

Действие электрического поля на квантованные вихри в He II

В.Д. Нацик

*Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: Natsik@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 10 июля 2007 г.

Изучены электрическая поляризация и взаимодействие с электрическим полем квантованных вихрей в сверхтекучей бозе-жидкости. Рассмотрено два вида поляризации вихрей, оба они обусловлены действием центробежных сил на атомы жидкости при их азимутальном движении вокруг линии вихря. Во-первых, под действием этих сил атомы приобретают дипольные моменты (инерционная поляризация в отсутствие внешнего поля), и вокруг линии вихря возникает неоднородное симметричное распределение плотности поляризации. При этом интегральный дипольный момент у вихря отсутствует, но каждый элемент вихревой линии несет на себе квадрупольный момент. Во-вторых, действие центробежных сил приводит к неоднородному распределению атомной плотности вокруг линии вихря, поэтому плотность поляризации жидкости во внешнем электрическом поле также неоднородна вблизи этой линии, а отдельный элемент вихревой линии приобретает эффективный дипольный момент, пропорциональный полю (индукционная поляризация). Получены аналитические выражения для плотности поляризации вокруг прямолинейных и кольцевых вихревых линий и вычислены эффективные дипольные и квадрупольные моменты таких вихрей. Проанализировано распределение пондеромоторных сил, действующих на сверхтекучую жидкость с квантованными вихрями во внешнем электрическом поле, и найдены обусловленные полем добавки к энергии вихрей. Численные оценки обсуждаемых эффектов приведены для He II.

Вивчено електричну поляризацію та взаємодію з електричним полем квантованих вихорів у надплинній бозе-рідині. Розглянуто два види поляризації вихорів, обидва вони обумовлені дією відцентрових сил на атоми рідини при їх азимутальному русі навколо лінії вихору. По-перше, під дією цих сил атоми набувають дипольних моментів (інерційна поляризація у відсутності зовнішнього поля), і навколо лінії вихору виникає неоднорідний симетричний розподіл густини поляризації, при цьому інтегральний дипольний момент у вихорі відсутній, але кожний елемент лінії вихору несе на собі квадрупольний момент. По-друге, дія відцентрових сил призводить до неоднорідного розподілу атомної густини навколо лінії вихору, тому густина поляризації рідини у зовнішньому електричному полі також неоднорідна поблизу цієї лінії, а окремий елемент лінії вихору набуває ефективний дипольний момент, який пропорційний полю (індуктивна поляризація). Одержано аналітичні вирази для густини поляризації навколо прямолінійних і кільцеподібних вихрових ліній та обчислено ефективні дипольні і квадрупольні моменти таких вихорів. Проаналізовано розподіл пондеромоторних сил, котрі діють на надплинну рідину з квантованими вихорами у зовнішньому електричному полі, та знайдено обумовлені полем добавки до енергії вихорів. Числові оцінки обговорених ефектів приведено для He II.

PACS: 67.40.–w Бозонное вырождение и сверхтекучесть ^4He ;
67.40.Vs Вихри и турбулентность.

Ключевые слова: сверхтекучий гелий, квантованные вихри, электрическое поле, поляризация, пондеромоторные силы.

Введение

Недавно опубликованные [1–4] результаты экспериментального изучения электрической активности жидкого ^4He свидетельствуют о качественном изменении электрофизических свойств этой жидкости при переходе из нормального в сверхтекучее состояние ниже λ -точки ($T > T_\lambda$ — нормальная фаза, He I; $T < T_\lambda$ — сверхтекучая фаза, He II). В частности, весьма существенно отличаются физические процессы, возбуждаемые в He II и He I действием переменного низкочастотного и высокочастотного электрического поля. Неоднородная поляризация He II низкочастотным (порядка 10^3 Гц) электрическим полем возбуждает в нем волну второго звука, а облучение высокочастотной (порядка 10^{11} Гц) неоднородной электромагнитной волной сопровождается резонансным поглощением при значении круговой частоты волны $\omega = \omega_{\text{res}} \approx \Delta/\hbar$, где \hbar — постоянная Планка, а Δ — величина ротонной щели в энергетическом спектре He II. В нормальной фазе He I аномалии такого типа исчезают, и электрофизические свойства этой фазы не имеют существенных особенностей. Последовательная и непротиворечивая физическая интерпретация этих эффектов в настоящее время отсутствует.

Цель данной статьи — обсудить одну из возможных причин существования эффектов такого типа, которая связана с электрической поляризацией и особенностями взаимодействия с электрическим полем квантованных вихрей в He II. Возможность зарождения и длительного существования большого числа квантованных вихревых возбуждений является одним из фундаментальных свойств He II как квантовой сверхтекучей бозе-жидкости, в нормальной фазе He I эти возбуждения отсутствуют [5–7]. Некоторые простейшие проявления электрической активности вихрей были описаны в публикации автора [8].

1. Структура и электрическая поляризация вихрей

Квантованный вихрь в сверхтекучей жидкости представляет собой стационарное азимутальное течение вокруг некоторой линии, которое обладает отличной от нуля и квантованной циркуляцией [5–7]. В качестве простейшего примера рассмотрим прямолинейный одноквантовый вихрь, когда поле скоростей течения $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ имеет двумерный характер и описывается формулой

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}) = \pm [\mathbf{s}\mathbf{v}] \frac{\hbar}{mr}, \quad \mathbf{r} = \nu r. \quad (1)$$

Здесь использованы обозначения: m — масса атома жидкости; \mathbf{r} — радиус-вектор, отсчитываемый от линии вихря в перпендикулярной ей плоскости; \mathbf{s} и ν — орты линии вихря и вектора \mathbf{r} соответственно; знак

« \pm » отражает возможность существования вихрей с противоположными направлениями циркуляции жидкости (положительные и отрицательные вихри).

С точки зрения нелинейной гидродинамики вихревое течение (1) является топологическим солитоном, стационарный характер и высокая устойчивость вихря в сверхтекучей жидкости обеспечиваются квантованностью его топологического заряда (роль кванта играет величина \hbar/m).

Главным физическим фактором, определяющим электрическую активность вихря, являются центробежные силы, которые действуют на атомы жидкости, совершающие коллективное азимутальное движение (1) вокруг его линии. На расстоянии r от линии вихря атомы имеют угловую скорость $\omega_s(r) = v_s(r)/r$ и испытывают действие центробежной силы

$$\mathbf{f}^{(a)}(r) = m\omega_s^2(r) \mathbf{r} = \nu \frac{\hbar^2}{mr^3}. \quad (2)$$

Наличие центробежных сил, распределенных вокруг линии вихря согласно (2), приводит к двум следствиям, учет которых необходим при описании электрической активности вихрей. Во-первых, благодаря их действию вихрь приобретает специфическую электрическую поляризацию, которая существует даже в отсутствие внешнего электрического поля (спонтанная поляризация); ранее этот эффект был описан в работе автора [8]. Во-вторых, действие центробежных сил приводит к неоднородному распределению давления и плотности атомов в перпендикулярном к линии вихря направлении [6,7], поэтому макроскопическое распределение поляризации жидкости, обусловленной внешним электрическим полем, также имеет неоднородный характер вблизи линии вихря, а вихрь в целом приобретает некоторый эффективный дипольный момент, пропорциональный величине электрического поля (индуцированная поляризация).

Взаимодействие поляризованных вихрей с приложенным к сверхтекучей жидкости электрическим полем должно приводить к целому ряду специфических электрофизических и гидродинамических эффектов, исчезающих выше λ -точки. Детальный анализ таких эффектов будет предложен в дальнейшем в отдельных публикациях. В данной статье ограничимся только описанием двух отмеченных выше видов поляризации отдельных вихрей, распределения пондеромоторных сил, возникающих в жидкости благодаря такой поляризации, и влияния электрического поля на энергию вихрей.

1.1. Неоднородность атомной плотности вокруг линии вихря

Качественное представление о структуре квантованного вихря можно получить, воспользовавшись

решением квантовомеханической задачи о прямолинейном вихре в почти идеальном бозе-газе [9]. Это решение описывает как поле скоростей (1), так и распределение атомной плотности $n(r)$ вокруг линии вихря: $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ определяется градиентом фазы, а $n(r)$ — квадратом модуля волновой функции газа. Важным параметром задачи является характерный размер сердцевинки вихря

$$r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}mc_1}, \quad (3)$$

где c_1 — скорость линейных волн плотности (первого звука) в газе. На малых расстояниях от линии вихря ($r < r_0$) плотность атомов $n(r)$ стремится к нулю как $n(r) \approx 0,3 n_0 (r/r_0)^2$, а на больших расстояниях описывается асимптотическим выражением

$$n(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right], \quad r \gg r_0; \quad (4)$$

здесь n_0 — среднее значение атомной плотности.

Известно [6,7], что аналогичную структуру имеет квантованный вихрь и в бозе-жидкости. В этом случае для описания вихрей используются уравнения двухжидкостной гидродинамики: предполагается, что полная плотность жидкости $\rho \equiv mn = \rho_s + \rho_n$ состоит из плотностей сверхтекучей ρ_s и нормальной ρ_n компонент, а квантованное вихревое течение (1) возникает только в первой из них. Обычно в литературе основное внимание уделяется обсуждению неоднородного распределения давления $p(r)$ вокруг линии вихря: баланс градиента давления и плотности центробежных сил $n_s(r) f^{(a)}(r) (n_s = m^{-1}\rho_s)$ обеспечивает отсутствие радиального потока жидкости в стационарном вихре. Но при анализе поляризационных свойств вихрей основной интерес представляет распределение атомной плотности $n(r)$. На данном этапе исследования не будем обсуждать температурную зависимость электрофизических свойств вихрей, которая обусловлена температурной зависимостью плотности сверхтекучей компоненты ρ_s : $\rho_s \rightarrow 0$ при $T \rightarrow T_\lambda$ и совпадает с полной плотностью ρ при $T \rightarrow 0$. Поэтому ограничимся рассмотрением достаточно низких температур $T \ll T_\lambda$ и будем считать $n_s \approx n = m^{-1}\rho$.

В гидродинамическом приближении с учетом приведенного выше замечания для определения функции $n(r)$ можно использовать систему уравнений:

$$\nabla p(r) = n(r) \mathbf{f}^{(a)}(r), \quad (5)$$

$$p = p_0 + mc_1^2(n - n_0). \quad (6)$$

Первое из них является условием механического равновесия жидкости в радиальном по отношению к линии вихря направлении; второе представляет собой уравнение состояния жидкости при малых отклонени-

ях плотности $n(r)$ от ее однородного значения n_0 , в нем сжимаемость выражена через скорость линейных волн плотности c_1 . Из соотношений (2), (5) и (6) легко получить простое уравнение для функции $n(r)$:

$$\frac{d}{dr} n(r) = \frac{2r_0^2}{r^3} n(r). \quad (7)$$

Как и в случае бозе-газа, параметр r_0 связан со скоростью первого звука c_1 соотношением (3). Однако следует отметить, что модель почти идеального бозе-газа предполагает выполнение неравенства $r_0 \gg a = n_0^{-1/3}$, тогда как численная оценка r_0 для He II ($c_1 \approx 2,36 \cdot 10^4$ см/с, $m \approx 7 \cdot 10^{-24}$ г, $n_0 \approx 2 \cdot 10^{22}$ см $^{-3}$) приводит к неравенству $r_0 \approx 0,4 \text{ \AA} \ll a \approx 3,7 \text{ \AA}$.

Решение уравнения (7), удовлетворяющее граничному условию $n(r \rightarrow \infty) = n_0$, имеет вид

$$n(r) = n_0 \exp \left[- \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Таким образом, вблизи линии вихря $n(r) < n_0$, т.е. атомы жидкости вытесняются из сердцевинки вихря на периферию действием центробежных сил. Формально на линии вихря атомная плотность обращается в нуль, но распределение (8) получено в приближении линейной гидродинамики и вместе с выражением (1) применимо только при достаточно больших значениях $r \gg r_0$ (см. также обсуждение этого вопроса в книге Р. Фейнмана [10]). Вместе с тем отметим, что использование выражения (8) при вычислениях интегральных характеристик вихря в ряде случаев оправдано тем, что позволяет избавиться от нефизических расходимостей, обусловленных сингулярностью $v_s(r)$ при $r \rightarrow 0$.

В области применимости гидродинамического приближения распределение атомной плотности в жидкости (8) асимптотически совпадает с формулой (4), полученной в результате решения квантовой задачи для модели почти идеального бозе-газа.

Общепринятым считается мнение, что гидродинамика применима для описания явлений и эффектов с пространственными масштабами, значительно превышающими средние межатомные расстояния в жидкости $a = n_0^{-1/3}$. Поэтому в литературе часто высказывается сомнение в физической корректности формулы (1) и полученных из нее в гидродинамическом приближении следствий в области $r < r_i \simeq a$. Параметр r_i играет роль внутреннего радиуса вихря (радиус его сердцевинки): в настоящее время принято считать, что при описании вихрей в He II теорфизические оценки и экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются при значениях $r_i \approx 2 \text{ \AA}$ [6,7]. В определенных физических ситуациях (например, при одновременном существовании множества вихрей) поле

скоростей (1) следует ограничивать также внешним радиусом r_e и область применимости этой формулы сводится к неравенству $r_i < r < r_e$ [5]*.

Наряду с распределением (8) атомной плотности вокруг линии квантованного вихря нам в дальнейшем понадобится еще одна важная характеристика его структуры, которую можно назвать интегральной атомной дилатацией вихря $N^{(V)}$ — это полное количество атомов, вытесненных центробежными силами из области $0 < r < r_e$. Вследствие однородного распределения атомной плотности вдоль линии прямолинейного вихря его атомная дилатация будет пропорциональной длине вихревой линии L :

$$N^{(V)} = L\bar{\delta}, \quad (9)$$

$$\bar{\delta} = \int_0^{r_e} d^2\mathbf{r}[n_0 - n(r)] = 2\pi n_0 r_0^2 I_1\left(\frac{r_e}{r_0}\right), \quad (10)$$

$$I_1\left(\frac{r_e}{r_0}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\left(\frac{r_e}{r_0}\right)^2} dx \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right] \approx \ln \frac{r_e}{r_0}, r_e \gg r_0.$$

Величина $\bar{\delta}$ имеет смысл атомной дилатации единицы длины вихря.

Приведенное выше описание структуры прямолинейного вихря довольно легко обобщается на уровне полуколичественных оценок на более сложный случай квантованных вихревых колец, которые также являются элементарными нелинейными возбуждениями квантовой жидкости и широко обсуждаются в теории сверхтекучести [5–7]. Для вихревой линии произвольной формы распределение скоростей $\mathbf{v}_s(\mathbf{R})$ имеет трехмерный характер (\mathbf{R} — трехмерный радиус-вектор) и описывается формулой [9]

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{R}) = \mathbf{v}_s(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) = \frac{\hbar}{2m} \int dl \frac{[\mathbf{s} \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)]}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_V|^3}. \quad (11)$$

Здесь l — параметр длины вдоль линии вихря, $\mathbf{R}_V = \mathbf{R}_V(l)$ и $\mathbf{s} = \mathbf{s}(l)$ — соответственно радиус-вектор точек этой линии и единичный вектор касательной к ней. На малых расстояниях от линии вихря $|\mathbf{R} - \mathbf{R}_V| \ll r_c$, где r_c — радиус ее кривизны, поля скоростей $\mathbf{v}_s(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)$, центробежных сил $\mathbf{f}^{(a)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)$ и атомной плотности $n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)$ имеют двумерный ха-

рактер и достаточно хорошо описываются формулами (1), (2) и (8). Если линия вихря имеет форму кольца радиусом r_c , то вдали от центра кольца ($|\mathbf{R} - \mathbf{R}_V| \gg r_c$) эти поля весьма быстро убывают, и вкладом этой области в интегральные характеристики вихря можно пренебречь. Например, при вычислении интегральной атомной дилатации кольца $N^{(r)}$ можно использовать результат, полученный при анализе прямолинейного вихря, полагая $L = 2\pi r_c$ и $r_e \approx r_c$:

$$N^{(r)} = \int d^3\mathbf{R}[n_0 - n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)] \approx 4\pi^2 n_0 r_0^2 r_c \ln \frac{r_c}{r_0}. \quad (12)$$

Таким образом, квантованный вихрь в сверхтекучей жидкости является устойчивым нелинейным дилатационно-вихревым возбуждением (солитонном), который несет на себе квант циркуляции поля скоростей и интегральную дилатацию поля плотности. Эти свойства вихрей являются определяющими при анализе их влияния на электрофизические свойства жидкости.

1.2. Спонтанная поляризация вихря (SP-поляризация)

Центробежная сила (2), которая действует на атомы жидкости при их азимутальном движении вокруг линии вихря, должна приводить к смещению атомных ядер относительно центров масс электронных оболочек, если не считать связь между ними абсолютно жесткой. В результате такого смещения возникает дипольная поляризация атомов и неоднородная макроскопическая поляризация всего массива жидкости, вовлеченного в неоднородное вихревое течение [8]: SP-поляризация вихря является одним из проявлений эффекта инерционной поляризации диэлектрика [12], напоминающего давно известный в физике металлов эффект Стюарта–Толмена [13].

В диэлектрической жидкости контактное взаимодействие атомов друг с другом и с внешними телами происходит через их электронные оболочки. Поэтому естественно считать, что условия, контролирующие течение жидкости, задают, в первую очередь, движение электронных оболочек атомов. Тогда конфигурация атомных ядер определяется балансом действующих на них сил инерции и сил взаимодействия с электронными оболочками. Согласно этим соображениям, будем считать, что поле скоростей (1) или (11) описывает движение центров масс электронных обо-

* И.Н. Адаменко обратил внимание автора на возможность гидродинамического (континуального) описания квантовой жидкости и в объемах, меньших среднего межатомного расстояния [11]. При этом вследствие квантовой делокализации атомов в такой жидкости роль атомной плотности $n(r)$ в ней будет играть распределение квантовомеханической плотности вероятности для центров атомов, которая имеет физический смысл и на малых по сравнению с межатомным расстояниями. По-видимому, именно данное обстоятельство обеспечивает хорошее согласие с экспериментом многих теоретических результатов, полученных при описании He II в рамках гидродинамики, даже при их экстраполяции на расстояния порядка и меньше межатомных.

лочек атомов жидкости, а смещения ядер $\mathbf{u}(r)$ должны определяться соотношением $k\mathbf{u}(r) = \mathbf{f}^{(N)}(r) = m_N \omega_s^2(r)\mathbf{r}$, где m_N — масса ядра, а k — коэффициент упругости для силовой связи ядра с электронной оболочкой. Так как масса ядра близка к массе атома, то действующая на ядро центробежная сила $\mathbf{f}^{(N)}$ практически совпадает с силой (2): $m_N \approx m$, $\mathbf{f}^{(N)} \approx \mathbf{f}^{(a)}$. Смещения $\mathbf{u}(r)$ приводят к появлению на атомах дипольных моментов $\mathbf{d}^{(a)}(r) = Ze\mathbf{u}(r) = Ze k^{-1} \mathbf{f}^{(a)}(r)$. (Z — число электронов в оболочке и протонов в ядре, e — модуль элементарного заряда). Легко установить связь коэффициента k с коэффициентом электрической поляризации атома α : с одной стороны, в однородном электрическом поле \mathbf{E} на сферически симметричном атоме возникает дипольный момент $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{E}$; с другой стороны, этот момент можно также определить соотношениями $\mathbf{d} = Ze\mathbf{u}$ и $k\mathbf{u} = 2Ze\mathbf{E}$; таким образом, $k = 2(Ze)^2 \alpha^{-1}$.

Пространственное распределение дипольных моментов на атомах, которые принимают участие в коллективном вихревом движении, в случае прямолинейного вихря описывается формулой

$$\mathbf{d}^{(a)}(r) = \frac{\hbar^2 \alpha}{2Zemr^3} \boldsymbol{\nu}. \quad (13)$$

Вектор дипольного момента по определению направлен от отрицательных зарядов к положительным: вблизи линии вихря имеется избыток отрицательных зарядов, а положительные заряды несколько смещены центробежными силами на периферию.

Распределению атомных диполей (13) соответствует макроскопическая плотность вектора поляризации $\mathbf{P}(r)$, которая в линейном приближении по малому параметру $\alpha n_0 \ll 1$ описывается выражением

$$\mathbf{P}(r) = n(r)\mathbf{d}^{(a)}(r) = \boldsymbol{\nu} \frac{\hbar^2 \alpha n_0}{2Zemr^3} \exp\left[-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]. \quad (14)$$

Формула (14) не учитывает эффект взаимной поляризации атомов: для жидкого гелия параметр $\alpha n_0 \approx 4,5 \cdot 10^{-3}$, что позволяет при вычислении макроскопической поляризации этой жидкости пользоваться законом Клаузиуса–Моссотти для газов. Экспериментальное изучение поляризуемости как газообразного, так и жидкого гелия выше и ниже λ -точки подтверждает справедливость данного приближения [14].

Поле поляризации вокруг вихревого кольца определяется трехмерными распределениями плотности атомов и атомных дипольных моментов:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) = n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)\mathbf{d}^{(a)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V). \quad (15)$$

Но на малых расстояниях $|\mathbf{R} - \mathbf{R}_V| \ll r_c$ от линии вихря оно также имеет двумерный характер и описывает-

ся приближенно формулой (14). Отметим, что использование выражения (8) для атомной плотности $n(r)$ устраняет нефизическую расходимость поля $\mathbf{P}(r)$ в сердцевине вихря, связанную с сингулярностью $\mathbf{d}^{(a)}(r)$.

Вследствие радиальной симметрии плотности спонтанной поляризации (14) и (15) относительно линии вихря его интегральный дипольный момент тождественно равен нулю для любой конфигурации линии вихря $\mathbf{R}_V(l)$ и для отдельных ее элементов

$$\mathbf{d}^{(V)} = \int d^3\mathbf{R} \mathbf{P}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) \equiv 0. \quad (16)$$

Вихрь в целом как отдельное элементарное возмущение жидкости (солитон) имеет спонтанную поляризацию только в квадрупольном приближении.

Общее выражение для тензора квадрупольного момента q_{ik} системы дискретных зарядов [15] применительно к возникающей вокруг линии вихря системе атомных диполей удобно записать в виде

$$q_{ik}^{(V)} = Ze \sum [3R_i^{(+)}R_k^{(+)} - R_{(+)}^2 \delta_{ik} - (3R_i^{(-)}R_k^{(-)} - R_{(-)}^2 \delta_{ik})]. \quad (17)$$

Здесь суммирование производится по всем атомам, $\mathbf{R}^{(\pm)}$ — соответственно трехмерные радиус-векторы атомных ядер и центров электронных оболочек, i и k — координатные индексы, δ_{ik} — символ Кронекера. При описании прямолинейного вихря удобно использовать прямоугольную систему координат x_1, x_2, x_3 с центром на линии вихря и осью x_3 вдоль нее. Если $\mathbf{R} = s\mathbf{x}_3 + \boldsymbol{\nu}r$ — координата центра электронной оболочки отдельного атома в вихре, то $\mathbf{R}^{(-)} = \mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^{(+)} = \mathbf{R} + \mathbf{u}(r) = \mathbf{R} + (Ze)^{-1} \mathbf{d}^{(a)}(r)$. Переходя в (17) от суммирования к интегрированию с атомной плотностью $n(r)$ и ограничиваясь первым приближением по малому параметру αn_0 , получаем следующее выражение для квадрупольного момента прямолинейного вихря длиной L :

$$q_{ik}^{(V)} = L \bar{q}_{ik}, \quad (18)$$

$$\bar{q}_{ik} = \int d^2\mathbf{r} n(r) [3(r_i d_k^{(a)} + r_k d_i^{(a)}) - 2(\mathbf{r} \mathbf{d}^{(a)}) \delta_{ik}].$$

Линейная плотность квадрупольного момента \bar{q}_{ik} вычисляется путем интегрирования в перпендикулярной линии вихря плоскости по составляющим вектора $\mathbf{r} = \{r_1 = \nu_1 r, r_2 = \nu_2 r, r_3 = 0\}$, а пропорциональность квадрупольного момента вихря его длине L обусловлена однородным характером атомной поляризации вдоль линии вихря. Так как атомная поляризация в вихре имеет осевую симметрию, то оси выбранной нами системы координат являются главными осями тензора $q_{ik}^{(V)}$.

Подставляя в (18) выражения (8) и (13) и выполняя интегрирование в пределах $0 < r < r_e$, получаем главные значения тензора $q_{ik}^{(V)}$:

$$q_{11}^{(V)} = q_{22}^{(V)} = \frac{1}{2}L\bar{q}, \quad q_{33}^{(V)} = -L\bar{q}; \quad (19)$$

$$\bar{q} = \frac{2\pi\hbar^2\alpha n_0}{Zem} I_2 \left(\frac{r_e}{r} \right), \quad (20)$$

$$I_2 \left(\frac{r_e}{r_0} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\left(\frac{r_e}{r_0}\right)^2} \frac{dx}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \approx \ln \frac{r_e}{r_0}, \quad r_e \gg r_0.$$

Параметр \bar{q} задает характерную величину компонент тензора линейной плотности квадрупольного момента вихря. Отметим, что вследствие логарифмической расходимости интеграла I_2 на больших расстояниях $r \gg r_0$ величина \bar{q} в основном определяется структурой потока жидкости $v_s(r)$ вдали от линии вихря и слабо зависит от структуры его сердцевины, если только выполнено достаточно общее и естественное условие отсутствия сингулярности у произведения $r^{-1}n(r)$ при $r \rightarrow 0$.

Еще одна важная особенность SP-поляризации прямолинейного вихря — независимость как распределения дипольной поляризации вокруг его линии (14), так и квадрупольного момента вихря в целом (19),(20) от его знака: это обстоятельство обусловлено тем, что направление центробежных сил (2) не зависит от направления вращения жидкости в вихре.

При описании квадрупольного момента искривленной вихревой линии или вихревого кольца континуальный переход в (17) приводит к выражению

$$q_{ik}^{(V)} = \bar{q} \int dls_{ik}(l). \quad (21)$$

Здесь $s_{ik}(l)$ — симметричная матрица, которая осуществляет переход от системы координат, связанной с главными осями малого элемента вихря, ориентированного вдоль касательной $\mathbf{s}(l)$, к произвольным координатам: $|s_{ik}| \leq 1$, $s_{ik} = s_{ki}$, $s_{ii} \equiv 0$. Линейная плотность квадрупольного момента $\bar{q}_{ik} = \bar{q}s_{ik}(l)$ определяется интегралом (18), если в нем под двумерным вектором \mathbf{r} подразумевать перпендикулярную $\mathbf{s}(l)$ составляющую разности $[\mathbf{R} - \mathbf{R}_V(l)]_{\perp}$.

Так как спонтанный дипольный момент отдельного элемента вихревой линии и вихря в целом равен нулю, то, согласно общим положениям электродинамики [15], их квадрупольные моменты не зависят от выбора начала координат и в произвольной системе координат обладают свойствами $q_{ik}^{(V)} = q_{ki}^{(V)}$, $q_{11}^{(V)} + q_{22}^{(V)} + q_{33}^{(V)} \equiv 0$.

В случае вихревого кольца удобно воспользоваться прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3 с началом в центре и осями x_1, x_2 в плоскости кольца. Конфигурация атомных диполей такого вихря имеет цилиндрическую симметрию по отношению к оси x_3 , а координатные оси являются главными осями тензора квадрупольного момента кольца, который обозначим символом $q_{ik}^{(r)}$:

$$q_{33}^{(r)} = \pi r_c \bar{q} = \frac{2\pi^2 \hbar^2 \alpha n_0 r_c}{Zem} \ln \frac{r_c}{r_0}, \quad (22)$$

$$q_{11}^{(r)} = q_{22}^{(r)} = -\frac{1}{2} q_{33}^{(r)}.$$

1.3. Поляризация вихря под действием внешнего электрического поля (E-поляризация)

Рассмотрим сверхтекучую жидкость, в которой возбуждены кантованные вихри, и будем предполагать, что эта жидкость помещена во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{R})$. В общем случае поле может также изменяться с течением времени, но в данном разделе эта зависимость для нас несущественна. При анализе электрофизических свойств Не II в силу малой поляризуемости и плотности атомов ($\alpha n_0 \ll 1$) можно считать, что среднее поле в жидкости совпадает с внешним полем. Ограничимся рассмотрением достаточно плавных и слабых полей, когда характерный размер пространственной неоднородности $\lambda \geq r_e, r_c$ и $\max |\mathbf{E}|$ значительно меньше внутриаомного поля.

Под действием поля на каждом отдельном атоме возникает дипольный момент $\mathbf{d}^{(a)} = \alpha \mathbf{E}$, и в газовом приближении диэлектрическая поляризация жидкости равна

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = \alpha n(\mathbf{R}) \mathbf{E}(\mathbf{R}).$$

В однородной жидкости (в отсутствие вихрей) $n = n_0$ и пространственная неоднородность поляризации возможна только за счет неоднородности поля $\mathbf{E}(\mathbf{R})$. Но при наличии в жидкости вихря макроскопическая поляризация приобретает неоднородный характер даже в однородном поле вследствие неоднородного распределения атомной плотности вокруг его линии:

$$\mathbf{P}(\mathbf{R}) = \alpha n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) \mathbf{E}(\mathbf{R}). \quad (23)$$

Так как $n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) < n_0$, то отдельный вихрь можно рассматривать как своеобразную поляризационную «дырку» в сверхтекучей жидкости. Если электрическое поле \mathbf{E} можно считать однородным в области жидкости, занимаемой вихрем, то обусловленная им неоднородность поляризации эквивалентна локализованному на линии вихря эффективному дипольному моменту $\mathbf{d}^{(V)}$, который определяется формулами:

$$\mathbf{d}^{(V)} = \alpha^{(V)} \mathbf{E},$$

$$\alpha^{(V)} = \alpha \int d^3 \mathbf{R} [n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) - n_0] = -\alpha N^{(V)}; \quad (24)$$

здесь $N^{(V)}$ — интегральная атомная дилатация вихря (9) или (12). Величина $\alpha^{(V)}$ играет роль эффективного коэффициента поляризации вихря. Неравенство $n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) < n_0$ определяет отрицательную величину параметра $\alpha^{(V)}$.

В случае прямолинейного вихря в системе координат с осью x_3 вдоль его линии поле вектора E-поляризации жидкости (23) приобретет вид

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, x_3) = \alpha n_0 \exp \left[- \left(\frac{r_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_V|} \right)^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, x_3), \quad (25)$$

где \mathbf{r}_V — координата линии вихря в перпендикулярной плоскости. Эффективный коэффициент поляризации вихря длиной L равен

$$\alpha^{(V)} = -\alpha \bar{\delta} L \approx -2\pi L \alpha n_0 r_0^2 \ln \frac{r_e}{r_0}. \quad (26)$$

Отметим, что как SP-поляризация, так и E-поляризация прямолинейных вихрей не зависит от их знака.

Коэффициент поляризации вихревого кольца обозначим символом $\alpha^{(r)}$. Для кольца радиусом r_c , согласно (12) и (24), имеем:

$$\alpha^{(r)} \approx -4\pi^2 \alpha n_0 r_0^2 r \ln \frac{r_c}{r_0}. \quad (27)$$

2. Распределение пондеромоторных сил в жидкости с вихрями и электрическая составляющая энергии вихря

Базовые соотношения макроскопической электродинамики и двухжидкостной гидродинамики сверхтекучей жидкости, в которой возбуждены квантованные вихри, должны учитывать эффекты SP-поляризации и E-поляризации вихрей, описанные в предыдущем разделе. Во-первых, эти эффекты могут проявляться через возбуждение гидродинамических и акустических процессов переменными во времени и пространственно неоднородными электрическими полями: такие поля создают вокруг линии вихря неоднородное распределение пондеромоторных сил, и их действие следует учитывать в уравнениях гидродинамики при анализе ряда конкретных задач. Во-вторых, элементы вихревых линий и вихревые кольца в целом, как солитоны, обладают свойствами электрических диполей и квадрупольей, поэтому также должны испытывать действие пондеромоторных сил в неоднородных электрических полях. Эти силы необходимо учитывать в уравнениях движения вихревых линий, и их действие в определенных физических ситуациях может существенно влиять на зарождение вихрей и эволюцию вих-

ревой структуры жидкости. И, наконец, поляризация вихрей должна приводить к специфическим электростатическим и электродинамическим эффектам отклика сверхтекучей жидкости как на электрическое, так и на механическое или тепловое возбуждение. Перечислим несколько примеров таких эффектов:

— появление на ячейке с He II спонтанной электрической индукции под действием ее возбуждения силами неэлектрической природы (термоэлектрический и механоэлектрический эффекты [1,2]);

— появление обусловленных вихрями добавок к высокочастотной диэлектрической проницаемости и поглощению электромагнитных волн в He II [3,4];

— переизлучение высокочастотных электромагнитных волн вихрями или их трансформация в звуковые волны;

— захват вихрей внедренными в He II электронами и положительно заряженными ионами, приводящий к появлению специфических особенностей в их подвижности [5,6].

Предварительные численные оценки показывают, что некоторые из отмеченных выше эффектов имеют весьма малую интенсивность (особенно те из них, которые связаны со спонтанной поляризацией), вместе с тем в ряде случаев они доступны наблюдению современными экспериментальными методами. Кроме того, обсуждение эффектов такого типа представляет интерес с точки зрения общих положений и закономерностей фундаментальной физики конденсированного состояния.

2.1. Пондеромоторные силы

При наличии квантованных вихрей в He II, помещенном в электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{R})$, отдельные атомы приобретают дипольные моменты, равные, в первом приближении, сумме SP- и E-составляющих:

$$\mathbf{d}^{(a)}(\mathbf{R}; \mathbf{R}_V) \approx \mathbf{d}^{(a,SP)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) + \alpha \mathbf{E}(\mathbf{R}). \quad (28)$$

Так как на отдельный диполь в электрическом поле действует сила $f_i^{(a,E)} = d_k^{(a)} E_{k,i}$ [15], где $E_{k,i} \equiv \nabla_i E_k = \partial E_k / \partial R_i$, то объемная плотность пондеромоторных сил, действующих в жидкости с вихрями, будет определяться выражениями

$$\begin{aligned} F_i(\mathbf{R}; \mathbf{R}_V) &= n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) f_i^{(a,E)}(\mathbf{R}; \mathbf{R}_V) = \\ &= n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) [d_k^{(a,SP)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) \cdot \nabla_i E_k(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \alpha \cdot \nabla_i E^2(\mathbf{R})] = \\ &= [P_k^{(SP)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) + P_k^{(E)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)] E_{k,i}(\mathbf{R}). \quad (29) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по повторяющимся координатным индексам. Первое слагаемое в (29) описывает действие поля на SP-поляризованную жидкость вокруг линии вихря

(15), а второе слагаемое представляет собой известную в электродинамике жидких диэлектриков силу Гельмгольца [13], при записи которой учтено обусловленное вихрем неоднородное распределение Е-поляризации (23). При описании распределения пондеромоторных сил вокруг сердцевинки прямолинейного вихря следует использовать в (29) выражения для SP-поляризации (14) и Е-поляризации (25).

Отметим несколько важных особенностей поля пондеромоторных сил (29). Во-первых, как $\mathbf{d}^{(a,SP)}(\mathbf{R}-\mathbf{R}_V)$, так и разность $n(\mathbf{R}-\mathbf{R}_V)-n_0$ существенно отличны от нуля только вблизи линии вихря, поэтому его сердцевину можно рассматривать как своеобразный концентратор поляризации и пондеромоторных сил. Во-вторых, $\mathbf{F}(\mathbf{R};\mathbf{R}_V)$ имеет две составляющие с качественно различной зависимостью от величины поля \mathbf{E} : SP-составляющая линейна, а Е-составляющая квадратична по полю. Это означает, что при достаточно малых значениях напряженности поля его действие на вихрь должно определяться эффектом SP-поляризации, а в больших полях основную роль будет играть Е-поляризация. Оценку для напряженности поля E_0^* , разделяющей эти предельные ситуации, можно получить из сравнения индукционной и спонтанной составляющей дипольного момента отдельного атома в формуле (28) на расстояниях от линии вихря порядка r_i :

$$E_0^* = \alpha^{-1} d^{(a)}(|\mathbf{R}-\mathbf{R}_V|=r_i) = \frac{\hbar^2}{2Zemr_i^3}. \quad (30)$$

Для He II имеем: $Z = 2$, $m \approx 7 \cdot 10^{-24}$ г, $r_i \approx 2 \cdot 10^{-8}$ см, $E_0^* \approx 300$ В·см⁻¹.

При изучении гидродинамических процессов в сверхтекучей жидкости выражение (29) следует использовать в уравнениях двухжидкостной гидродинамики в качестве объемной плотности вынуждающих сил, учитывая в общем случае зависимость от времени как поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R},t)$, так и конфигурации линии вихря $\mathbf{R}_V = \mathbf{R}_V(l,t)$. Таким образом, получаем возможность предсказания и описания ряда гидродинамических процессов, возбуждаемых внешним электрическим полем в окрестности линии вихря. Одним из таких процессов является трансформация монохроматических колебаний неоднородного электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\mathbf{R}) \sin \omega t$ в звуковые волны двух типов, которые должны излучаться ближайшей окрестностью сердцевинки вихря: с частотой ω и линейной по полю амплитудой (первое слагаемое в (29)); с частотой 2ω и квадратичной по полю амплитудой (второе слагаемое в (29)).

Если неоднородность поля $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ мала в пределах внешнего радиуса вихря r_e или радиуса вихревого кольца r_c , то наряду с локальной плотностью пондеромоторных сил (29) можно также ввести интегральную

силу, действующую на вихрь в целом. Такая сила будет являться некоторым функционалом $\mathbf{f}^{(V)}\{\mathbf{R}_V\}$, заданным на пространственной конфигурации линии вихря $\mathbf{R}_V(l)$, ее величина равна интегралу по занимаемому вихрем объему от разности общей плотности пондеромоторных сил (29) и плотности сил Гельмгольца в отсутствие вихря:

$$\mathbf{f}_i^{(V)}\{\mathbf{R}_V\} = \int d^3\mathbf{R} [F_i(\mathbf{R};\mathbf{R}_V) - \frac{1}{2} \alpha n_0 \nabla_i E^2(\mathbf{R})]. \quad (31)$$

Более детально свойства этой силы можно описать, если учесть два обстоятельства: во-первых, поле $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ создается внешними по отношению к жидкости зарядами, поэтому в области пространства, занимаемой жидкостью, выполняется тождество $\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{R}) \equiv \equiv \delta_{ik} E_{i,k}(\mathbf{R}) \equiv 0$; во-вторых, для рассматриваемого здесь достаточно плавного поля его напряженность вблизи линии вихря $\mathbf{R}_V(l)$ можно представить в виде разложения в ряд Тейлора

$$E_i(\mathbf{R}) \approx E_i(\mathbf{R}_V) + E_{i,n}(\mathbf{R}_V)(R_n - R_n^{(V)}) + \frac{1}{2} E_{i,nm}(\mathbf{R}_V)(R_n - R_n^{(V)})(R_m - R_m^{(V)}) + \dots \quad (32)$$

В случае длинного и слабоискривленного вихря ($L > r_e, r_c$) в формуле (31) можно выполнить интегрирование в плоскости, поперечной к направлению его линии $\mathbf{s}(l)$, и привести эту формулу к виду

$$\mathbf{f}_i^{(V)}\{\mathbf{R}_V\} = \int dl \bar{f}_i(l),$$

$$\bar{f}_i = \frac{1}{6} \bar{q} s_{kn}(l) E_{n,ik}(\mathbf{R}_V) - \alpha \bar{\delta} E_n(\mathbf{R}_V) E_{n,i}(\mathbf{R}_V). \quad (33)$$

Действие поля на такой вихрь характеризуется линейной плотностью пондеромоторной силы $\bar{f}_i(l)$, которая состоит из двух составляющих: первое слагаемое линейно по полю и описывает его действие на квадрупольный момент вихря (21); второе слагаемое квадратично по полю, оно обусловлено наличием у вихря эффективного дипольного момента (24).

Вихревое кольцо малого размера удобно характеризовать спонтанным квадрупольным моментом $q_{ik}^{(r)}$ (22) и интегральной атомной «дилатацией» $N^{(r)}$ (12), а в качестве динамических переменных (обобщенных координат) рассматривать координату центра \mathbf{R}_r , радиус r_c и вектор нормали $\boldsymbol{\sigma}$ к плоскости кольца. Сила $\mathbf{f}^{(r)}$ и момент сил $\mathbf{K}^{(r)}$, которые контролируют изменения \mathbf{R}_r и $\boldsymbol{\sigma}$, в слабонеоднородном электрическом поле приобретают добавки:

$$\begin{aligned} f_i^{(r)}(\mathbf{R}_r, \boldsymbol{\sigma}, r_c) &= \frac{1}{6} q_{kn}^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}, r_c) E_{k,in}(\mathbf{R}_r) - \\ &- \alpha N^{(r)}(r_c) E_k(\mathbf{R}_r) E_{k,i}(\mathbf{R}_r), \end{aligned} \quad (34)$$

$$K_i^{(r)}(\mathbf{R}_r, \boldsymbol{\sigma}, r_c) = \frac{1}{6} \mathbf{e}_{ikm} q_{kn}^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}, r_c) E_{m,n}(\mathbf{R}_r), \quad (35)$$

здесь \mathbf{e}_{ikm} — единичный антисимметричный тензор.

Подчеркнем, что отдельные элементы вихревых линий и вихревые кольца испытывают действие пондеромоторных сил только в неоднородном электрическом поле. Влияние поля на ориентацию направляющего вектора вихревого кольца $\boldsymbol{\sigma}$ связано с наличием у него квадрупольного момента и не зависит от эффекта E-поляризации. Эти силы необходимо учитывать в уравнениях движения вихревых линий и вихревых колец.

2.2. Энергия вихря в электрическом поле

Электрическая составляющая в потенциальной энергии отдельного атома, который имеет спонтанный дипольный момент $\mathbf{d}^{(a,SP)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V)$ и находится в поле $\mathbf{E}(\mathbf{R})$, определяется формулой [15]:

$$\varepsilon^{(a,E)} = -E_k d_k^{(a,SP)} - \frac{1}{2} \alpha E^2.$$

В соответствии с этим энергия вихря $\varepsilon^{(V)}\{\mathbf{R}_V\}$ приобретает в электрическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{R})$ добавку, которую можно записать в виде интеграла по объему, занимаемому вихрем:

$$\varepsilon^{(V)}\{\mathbf{R}_V\} - \varepsilon_0^{(V)}\{\mathbf{R}_V\} = - \int d^3\mathbf{R} \left\{ P_k^{(SP)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) E_k(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \alpha [n(\mathbf{R} - \mathbf{R}_V) - n_0] E^2(\mathbf{R}) \right\}. \quad (36)$$

Здесь $P^{(SP)}$ — плотность спонтанной поляризации вокруг линии вихря (15), а $\varepsilon_0^{(V)}$ — энергия вихря в отсутствие поля, которая вместе с электрической добавкой к ней являются функционалами, заданными на пространственной конфигурации линии вихря $\mathbf{R}_V(l)$.

Известно [5–7], что при вычислении функционала $\varepsilon_0^{(V)}\{\mathbf{R}_V\}$ можно ввести понятие линейной плотности энергии вихря $\bar{\varepsilon}_0$ и считать приблизительно (с логарифмической точностью) эту энергию пропорциональной длине вихревой линии:

$$\varepsilon_0^{(V)} = L \bar{\varepsilon}_0, \quad \bar{\varepsilon}_0 \approx \frac{\pi \hbar^2 n_0}{m} \ln \frac{r_e}{r_0}. \quad (37)$$

Если рассматривать достаточно длинный вихрь ($L \geq r_e, r_c$) в слабонеоднородном электрическом поле, когда справедливо разложение (32), то интеграл в правой части формулы (36) можно представить в виде интеграла вдоль линии вихря подобно тому, как это было сделано при вычислении функционала пондеромоторной силы (33). Подставим (32) в (36) и выполним интегрирование в плоскости, перпендикулярной линии вихря, с учетом тождества $\text{div } \mathbf{E} \equiv 0$ и равенства нулю

дипольного момента (16), в результате получим формулу

$$\varepsilon^{(V)}\{\mathbf{R}_V\} = \int d\bar{l} \bar{\varepsilon}(l),$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_0 - \frac{1}{6} \bar{q} s_{kn}(l) E_{k,n}(\mathbf{R}_V) + \frac{1}{2} \alpha \bar{\delta} E^2(\mathbf{R}_V). \quad (38)$$

Напомним, что матрица s_{kn} задает ориентацию направляющего вектора элемента вихревой линии $\mathbf{s}(l)$ по отношению к осям используемой системы координат.

В случае вихревого кольца с малым радиусом кривизны r_c его энергию можно считать функцией r_c , координаты центра \mathbf{R}_r и вектора нормали $\boldsymbol{\sigma}$, а величина электрической составляющей в энергии будет пропорциональна квадрупольному моменту $q_{ik}^{(r)}$ и коэффициенту поляризации $\alpha^{(r)} = -\alpha N^{(r)}$ кольца:

$$\varepsilon^{(r)}(\mathbf{R}_r, \boldsymbol{\sigma}, r_c) = 2\pi r_c \bar{\varepsilon}_0 - \frac{1}{6} q_{kn}^{(r)}(\boldsymbol{\sigma}, r_c) E_{k,n}(\mathbf{R}_r) + \frac{1}{2} \alpha N^{(r)}(r_c) E^2(\mathbf{R}_r). \quad (39)$$

Отметим, что в соответствии с основными правилами механики пондеромоторные силы (33)–(35) можно получить, вычисляя вариационную производную от функционала энергии:

$$\mathbf{f}^{(V)}\{\mathbf{R}_V\} = - \frac{\delta}{\delta \mathbf{R}_V} \varepsilon^{(V)}\{\mathbf{R}_V\}.$$

Обусловленные электрическим полем добавки к энергии вихрей и соответствующие им пондеромоторные силы необходимо учитывать в уравнениях движения вихревых линий и вихревых колец. При анализе конкретных задач динамики вихрей в электрическом поле существенную роль могут играть следующие свойства этих сил:

— из формулы (38) видно, что влияние поля сводится к изменению линейной энергии вихря, и при описании движения искривленных вихрей это влияние должно проявляться через зависимость от напряженности поля силы линейного натяжения вихревых линий;

— эффект E-поляризации приводит к квадратичной по полю добавке к силе линейного натяжения, которая всегда положительна (независимо от знака поля) и существует даже в однородном поле, в отличие от пондеромоторных сил (33) и (34);

— эффект SP-поляризации вызывает линейное по полю изменение энергии вихря, знак этой составляющей определяется ориентацией элемента вихревой линии $\mathbf{s}(l)$ по отношению к направлению поля и его градиента.

Перечисленные выше свойства пондеромоторных сил позволяют сделать несколько важных заключений

общего характера о закономерностях поведения вихрей в электрических полях:

— механическому равновесию соответствуют конфигурации вихревых линий, на которых $s_{kn} E_{k,n} > 0$ и максимально по величине, а модуль напряженности электрического поля на линии вихря достигает максимума;

— если изучается действие на вихрь осциллирующего высокочастотного поля, то SP-составляющая пондеромоторных сил меняет знак вместе с напряженностью поля и ее среднее по периоду колебаний значение равно нулю, а среднее значение E-составляющей отлично от нуля и направлено в сторону убывания амплитуды поля;

E-составляющие энергии и пондеромоторных сил создают тенденцию к выталкиванию вихрей из области больших значений модуля напряженности поля как в статических, так и в осциллирующих полях.

Сравнивая в формуле (39) величины третьего и первого слагаемых, можно оценить характерное значение напряженности поля E_1^* , при котором оно способно достаточно сильно повлиять на зарождение и расширение вихревых колец:

$$E_1^* = \left(\frac{2\bar{\varepsilon}_0}{\alpha\bar{\delta}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\hbar^2}{m\alpha r_0^2} \right)^{1/2}. \quad (40)$$

Численная оценка приводит к значению

$$E_1^* \approx 6 \cdot 10^7 \text{ В/см.}$$

В следующем разделе приведен пример физического явления в He II, в котором столь большие значения поля реализуются. Кроме того, во многих реальных физических ситуациях движение вихрей контролируется преимущественно силами вязкого трения [6], которые имеют малую величину, особенно при $T \ll T_\lambda$. В таких ситуациях роль пондеромоторных сил может оказаться существенной даже при $|\mathbf{E}| \ll E_1^*$.

2.3. Влияние электрического поля на движение малых вихревых колец

Обсудим отдельно некоторые специфические особенности взаимодействия с электрическим полем вихревых колец с малыми радиусами $r_c \leq 10$ нм. Вихревые кольца столь малых размеров могут зарождаться, например, при движении внедренных в He II заряженных частиц — электронов и положительных ионов [5,6]. Вокруг электрона в He II возникает пузырек радиусом около 17 \AA , а вокруг протона — кристаллический шарик радиусом около 7 \AA . Движение этих образований сопровождается рождением вихревых колец приблизительно таких же размеров, и этот процесс протекает в кулоновских полях частиц с напряженностью порядка $(0,5-3) \cdot 10^7 \text{ В/см}$, которая сопоста-

вила с полученной в предыдущем разделе оценкой для E_1^* .

Еще более мелкие вихревые кольца возникают в сверхтекучей жидкости вследствие тепловых флуктуаций [16]. Интенсивность рождения колец может значительно возрастать при возбуждении в жидкости макроскопических потоков, а также в результате ее взаимодействия с микроскопическими неровностями на стенках сосуда.

Известно, что при больших размерах замкнутой вихревой линии ее форма в виде окружности неустойчива, и в процессе движения вихря эта линия может приобретать форму сложной пространственной кривой вплоть до ее самопересечения и дробления на более мелкие фрагменты [10]. Но на определенных стадиях эволюции достаточно мелких вихревых колец явлениями такого типа можно пренебрегать и для описания пространственной конфигурации отдельного кольца использовать его радиус r_c , координату центра \mathbf{R}_r и нормаль к плоскости $\boldsymbol{\sigma}$. Квантованные вихревые кольца представляют собой особый тип элементарных нелинейных возбуждений сверхтекучей жидкости [9]: они могут находиться в состоянии стационарного движения, и такое движение можно характеризовать не только энергией ε_r , но и импульсом $\mathbf{p} = p\boldsymbol{\sigma}$, направленным перпендикулярно плоскости кольца. Зависимость энергии возбуждения от импульса — закон дисперсии возбуждений $\varepsilon_r(\mathbf{p}) \equiv \varepsilon_r(p)$ является изотропной функцией, которая определяется соотношениями:

$$\varepsilon_r = \frac{2\pi^2 n_0 \hbar^2}{m} r_c \ln \frac{r_c}{r_0}, \quad p = 2\pi^2 n_0 \hbar r_c^2. \quad (41)$$

Описанные выше свойства малых вихревых колец позволяют рассматривать их как материальные частицы. Роль динамических переменных такой псевдочастицы играют координаты центра \mathbf{R}_r и импульс $\mathbf{p} = p\boldsymbol{\sigma}$, а для описания ее движения можно использовать общие положения классической и квантовой механики частиц.

Теоретический анализ динамики вихревых колец проводился как в рамках двухжидкостной гидродинамики, так и в рамках модели почти идеального бозе-газа; этой проблеме посвящена обширная литература, соответствующие ссылки можно найти в [16]. Формулы (41) получены в гидродинамическом приближении и справедливы при достаточно больших значениях радиуса кольца $r_c > a \approx 4 \text{ \AA}$. Довольно часто обсуждается и возможность существования в He II вихревых колец меньшего радиуса $a > r_c > r_i \approx 2 \text{ \AA}$, но для них зависимость энергии и импульса от r_c существенно сложнее по сравнению с (41). По-видимому, в случае He II корректно предположить [16], что спектр возбуждений данного типа ограничен значениями $r_c > r_{c0} \approx 2,5 \text{ \AA}$, $p > p_{r0} \approx 2,5 \cdot 10^{-19} \text{ г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^{-1} = 2,5 \text{ \AA}^{-1}$,

$\varepsilon_r > \varepsilon_{r0} \approx 2 \cdot 10^{-15}$ эрг ≈ 15 К. В области значений импульса $p < p_{r0}$ этот спектр должен естественным образом переходить в спектр ротон-фононных возбуждений.

При описании динамики вихревого кольца как псевдочастицы роль гамильтониана будет играть сумма энергии свободного движения $\varepsilon_r(p)$ и потенциальной энергии $w(\mathbf{p}, \mathbf{R}_r, t)$ кольца во внешних полях:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{R}_r, t) = \varepsilon_r(p) + w(\mathbf{p}, \mathbf{R}_r, t).$$

Зависимость w от времени появляется при движении кольца в переменном внешнем поле, а зависимость от импульса обусловлена соотношениями (41) и зависимостью энергии взаимодействия кольца с внешним полем от его радиуса r_c и ориентации σ . Согласно формулам (39) и (41), движение квантованного вихревого кольца в электрическом поле $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ описывается гамильтонианом:

$$h(\mathbf{p}, \mathbf{R}_r, t) = \varepsilon_r(p) - \frac{1}{6} q_{kn}^{(r)}(\mathbf{p}) E_{k,n}(\mathbf{R}_r, t) + \frac{1}{2} \alpha N^{(r)}(p) E^2(\mathbf{R}_r, t). \quad (42)$$

В реальных экспериментах практически всегда два последних слагаемых в (42) имеют очень малую величину, поэтому влияние электрического поля на динамику малых вихревых колец можно учитывать, используя теорию возмущений. При этом в первом приближении зависимостью $q_{kn}^{(r)}$ и $N^{(r)}$ от импульса можно пренебрегать, заменив их некоторыми эффективными величинами.

Заключение

Квантованные вихри в сверхтекучей жидкости обладают двумя видами электрической активности — спонтанной (SP) и индукционной (E) поляризацией. Причиной обоих видов поляризации вихря являются центробежные силы, которые действуют на атомы жидкости при их коллективном азимутальном движении вокруг вихревой линии.

1. Под действием центробежных сил атомы в вихре приобретают спонтанные дипольные моменты: происходит слабое смещение атомных ядер по отношению к центрам электронных оболочек. Такая поляризация в отсутствие внешнего электрического поля — одно из проявлений эффекта инерционной поляризации диэлектрика. Вследствие SP-поляризации на линии вихря сконцентрировано неоднородное и симметричное по отношению к ней поле плотности поляризации, при этом интегральный дипольный момент вихря равен нулю, но линия вихря несет на себе отличный от нуля квадрупольный момент.

2. Действие центробежных сил приводит также к неоднородному распределению плотности жидкости в перпендикулярном к линии вихря направлении; атомы вытесняются из сердцевины вихря на периферию, линия вихря несет на себе интегральную атомную дилатацию — полное число атомов, вытесненных центробежными силами из области, занятой вихрем. Поэтому плотность E-поляризации жидкости во внешнем электрическом поле также имеет неоднородный характер вблизи линии вихря, он эквивалентен поляризационной «дырке» и несет на себе эффективный дипольный момент, пропорциональный напряженности поля. Соответствующий коэффициент E-поляризации вихря имеет отрицательную величину, а его абсолютное значение равно произведению коэффициента поляризации атома на интегральную атомную дилатацию.

3. Если сверхтекучая жидкость помещена в неоднородное электрическое поле, то эффекты SP- и E-поляризации приводят к появлению вокруг вихревых линий неоднородного распределения плотности пондеромоторных сил, их величина пропорциональна градиенту напряженности поля. Эти силы необходимо учитывать в уравнениях двухжидкостной гидродинамики в качестве вынуждающих сил, их действие должно сопровождаться возникновением вблизи вихревых линий различных гидродинамических, акустических и электрофизических процессов. Пондеромоторные силы и возбуждаемые ими процессы имеют две составляющие с качественно различным характером их зависимости от напряженности поля: SP-составляющая линейна, а E-составляющая квадратична по полю.

4. Если неоднородность электрического поля мала в пределах внешнего радиуса вихря, то наряду с локальной плотностью пондеромоторных сил можно также ввести интегральные силы, действующие на отдельные элементы вихревой линии и вихрь в целом. Такие силы необходимо учитывать при описании процессов зарождения вихрей и эволюции вихревой структуры в сверхтекучей жидкости. Они также имеют две составляющие: SP-составляющая пропорциональна второй пространственной производной от напряженности поля и квадрупольному моменту вихря; E-составляющая пропорциональна градиенту квадрата напряженности поля и эффективному коэффициенту поляризации вихря.

5. Действие электрического поля на квантованный вихрь приводит к изменению его энергии. Соответствующая добавка к энергии также имеет линейную и квадратичную составляющие: SP-составляющая пропорциональна градиенту напряженности поля и квадрупольному моменту вихря; E-составляющая

пропорциональна квадрату напряженности поля и коэффициенту поляризации вихря.

В статье получено детальное описание электрофизических свойств простейших типов квантованных вихревых возмущений сверхтекучей жидкости — прямолинейных вихрей и малых вихревых колец, вычислены их SP-квадрупольные моменты и коэффициенты E-поляризации. Приведены численные оценки некоторых характеристик обсуждаемых эффектов с использованием параметров He II.

Выполненный теоретический анализ электрической поляризации и особенностей взаимодействия с электрическим полем квантованных вихрей создает предпосылки для качественной интерпретации ряда эффектов, обнаруженных при экспериментальном изучении электрофизических свойств жидкого ^4He в сверхтекучем и нормальном состояниях.

Автор благодарен А.С. Рыбалко, Э.Я. Рудаевскому, В.Н. Григорьеву, Ю.З. Ковдре, И.Н. Адаменко, М.И. Каганову, С.И. Шевченко за содержательные и полезные дискуссии по обсуждаемой в статье проблеме.

1. А.С. Рыбалко, *ФНТ* **30**, 1321 (2004).
2. А.С. Рыбалко, С.П. Рубец, *ФНТ* **31**, 820 (2005).
3. A.S. Rybalko, *Int Conf. in Ukraine: Statistical Physics 2006 – Condensed Matter: Theory and Applications*, 12–15 September 2006, Kharkov, Ukraine.
4. A.S. Rybalko, S.P. Rubets, E.Ya. Rudavskiy, V.A. Tikhiiy, S.I. Tararov, R.V. Golovashchenko, and V.N. Derkach, <http://www.arxiv:cond-mat/0704>.
5. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
6. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
7. W.I. Glaberson and R.I. Donelby. *Structure, Distribution and Dynamics of Vortices in Helium II. Progress in Low Temp. Phys.* **IX**; D.F. Brewer (ed.), Elsevier Sci. Publ. B.V. (1986).
8. В.Д. Нацик, *ФНТ* **31**, 1201 (2005).
9. Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Статистическая физика*, Ч. 2, Наука, Москва (1978).
10. Р. Фейнман, *Статистическая механика*, Мир, Москва (1978).
11. I.N. Adamenko, K.E. Nemchenko, and I.V. Tanatarov, *Phys. Rev.* **B67**, 104513 (2003).
12. L.A. Melnikovsky, <http://www.arxiv:con-mat/0505102>.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
14. Б.Н. Есельсон, В.Н. Григорьев, В.Г. Иванцов, Э.Я. Рудаевский, *Свойства жидкого и твердого гелия*, Изд.-во стандартов, Москва (1978).
15. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теория поля*, Физматгиз, Москва (1962).
16. М.Д. Томченко, *ФНТ* **31**, 483 (2005).

Effect of electrical field on the quantized vortices in He II

V.D. Natsik

Electrical polarization and interaction of quantized vortices with electrical field in superfluid Bose fluid are studied. Two types of the vortices polarization are considered; both of them are caused by action of centrifugal forces upon the fluid atoms at their azimuthal motion around the vortex line. Firstly, atoms obtain dipole moments (inertial polarization when external field is absent) and a nonuniform symmetrical distribution of the polarization density arises; at that, a vortex has no integral dipole moment but each element of the vortex line bears a quadrupole moment. Secondly, action of the centrifugal forces leads to a nonuniform distribution of the atomic density around the vortex line; therefore, the polarization density of the fluid in the external electrical field is also nonuniform in the vicinity of this line and each isolated element of the vortex line obtains dipole moment proportional to the field magnitude (inductive polarization). Analytical expressions for the polarization density around the straight and circular vortex lines are obtained and the effective dipole and quadrupole moments of the vortices are determined. A distribution of the ponderomotive forces acting on the superfluid fluid with quantized vortices in the external electrical field has been analyzed and the caused by field additives to the energy of the straight and circular vortices are found. Numerical estimations of the effects considered are given for He II.

PACS: **67.40.-w** Boson degeneracy and superfluidity of ^4He ;
67.40.Vs Vortices and turbulence.

Keywords: superfluid helium, quantum vortices, electric field, polarization, ponderomotive forces.