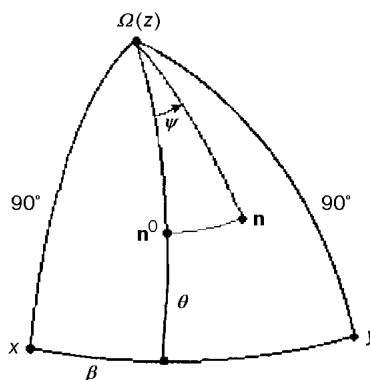


Рис. 1. Сферическая проекция векторов нормалей \mathbf{n}, \mathbf{n}^0 в астероидоцентрической системе координат

Для модели выбраны такие значения параметров: $\beta = 0, 30, \dots, 330^\circ$; $\theta = -90, -45, 0, 45, 90^\circ$. Этот набор параметров определяет два полярных орта ($\theta = \pm 90^\circ$) и три пояса по 12 ортов — всего 38 ортов. Отнесем начальное положение системы *Охуз* к произвольному моменту t_0 (приблизительно посередине интервала наблюдений).

Угол ψ поворота модели на момент t составляет

$$\psi = \omega(t - t_0), \quad (2)$$

где ω — угловая скорость вращения.

При повороте модели на угол ψ каждый из ортов \mathbf{n}_i^0 займет положение

$$\mathbf{n}_i = \Omega \cdot \sin\theta_i + (\mathbf{n}_i^0 - \Omega \cdot \sin\theta_i)\cos\psi + (\Omega \times \mathbf{n}_i^0)\sin\psi. \quad (3)$$

Силу света I_i , отраженного к наблюдателю i -й гранью модели площадью S_i , определим зависимостью

$$I_i = S_i \gamma(\alpha) \cdot f(\mathbf{e}_n; \mathbf{e}_c; \mathbf{n}_i). \quad (4)$$

Функция f зависит от взаимного расположения ортов наблюдателя \mathbf{e}_n , Солнца \mathbf{e}_c и орта нормали \mathbf{n}_i к i -й грани; $\gamma(\alpha)$ — фазовая функция яркости, зависящая от угла фазы α (Солнце—астероид—наблюдатель).

В дальнейшем будем считать величину $\gamma(\alpha)$ постоянной и равной γ_k в пределах k -й фотометрической кривой ($k = 1, 2, \dots, K$).

В качестве первого приближения для функции f можно взять закон Ломмеля—Зеелигера

$$f = \frac{E}{\pi} \cdot \frac{\cos \iota \cdot \cos \varepsilon}{\cos \iota + \cos \varepsilon}, \quad (5)$$

где ι, ε — углы падения и отражения света (если $\iota \geq 90^\circ$ или $\varepsilon \geq 90^\circ$, то $f = 0$); E — нормальная освещенность поверхности. В дальнейшем речь будет идти о фотометрических кривых, приведенных к единичным расстояниям (1 а. е.) «астероид—наблюдатель», «астероид—Солнце». Тогда $E \approx \approx 135\,000$ лк [7].

Более адекватной для неровных поверхностей является теоретическая формула Акимова

$$f = \frac{E}{2\pi} (\cos\varphi)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{\pi-\alpha} \left(\lambda - \frac{\alpha}{2}\right)\right), \quad (6)$$

приведенная здесь с точностью до постоянного множителя [1], где φ и λ — фотометрические широта и долгота отражающего участка (рис. 2).

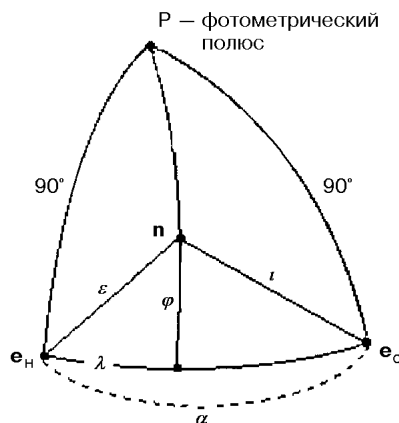


Рис. 2. Расположение орта нормали \mathbf{n} относительно ортов наблюдателя \mathbf{e}_n и Солнца \mathbf{e}_c

Нормировочный коэффициент $1/(2\pi)$ выбран так, что при $\alpha = 0$ формулы (6) и (5) совпадают.

Если обозначить через f_{kji} функцию f для i -й грани модели в j -й точке k -й фотометрической кривой, то теоретическое выражение для силы света, отраженного моделью в момент t_{kj} , будет равно

$$I_{kj} = \gamma_{\kappa} \sum_{i=1}^N f_{kji} \cdot S_i. \quad (7)$$

С другой стороны, зная из наблюдений приведенную звездную величину астероида m_{kj} в момент t_{kj} , можно найти соответствующую силу света I_{kj}^* по формуле

$$I_{kj}^* = 6.211 \cdot 10^{16} \exp(-0.921 m_{kj}). \quad (8)$$

Введем средневзвешенный параметр совпадения теоретических и наблюдаемых кривых блеска:

$$F = \left(\sum_{\kappa=1}^K \gamma_{\kappa}^{-2} \sum_{j=1}^{M_k} (I_{kj} - I_{kj}^*)^2 \right) / \sum_{\kappa=1}^K \gamma_{\kappa}^{-2}, \quad (9)$$

где M_k — число точек в k -й фотометрической кривой, K — число фотометрических кривых. Как показано расчетами и анализом фотометрических кривых астероидов (в звездных величинах), с возрастанием угла фазы α происходит медленное уменьшение блеска в максимуме и существенно более быстрое уменьшение блеска в минимуме, за счет чего амплитуда изменения блеска увеличивается [2, 8, 16]. В настоящей работе звездные величины пересчитаны в аддитивную величину — силу отраженного света I . В этом случае значения I_{\min} на всех кривых достаточно близки к нулю, в то время как I_{\max} существенно уменьшаются с увеличением α , что приводит к общему уменьшению амплитуды изменения силы света I . Весовые коэффициенты γ_{κ}^{-2} призваны «уравнять» малоамплитудные кривые при больших углах фазы α с кривыми, полученными в оппозиции. С учетом (7) получим

$$\begin{aligned} F &= \left[\sum_{\kappa=1}^K \sum_{j=1}^{M_k} \left(\sum_{i=1}^N f_{kji} S_i - I_{kj}^* \gamma_{\kappa}^{-1} \right)^2 \right] / \sum_{\kappa=1}^K \gamma_{\kappa}^{-2} = \\ &= \left(\sum_{i,p=1}^N a_{ip} S_i S_p - 2 \sum_{i=1}^N b_i S_i + c \right) / \sum_{\kappa=1}^K \gamma_{\kappa}^{-2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$a_{ip} = \sum_{\kappa=1}^K \sum_{j=1}^{M_k} f_{kji} f_{kjp}, \quad b_i = \sum_{\kappa=1}^K \gamma_{\kappa}^{-1} \sum_{j=1}^{M_k} f_{kji} I_{kj}^*, \quad c = \sum_{\kappa=1}^K \gamma_{\kappa}^{-2} \sum_{j=1}^{M_k} (I_{kj}^*)^2. \quad (11)$$

Если величины γ_{κ} для всех кривых блеска известны, то для конкретных параметров ориентации оси вращения и угловой скорости величина F зависит только от площадей S_i граней модели. Поскольку квадратичная функция $F(S_1; S_2; \dots; S_N)$ по смыслу задачи является положительно определенной, ее минимизация допускает применение симплекс-метода [6]. Заметим, что если отражательные свойства всех граней одинаковы, то величины S_i подчиняются условию замкнутости $\sum_{i=1}^N S_i \cdot \mathbf{n}_i^0 = 0$. Однако, предполагая возможность различия отражательных свойств разных участков поверхности, мы не учитывали данное условие, т. е. минимизация проводилась без дополнительных ограничений (учитывались только естественные ограничения $S_i \geq 0$).

Определение оптимального набора $\{S_i\}$ в этом случае сводится к нахождению седловой точки функции Лагранжа, которая при отсутствии дополнительных ограничений совпадает с функцией $F(S_1; S_2; \dots; S_N)$. Условия существования минимума примут вид

$$\frac{\partial F}{\partial S_i} \geq 0; \quad \frac{\partial F}{\partial S_i} \cdot S_i = 0, \quad S_i \geq 0, \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$.

Учитывая (10) и вводя дополнительные переменные v_i ($v_i \geq 0$), приведем систему (12) к каноническому виду:

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^N a_{ip} S_p - v_i = b_i, \\ v_i S_i = 0, \quad S_i \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (13)$$

Для нахождения оптимальной вершины выпуклого многогранника (13) применим метод искусственного базиса, т. е. минимизируем сумму искусственных переменных:

$$\min_{S \in X} \sum_{i=1}^N z_i, \quad (14)$$

где

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^N a_{ip} S_p - v_i + z_i = b_i, \\ v_i S_i = 0, \quad S_i \geq 0, \quad v_i \geq 0, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (15)$$

Симплекс-минимизация суммы (14) до нуля с учетом (15) автоматически приводит в оптимальную вершину выпуклого многогранника (15). Таким образом, для выбранного набора параметров $\{\gamma_k\}$ определяется оптимальный набор площадей $\{S_i\}$ и вычисляется по формулам (10), (11) значение F .

Коэффициенты γ_k экспоненциально зависят от угла фазы α_k [1] и определяются формулой

$$\gamma_k = m \cdot \exp(-\mu \alpha_k) + g \cdot \exp(-\nu \alpha_k), \quad (16)$$

где m — альbedo диффузного рассеяния, g — интенсивность оппозиционного пика. Для выбранных нами кривых блеска астероида Эрос $\alpha_k > 0.1$ рад, и вклад оппозиционного эффекта в блеск астероида пренебрежимо мал, поэтому второе слагаемое из (16) в дальнейшем не рассматривалось.

Заметим, что величина альbedo в «укороченной» формуле

$$\gamma_k = m \exp(-\mu \alpha_k) \quad (17)$$

может быть выбрана произвольно, так как при известном блеске астероида увеличение альbedo автоматически приводит к соответствующему уменьшению площадей $\{S_i\}$ и величина F не изменяется. Коэффициент μ может несколько варьировать для астероидов разных типов, поэтому при вычислениях выберем интервал, заведомо содержащий μ , внутри которого параметр F минимизируется по μ с применением для каждого значения μ симплекс-процедуры (10)—(15).

В итоге получим зависимость минимизированного по μ и $\{S_i\}$ значения F_{\min} от ориентации оси вращения Ω и угловой частоты вращения ω :

$$F_{\min} = F_{\min}(\alpha_{\Omega}; \delta_{\Omega}; \omega).$$

Таблица 1. Значения F_{\min} (10^{18} кд²) в окрестности минимума (вычисления проведены для модели «прямоугольный параллелепипед»)

δ_{Ω}	α_{Ω}				
	276°	278°	280°	282°	284°
34°	101	95.3	141	239	405
32°	57.0	26.8	37.5	115	261
30°	71.1	19.9	2.64	42.0	166
28°	173	107	69.6	77.4	153
26°	381	318	280	277	313

Таблица 2. Значения F_{\min} (10^{21} кд²) в окрестности второго конца оси вращения (вычисления проведены для модели «прямоугольный параллелепипед»)

δ_{Ω}	α_{Ω}				
	90°	95°	100°	105°	110°
-45°	2.25	2.05	1.93	1.91	2.12
-50°	1.94	1.74	1.65	1.75	1.97
-55°	1.78	1.67	1.61	1.70	1.96
-60°	1.92	1.75	1.71	1.79	2.02
-65°	2.18	2.02	1.98	2.06	2.25

Для каждого набора значений α_{Ω} , δ_{Ω} проведем линейную минимизацию величины F_{\min} по ω на интервале $(\omega_0 - \Delta\omega; \omega_0 + \Delta\omega)$, где величина $\Delta\omega$ выбирается из соотношения

$$\Delta\omega \cdot \max_{k=1, \dots, K} |t_k - t_0| \approx \frac{\pi}{2}.$$

Построим сетку значений

$$F_{\min} = F_{\min}(\alpha_{\Omega}; \delta_{\Omega}). \quad (18)$$

По этой сетке оптимальная ориентация оси вращения астероида может быть выбрана визуально.

Для проверки описанной методики с использованием орбитальных данных астероида 433 Эрос были построены 12 модельных фотометрических кривых в интервалах времени, соответствующих реальным кривым, рассмотренным ниже. Для упрощения расчетов использовалась простейшая форма модели — прямоугольный параллелепипед с площадями граней $S_1 = 2 \cdot 10^7$ м², $S_2 = 2 \cdot 10^7$ м², $S_3 = 15 \cdot 10^7$ м². Орт оси вращения перпендикулярен к большей грани и имеет ориентацию $\alpha_{\Omega} = 280^\circ$, $\delta_{\Omega} = 30^\circ$. По модельным кривым ориентация оси вращения и размеры модели восстанавливаются с высокой точностью. Например, для исходной ориентации величина $F_{\min} = 2.64 \cdot 10^{18}$ кд², а при изменении δ_{Ω} всего на два градуса дуги ($\alpha_{\Omega} = 280^\circ$; $\delta_{\Omega} = 32^\circ$) получим $F_{\min} = 3.75 \cdot 10^{19}$ кд², т. е. величина F_{\min} увеличилась на порядок (табл. 1). Расчеты для диаметрально противоположных ориентаций орта Ω (табл. 2) дают размытый минимум со значениями F_{\min} , на несколько порядков большими, чем для табл. 1. Для исходной ориентации оси вращения значения S_1 , S_2 , S_3 и фотометрические кривые восстанавливаются с точностью до трех-четырех первых значащих цифр.

Таким образом, модельный расчет подтверждает работоспособность метода.

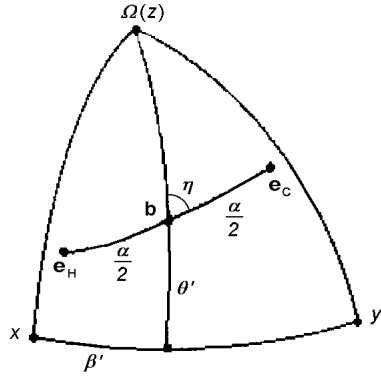


Рис. 3. Определение параметров, описывающих отражение света астероидом

МИНИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРА СОГЛАСИЯ КРИВЫХ БЛЕСКА

Будем, как и ранее, считать, что параметры ориентации α_Ω , δ_Ω и угловая скорость вращения астероида ω зафиксированы. Тогда на любой момент времени можно определить положение ортов e_n , e_c относительно модели. В общем случае для этого нужно указать углы β' , θ' , определяющие положение биссектрисы b фазового угла относительно астероидоцентричной системы координат, угол фазы α и угол η (рис. 3, где дана сферическая проекция указанных ортов и углов). Итак, в общем случае сила отраженного к наблюдателю света зависит от четырех параметров:

$$I = I(\alpha; \eta; \beta'; \theta'). \quad (19)$$

Пусть в некоторые моменты времени t_i , t_j сила отраженного к наблюдателю света равна соответственно I_i^* , I_j^* . Если условия отражения света изобразить точкой фазового пространства $M(\alpha; \eta; \beta'; \theta')$, то расстояние ρ_{ij} между i -й и j -й точками можно записать, например, так:

$$\rho_{ij} = \sqrt{(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\beta'_i - \beta'_j)^2 + (\theta'_i - \theta'_j)^2} \quad (20)$$

(возможно введение весовых коэффициентов перед слагаемыми). Естественно считать, что при близости геометрических условий отражения света в моменты t_i , t_j , т. е. при $\rho_{ij} \approx 0$, выполняется соотношение $I_i^* \approx I_j^*$. Введем параметр согласия кривых:

$$F_c = \sum_{i,j=1}^M (I_i^* - I_j^*)^2 \cdot \xi(\rho_{ij}), \quad (21)$$

где M — общее число точек во всех фотометрических кривых, $\xi(\rho_{ij})$ — функция, равная единице при $\rho_{ij} = 0$ и быстро стремящаяся к нулю при возрастании ρ_{ij} , например,

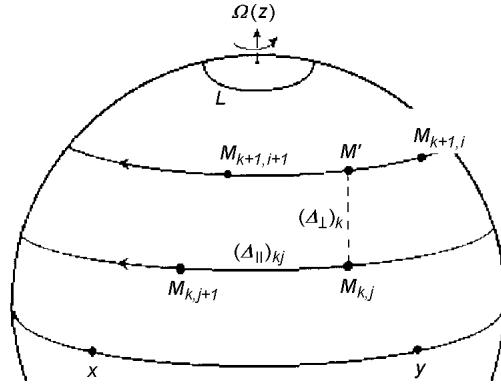
$$\xi(\rho_{ij}) = \exp(-\rho_{ij}^2),$$

или

$$\xi(\rho_{ij}) = \begin{cases} 1 - \rho_{ij}^2 & (\rho_{ij} < 1), \\ 0 & (\rho_{ij} \geq 1). \end{cases} \quad (22)$$

Если фазовые точки достаточно плотно заполняют объем фазового пространства, то, находя минимум величины F_c по параметрам α_Ω , δ_Ω , ω , можно определить оптимальную ориентацию астероида. На практике, однако, нескольких фотометрических кривых астероида недостаточно для

Рис. 4. К определению параметра согласия кривых блеска. Траектории зеркальной точки на сферическом отображении астероида



заполнения четырехмерного фазового пространства. Таким образом, возникает вопрос о переходе к фазовому пространству меньшей размерности.

Рассмотрим в качестве абстрактного примера «зеркальный» астероид. При зеркальном отражении сила отраженного света не зависит от углов α , η и определяется только положением зеркально отражающей точки, т. е. углами β' , θ' . Если пренебречь изменением ортов \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_c , \mathbf{b} за время, равное периоду вращения астероида, то траектория зеркальной точки по сферическому отображению астероида для каждой фотометрической кривой представляет собой дугу малого круга, проходящую в сторону, противоположную вращению астероида (рис. 4).

Для упрощения расчетов формула (21) была модернизирована:

$$F_c = F_{\parallel} + F_{\perp}, \quad (23)$$

где

$$F_{\parallel} = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{M_k-1} \frac{(I_{k,j+1}^* - I_{k,j}^*)^2}{(\Delta_{\parallel})_{kj}^2}. \quad (24)$$

Величина F_{\parallel} — это сумма, вычисляемая «вдоль» фотометрических кривых; $(\Delta_{\parallel})_{kj}$ — это угловое расстояние между двумя соседними точками k -й кривой, I_{kj}^* , $I_{k,j+1}^*$ — значения силы света в этих точках (на рис. 4 эти точки обозначены как M_{kj} , $M_{k,j+1}$).

Величина F_{\perp} — сумма, вычисляемая между точками соседних кривых:

$$F_{\perp} = \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j=1}^{M_k} \frac{(I_{kj}^* - I_{k+1,j}^*)^2}{(\Delta_{\perp})_k^2 + (\Delta_0)^2}. \quad (25)$$

Здесь, как и выше, величина I_{kj}^* — сила света в j -й точке k -й кривой блеска (на рис. 4 это — точка M_{kj}), величина $I_{k+1,j}^*$ — значение силы света, интерполированное по соседней, $k+1$ -й кривой для точки M' , лежащей на одном меридиане с точкой M_{kj} (здесь предполагается, что кривые блеска и соответствующие траектории нумерованы в порядке возрастания астероидоцентричной широты). Величина $(\Delta_{\perp})_k$ — угловое расстояние между k -й и $k+1$ -й траекториями. Заметим, что при определенных ориентациях орта оси вращения Ω некоторые траектории могут практически совпадать ($(\Delta_{\perp})_k \approx 0$). Слагаемое $(\Delta_0)^2$ в знаменателе должно в этом случае воспрепятствовать неоправданному увеличению суммы (25). В наших расчетах было эмпирически выбрано $(\Delta_0)^2 = 0.004$.

Таблица 3. Значения параметра согласия F_c (10^{29} кд²) для кривых блеска модели «вытянутый эллипсоид вращения»

δ_Ω	α_Ω											
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
90°	2.70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
60°	1.83	3.06	16.9	31.6	41.0	25.1	12.5	3.93	1.61	1.54	1.48	1.55
30°	1.72	2.15	7.25	13.1	94.0	63.1	9.89	8.69	16.8	6.39	4.88	2.60
0°	1.93	1.45	1.85	3.66	19.3	13.9	2.27	1.75	2.40	39.9	38.2	12.9
-30°	2.10	1.37	1.33	1.70	3.31	2.77	1.95	2.36	7.50	50.7	9.76	6.48
-60°	3.68	1.61	1.42	1.52	1.58	1.78	2.15	3.57	8.36	10.8	10.4	5.57
-90°	2.26	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Итак, для каждого набора параметров α_Ω , δ_Ω , ω , составляющих достаточно плотную сетку, вычисляется параметр F_c по формулам (23)—(25). Минимальное значение этого параметра соответствует оптимальной ориентации астероида.

Для проверки метода были вычислены 12 кривых блеска вытянутого зеркального эллипсоида вращения с полуосями $a = 15000$ м, $c = 10000$ м для параметров вращения $\alpha_\Omega = 60^\circ$, $\delta_\Omega = -30^\circ$, $\omega = 0.00033117$ с⁻¹. Для расчетов взяты использованные выше орбитальные данные астероида Эрос. Сила отраженного света вычислялась по формуле из [5]:

$$I = \frac{E_0}{4} \frac{a^2 c^4}{[c^2 + (a^2 - c^2)\cos^2\sigma]^2},$$

где a , c — большая и малая полуоси эллипсоида вращения, σ — угол между ортом \mathbf{b} и осью симметрии эллипсоида. Для этих модельных кривых блеска проводился весь цикл расчетов по формулам (23)—(25). Полученная в результате минимизации по ω зависимость $F_c(\alpha_\Omega, \delta_\Omega)$ представлена табл. 3. Из таблицы следует, что ориентация оси вращения, выбранная при построении кривых блеска, приблизительно восстановлена, хотя минимум нерезкий и значения величины F_c на противоположных концах оси вращения отличаются мало.

Отражение света поверхностью астероида носит ярко выраженный диффузный характер и сила отраженного света зависит от четырех параметров (19). Однако в оппозиции угол фазы α равен нулю; угол η в этом случае теряет смысл, так что сила отраженного света, как и для зеркальной модели, определяется лишь двумя параметрами β' , θ' :

$$I = I(\beta'; \theta') \quad (26)$$

(сила света зависит от положения «зеркальной» точки). Значит, если для каждого момента времени известно, какой блеск имел бы астероид в случае, когда орты \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_c совпадают с ортом \mathbf{b} (т. е. когда блеск астероида приведен к нулевой фазе), возможно применение формул (23)—(25).

Для приведения блеска астероида к нулевой фазе представим зарегистрированную силу отраженного им света в виде

$$I^* = I_d + \Delta I, \quad (27)$$

где I_d — сила света, отраженного диффузно (в модельном приближении I_d определяется формулой (7)). ΔI — небольшая поправка, обусловленная недиффузным (квазизеркальным) компонентом отражения, который подтверждается наличием повторяющихся короткопериодических вариаций на

фотометрических кривых некоторых астероидов [9, 10]. С учетом (7) формула (27) примет вид

$$I_{kj}^* = \gamma_k \sum_{i=1}^N f_{kji} \cdot S_i + \Delta I_{kj}. \quad (28)$$

В оппозиции (при $\alpha = 0$) формула (6) для функции f примет вид

$$f_0 = \frac{E}{2\pi} \cos\varphi \cos\lambda = \frac{E}{2\pi} \cos\varepsilon.$$

Учитывая, что при $\alpha = 0$ $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_c = \mathbf{b}$, получим

$$f_0 = \frac{E}{2\pi} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}). \quad (29)$$

Тогда приведенная сила света в оппозиции определится формулой, аналогичной (28):

$$(I_{kj})_0 = \gamma_0 \sum_{i=1}^N (f_{kji})_0 \cdot S_i + \Delta I_{kj}, \quad (30)$$

где γ_0 — коэффициент отражения в оппозиции, величина $(f_{kji})_0$ вычисляется по формуле (29). Малая поправка ΔI_{kj} не подвергается преобразованию, так как при квазизеркальном отражении она мало зависит от α, ψ . Из (28), (30) следует

$$(I_{kj})_0 = I_{kj}^* + \sum_{i=1}^N [\gamma_0 (f_{kji})_0 - \gamma_k f_{kji}] S_i. \quad (31)$$

Все входящие в формулу (31) величины определялись для каждого набора параметров $\alpha_\Omega, \delta_\Omega, \omega$ при вычислении величины F_{\min} из (18). Следовательно, приведенные к нулевой фазе значения $(I_{kj})_0$ могут быть вычислены. Тогда параметр согласия фотометрических кривых F_c вычисляется, как и ранее, по формулам (23)—(25).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Для проверки метода были выбраны 12 фотометрических кривых астероида Эрос, полученных во время его оппозиции 1974—1975 гг. [14]. Даты наблюдений: 18.10.74, 10.11.74, 24.11.74, 06.12.74, 24.12.74, 04.01.75, 12.01.75, 23.01.75, 02.02.75, 12.02.75, 27.02.75, 19.03.75.

С использованием модели «диффузный 38-гранник» была составлена таблица значений функции $F_{\min}(\alpha_\Omega; \delta_\Omega)$ (18). В табл. 4 приведены значения F_{\min} в окрестности минимума. Таким образом, оптимальная ориентация оси вращения Эроса такова:

$$\alpha_\Omega = 10^\circ; \quad \delta_\Omega = 18^\circ. \quad (32)$$

Таблица 4. Значения F_{\min} (10^{22} кд²) в окрестности минимума (вычисления проведены для истинных кривых блеска астероида 433 Эрос; модель — выпуклый 38-гранник)

δ_Ω	α_Ω				
	5°	7.5°	10°	12.5°	15°
23°	2.15	2.02	2.14	2.53	3.01
20.5°	2.36	2.08	2.01	2.17	2.53
18°	2.45	2.14	1.96	2.01	2.26
15.5°	2.65	2.37	2.12	2.07	2.21
13°	3.04	2.77	2.47	2.26	2.23

Таблица 5. Значения F_{\min} (10^{23} кд²) в окрестности второго конца оси вращения (вычисления проведены для истинных кривых блеска астероида 433 Эрос; модель — выпуклый 38-гранник)

δ_{Ω}	α_{Ω}				
	150°	165°	180°	195°	210°
0°	5.86	4.47	2.95	2.01	2.04
-15°	3.44	2.51	2.02	1.59	1.96
-30°	2.34	1.96	1.71	2.09	3.34
-45°	2.08	1.77	2.07	3.15	4.28
-60°	2.36	3.96	2.84	3.21	4.12

Таблица 6. Значения параметра согласия F_c (10^{26} кд²) для истинных кривых блеска астероида 433 Эрос

δ_{Ω}	α_{Ω}											
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
90°	14.5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
60°	5.43	5.58	19.9	40.1	60.5	45.9	71.4	39.8	37.3	18.2	7.25	6.16
30°	4.27	5.07	6.07	48.9	221.	39.9	16.3	19.6	71.5	18.4	12.5	5.55
0°	5.26	5.73	10.8	25.1	49.9	8.10	6.51	5.38	8.51	22.4	63.4	9.64
-30°	14.0	22.6	109.	17.4	13.3	5.74	4.57	5.16	8.33	34.6	215.	33.5
-60°	81.0	38.5	40.5	21.9	8.05	6.03	5.88	5.25	21.2	48.4	70.4	58.5
-90°	25.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Сидерический период вращения оказался равным: $P = 5.2702^h \pm 0.0002^h$. В табл. 5 приведены результаты расчетов в окрестности второго конца оси вращения. Минимум в этой области обусловлен совпадением амплитуд изменения блеска при противоположных ориентациях оси вращения, но вследствие параллактического эффекта этот минимум слабо выражен, причем значения F_{\min} — на порядок больше, чем в табл. 4. Таким образом, направление вращения астероида определяется однозначно.

В точке минимума (32) величина F_{\min} равна $1.96 \cdot 10^{22}$ кд². Сравним это значение, например, с аналогичной величиной $2.47 \cdot 10^{22}$ кд² для ориентации оси вращения $\alpha_{\Omega} = 10^\circ$, $\delta_{\Omega} = 13^\circ$. Новое значение F_{\min} мало отличается от оптимального, что подтверждает вывод о невысокой точности определения оптимальной ориентации оси вращения (ошибку определения ориентации можно оценить величиной 5°). Нужно заметить, что простые модели, зависящие от двух-трех параметров, могут дать более высокую формальную точность (резкий минимум) именно в силу своей «жесткости», но значения F_{\min} при этом оказываются существенно больше, чем для многопараметрических моделей.

Были проведены также расчеты по минимизации параметра согласия фотометрических кривых F_c . В этом случае ориентация оси вращения определяется менее уверенно (см. табл. 6): минимум достигается в окрестности точки $\alpha_{\Omega} = 0^\circ$, $\delta_{\Omega} = 30^\circ$. Подробные расчеты показывают два соседних минимума ($\alpha_{\Omega} = 0^\circ$, $\delta_{\Omega} = 25^\circ$ или $\alpha_{\Omega} = 0^\circ$, $\delta_{\Omega} = 40^\circ$), причем во втором случае ориентация заметно отличается от значений (32). В значительной степени этот факт можно объяснить тем, что кривые блеска Эроса почти лишены недиффузной составляющей, проявляющей себя резкими изменениями блеска. Между тем, параметр согласия призван учитывать именно вариации

недиффузной составляющей, которые не могут быть объяснены диффузными моделями. Заметим еще, что самые большие значения величины F_c (например, в табл. 6 при $\alpha_\Omega = 0^\circ$, $\delta_\Omega = -60^\circ$ имеем $F_c = 81.0 \cdot 10^{26}$ кд²) получаются, когда орт оси вращения Ω почти совпадает с ортом \mathbf{b} (кривая L на рис. 4). В этом случае значения $\Delta_{||}$ из (24) весьма малы, и величина $F_{||}$ неоправданно увеличивается, что указывает на неоптимальность соответствующей ориентации орта Ω .

ВЫВОДЫ

1. Использование модели «диффузный многогранник» с большим числом граней позволяет добиться весьма точного совпадения теоретических и наблюдаемых кривых блеска астероида, однозначно выбрать истинное направление вектора угловой скорости на оси вращения. Для астероида 433 Эрос получены такие результаты: $\alpha_\Omega = 10^\circ$, $\delta_\Omega = 18^\circ$, $P = 5.2702^h$. Отметим, что полученные значения параметров весьма близки к точным значениям, полученным в ходе выполнения космической миссии NEAR [13]: $\alpha_\Omega = 11.3692^\circ \pm 0.003^\circ$; $\delta_\Omega = 17.2273^\circ \pm 0.006^\circ$; сидерический период вращения $P = 5.27025547^h$.

2. Вычисления с применением параметра согласия кривых блеска F_c обладают меньшей точностью, но могут быть полезными при исследовании астероидов, обладающих характерными особенностями кривых блеска.

1. Акимов Л. А. Отражение света Луной. I // Кинематика и физика небес. тел.—1988.—4, № 1.—С. 3—10.
2. Акимов Л. А., Лушичко Д. Ф., Шевченко В. Г. О законе рассеяния света поверхностью астероидов. Распределение яркости по диску // Астрон. вестник.—1992.—26, № 4.—С. 62—67.
3. Григорьевский В. М., Колесник С. Я. Определение размеров и формы астероидов по вариациям их блеска // Астрон. вестник.—1979.—13, № 4.—С. 219—223.
4. Коган А. Ю., Пименов К. Ю. Интерпретация кривых блеска малых планет // Письма в Астрон. журн.—1991.—17, № 9.—С. 850—856.
5. Колесник С. Я., Григорьевский В. М. Определение ориентации и формы «Пагеоса» // Наблюдения искусственных спутников Земли.—1978.—№ 18.—С. 211—225.
6. Корицунов Ю. М. Математические основы кибернетики. — М.: Энергия, 1980.—423 с.
7. Мартынов Д. Я. Курс практической астрофизики. — М.: Наука, 1967.—543 с.
8. Шевченко В. Г., Лушичко Д. Ф. Оптические свойства астероидов по данным фотометрии // Астрон. вестник.—1998.—32, № 3.—С. 250—263.
9. Blanco C., Catalana S. UVB photometry of Vesta // Icarus.—1979.—40, N 3.—P. 359—363.
10. Harris A. W., Young J. W. Asteroid lightcurve observations from 1981 to 1983 // Icarus.—1999.—142, N 1.—P. 173—201.
11. Kaasalainen M., Torppa J. Optimization methods for asteroid lightcurve inversion. I. Shape determination // Icarus.—2001.—153, N 1.—P. 24—36.
12. Kaasalainen M., Torppa J., Muinonen K. Optimization methods for asteroid lightcurve inversion. II. The complete inverse problem // Icarus.—2001.—153, N 1.—P. 37—51.
13. Miller J. K., Konopliv A. S., Antreasian P. G., et al. Determination of shape, gravity, and rotational state of asteroid 433 Eros // Icarus.—2002.—155, N 1.—P. 3—17.
14. Millis R. L., Bowell E., Thompson D. T. Five-color photometry of Eros // Icarus.—1976.—28, N 1.—P. 53—67.
15. Surdei A., Surdei J. Asteroid lightcurves, simulated by the rotation of a three-axes ellipsoid model // Astron. and Astrophys.—1978.—66, N 1-2.—P. 31—36.
16. Zappala V., Cellino A., Barucci A. M. An analysis of the amplitude—phase relationship among asteroids // Astron. and Astrophys.—1990.—231, N 2.—P. 548—560.

Поступила в редакцию 09.09.02