

УДК 523.9-72

Ю. И. Федоров¹, Б. А. Шахов¹, М. Стеглик²¹Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
ул. Академика Заболотного 27, Киев, 03680²Институт экспериментальной физики Словацкой академии наук
ул. Ватсонова 47, Кошице, 04001**Статистическое ускорение и пространственная диффузия
космических лучей в турбулентной среде**

Рассмотрен процесс статистического ускорения космических лучей в турбулентной среде. Предполагается, что заряженные частицы приобретают энергию в ограниченной области пространства и покидают область ускорения вследствие пространственной диффузии, обусловленной рассеянием космических лучей в турбулентных магнитных полях. Получены аналитические решения уравнения переноса космических лучей и исследованы равновесные пространственно-энергетические распределения частиц высокой энергии в пределах области ускорения и вне нее.

СТАТИСТИЧНЕ ПРИСКОРЕННЯ І ПРОСТОРОВА ДИФУЗІЯ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ У ТУРБУЛЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ, Федоров Ю. І., Шахов Б. О., Стеглик М. — Розглянуто процес статистичного прискорення космічних променів у турбулентному середовищі. Припускається, що заряджені частинки отримують енергію у обмеженій області простору і залишають область прискорення внаслідок просторової дифузії, яка зумовлена розсіянням космічних променів у турбулентних магнітних полях. Одержано аналітичні розв'язки рівняння переносу космічних променів і досліджено рівноважні просторово-енергетичні розподіли частинок високої енергії у межах області прискорення і поза нею.

STATISTICAL ACCELERATION AND SPATIAL DIFFUSION OF COSMIC RAYS IN THE TURBULENT MEDIUM, by Fedorov Yu. I., Shakhov B. A., Stehlik M. — The process of cosmic ray acceleration in the turbulent medium is studied. It is supposed that charged particles are obtaining the energy in a limited space region and are leaving the acceleration region as

a result of spatial diffusion induced by cosmic ray scattering in turbulent magnetic fields. Analytical solutions of cosmic ray transport equation are obtained and equilibrium spatial-energetic distributions of high-energy particles in and outside the acceleration region are investigated.

ВВЕДЕНИЕ

Статистическое ускорение Ферми играет чрезвычайно важную роль во многих астрофизических объектах, в которых происходит генерация заряженных частиц высокой энергии [16]. Этот механизм ускорения характеризуется систематическим увеличением энергии частиц при их взаимодействии со случайно движущимися рассеивателями [4, 5, 16]. Статистическое ускорение также имеет место при взаимодействии быстрых заряженных частиц с турбулентной космической плазмой [4, 5, 7, 27, 28]. Ускорение Ферми имеет характер диффузии в импульсном пространстве, а коэффициент диффузии частиц по импульсам определяется характеристиками турбулентной среды [4, 7, 11, 26, 28].

Космические лучи (КЛ) интенсивно рассеиваются на флуктуациях магнитного поля, и их функция распределения становится близкой к изотропной. Это обстоятельство позволяет получить уравнение переноса КЛ, описывающее пространственно-энергетическое распределение частиц [5, 26, 27]. Как стационарные, так и зависящие от времени аналитические решения уравнения переноса КЛ, описывающего процесс статистического ускорения частиц в различных астрофизических ситуациях, получены в работах [2, 4, 9, 18, 19, 25, 26, 29]. В некоторых работах статистическое ускорение частиц исследуется на основании численных решений уравнения переноса КЛ [20—22, 30, 31].

Статистическое ускорение Ферми широко используется при описании генерации солнечных космических лучей [11, 14, 17, 20, 21, 26, 29], исследовании взаимодействия частиц высокой энергии с плазменной турбулентностью в магнитосферах черных дыр [9, 10], остатках сверхновых [12] и других астрофизических объектах [2, 8, 18].

Целью настоящей работы является исследование пространственно-энергетического распределения КЛ при наличии стохастического ускорения частиц в ограниченной области пространства и их диффузионного распространения вне и внутри этой области. В работе приведено уравнение переноса КЛ, описывающее статистическое ускорение и диффузионный перенос частиц при их взаимодействии с плазменной турбулентностью, и обсуждаются условия, необходимые для эффективного ускорения частиц. Получены аналитические решения уравнения переноса КЛ при различных предположениях относительно энергетической зависимости коэффициента пространственной диффузии частиц. Анализируются равновесные энергетические распределения ускоренных частиц как в области ускорения КЛ, так и за ее пределами.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Запишем уравнение переноса КЛ, которое описывает статистическое ускорение и пространственную диффузию быстрых частиц в турбулентной среде [5, 13, 27]:

$$\frac{N}{t} - \frac{1}{p^2} \frac{N}{p} p^2 D_p \frac{N}{p} - \frac{1}{r^2} \frac{N}{r} r^2 \frac{N}{r} - q \frac{(p - p_0)}{p^2}, \quad (1)$$

где $N(r, p, t)$ — концентрация частиц с данным значением импульса, D_p — коэффициент пространственной диффузии КЛ. Правая часть уравнения соответствует постоянному источнику частиц, причем в единицу времени в единице объема инжектируется q частиц с импульсом p_0 . Второе слагаемое уравнения (1) описывает процесс статистического ускорения КЛ, имеющего характер диффузии частиц в импульсном пространстве. Величина D_p , которая представляет собой коэффициент диффузии КЛ в импульсном пространстве, в случае ускорения Ферми имеет вид [4, 5, 13]

$$D_p = \frac{1}{3} p^2 \frac{\langle u_1^2 \rangle}{v}, \quad (2)$$

где $\langle u_1^2 \rangle$ — средний квадрат случайной составляющей гидродинамической скорости среды. Третье слагаемое уравнения (1) описывает пространственную диффузию частиц в сферически-симметричном случае, когда концентрация КЛ зависит от единственной пространственной переменной r .

Для описания процесса статистического ускорения КЛ в различных астрофизических ситуациях часто используется следующее приближенное уравнение переноса [9, 20, 21, 25, 27]:

$$\frac{N}{t} - \frac{1}{p^2} \frac{N}{p} p^2 D_p \frac{N}{p} - \frac{N}{t_e} = q \frac{(p - p_0)}{p^2}. \quad (3)$$

Третье слагаемое в левой части уравнения (3) описывает потери частиц, обусловленные, например, их выходом из области ускорения, а величина t_e представляет характерное время «убегания» частиц. Уравнение переноса (3) соответствует пространственно однородному случаю. В этом приближении концентрация частиц не зависит от координат. Отметим, что уравнение переноса (3) было использовано в многочисленных исследованиях стохастического ускорения частиц в различных астрофизических объектах [2, 6, 8, 9, 18, 21, 25, 26, 29].

Предположим, что выход частиц из области ускорения обусловлен диффузией частиц. В этом случае время «убегания» КЛ равно [26, 29]

$$t_e = r_0^2 / D_p, \quad (4)$$

где величина r_0 определяет размер области ускорения частиц. Характерное время ускорения частиц t_a определяется следующим выражением [4, 5]:

$$t_a = p^2 / D_p. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) выражение для коэффициента диффузии КЛ по импульсам D_p (2), получим соотношение

$$t_a \approx 9 \frac{r_0^2}{u_1^2}, \quad (6)$$

согласно которому эффективность ускорения Ферми определяется случайной составляющей скорости турбулентной среды и коэффициентом пространственной диффузии частиц.

При длительной инжекции частиц в системе устанавливается равновесный энергетический спектр КЛ, который определяется характерными временами ускорения частиц (5) и диффузионного переноса КЛ (4). Безразмерная величина, равная отношению времени переноса частиц t_e ко времени ускорения КЛ t_a

$$\frac{t_e}{t_a} = \frac{r_0 u_1^2}{3v}, \quad (7)$$

где $u_1 = \sqrt{u_1^2}$, определяет форму энергетического распределения частиц. Чем больше значение параметра $\frac{t_e}{t_a}$, тем более жестким оказывается спектр ускоренных частиц [6, 14, 20, 21]. Учитывая выражение $\frac{t_e}{t_a} = \frac{r_0 u_1^2}{3v}$ для коэффициента диффузии КЛ ($\frac{r_0}{3v}$ — транспортный пробег частицы), перепишем формулу (7) в следующем виде:

$$\frac{t_e}{t_a} = \frac{r_0 u_1^2}{3v}. \quad (8)$$

Оценим величину $\frac{t_e}{t_a}$ (8) для вспышечной корональной петли, характерный размер которой составляет величину порядка 10^9 см [17, 20, 21]. Для значений магнитного поля в активной области солнечной короны 10 мТл [17, 23] ларморов радиус протона R с кинетической энергией 1 ГэВ равен $6 \cdot 10^4$ см. В межпланетной среде и в плазме солнечной короны, по-видимому, выполняется неравенство $\frac{r_0}{3v} \gg R$ [5, 27]. Однако даже если предположить, что транспортный пробег протона превышает его ларморов радиус на 2-3 порядка, то и в этом случае отношение $\frac{r_0}{3v}$ оказывается очень большим ($\frac{r_0}{3v} = 100 \dots 1000$). Величина случайной скорости среды обычно соответствует альвеновской скорости u_A [20, 21]. Для корональной петли $u_A = 0.01 \dots 0.001$ с [17, 22, 23]. Таким образом, в области ускорения частиц во время солнечной вспышки значение $\frac{t_e}{t_a}$ (8) для протонов с кинетической энергией 1 ГэВ может оказаться как больше, так и меньше единицы. По-видимому, оценка $\frac{t_e}{t_a} \approx 1$ для солнечной вспышки выглядит вполне правдоподобно. Однако расчеты энергетических спектров солнечных космических лучей и их сравнение с данными мировой сети нейтронных мониторов показывают, что для ряда солнечных протонных событий параметр $\frac{t_e}{t_a}$ принимает значения в диапазоне 0.1—0.01 [14, 15, 20, 21]. Этот эффект может быть обусловлен, например, тем обстоятельством, что эффективное ускорение частиц происходит только в небольшой части корональной петли. Кроме того, внешняя по отношению к области ускорения среда может характеризоваться большой величиной транспортного пробега КЛ, что приводит к более быстрому «убеганию» частиц, а ускорение КЛ может оказаться менее эффективным, если значение коэффициента диффузии КЛ по импульсам (D_p) будет меньше, чем описываемое приближенным выражением (2).

**ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНЫЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ
ДИФФУЗИИ**

Рассмотрим ускорение частиц, коэффициент пространственной диффузии которых не зависит от их энергии. Известно, что в пространственно однородном случае (которому соответствует уравнение переноса КЛ (3)) равновесные спектры КЛ описываются степенными функциями импульса частицы [21, 26]. Перейдем к безразмерным переменным

$$r / r_0, \tag{9}$$

$$p / p_0, \tag{10}$$

$$t / t_a, \tag{11}$$

где r_0 — характерный размер области ускорения, p_0 — импульс инжектируемых частиц, t_a — характерное время ускорения КЛ (6). Заметим, что при постоянном коэффициенте диффузии КЛ характерное время ускорения t_a (6) не зависит от энергии частиц. В безразмерных переменных (9)—(11) уравнение переноса КЛ (3) принимает вид

$$\frac{N}{e} = \frac{1}{2} \frac{N}{e} - 4 \frac{N}{e} \frac{N}{e} \frac{qt_a}{p_0^3} \tag{12}$$

Приведем решение стационарного уравнения переноса. В данном случае стационарное энергетическое распределение частиц обусловлено наличием потерь частиц, которым соответствует третье слагаемое уравнения (12). Равновесный спектр КЛ будет иметь место в случае, когда количество частиц, инжектированных в единицу времени в единице объема (правая часть уравнения (12)), равно числу частиц, покидающих данный объем пространства вследствие потерь. Концентрация КЛ $N(\)$ зависит только от переменной $\)$ и является непрерывной функцией импульса частицы. В точке $\) = 1$ (значение безразмерного импульса, равное единице, соответствует импульсу инжектированных частиц p_0) имеет место соотношение

$$\frac{N(1)}{e} = \frac{N(0)}{e} - \frac{qt_a}{p_0^3}. \tag{13}$$

Скачок производной концентрации КЛ по импульсу в точке инжекции обусловлен наличием источника частиц в уравнении переноса КЛ (12). Стационарное решение уравнения переноса (12), удовлетворяющее условию (13), имеет следующий вид:

$$N(\) = \frac{qt_a}{p_0^3} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{e}}} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 - \frac{4}{9e}}. \tag{14}$$

Знак минус в показателе степени выражения (14) соответствует частицам низких энергий, импульс которых меньше импульса инжекции ($\) < 1$), а знак плюс — частицам высоких энергий ($\) > 1$).

Таким образом, приходим к известному результату о том, что при постоянном коэффициенте диффузии КЛ стационарный жесткостной спектр ускоренных частиц имеет степенной вид [21, 26].

Перейдем к решению нестационарного уравнения переноса КЛ (12). Выполним преобразование Лапласа концентрации КЛ $N(x, t)$:

$$N(x, p) = \int_0^\infty N(x, t) \exp(-pt) dt. \quad (15)$$

Для образа Лапласа концентрации КЛ (15) получаем следующее уравнение, соответствующее уравнению переноса КЛ (12):

$$\frac{1}{e} N(x, p) = \frac{1}{2} p^{-4} N(x, p) + \frac{qt_a}{p_0^3} \exp(-px). \quad (16)$$

Решение уравнения (16), удовлетворяющее граничному условию (13), имеет вид

$$N(x, p) = \frac{qt_a}{2 p_0^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}}} \exp\left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}} x\right), \quad (17)$$

причем знак плюс в показателе степени формулы (17) соответствует частицам низких энергий ($\beta < 1$), а знак минус — частицам, импульс которых превышает импульс инжекции ($\beta > 1$). Используя таблицы преобразования Лапласа и теорему о свертке [1], получим следующее соотношение для концентрации КЛ:

$$N(x, t) = \frac{qt_a}{p_0^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e}}} \int_0^x \frac{dx}{x^2} \exp\left(-\frac{\ln^2}{4} x^2 - \frac{1}{e} - \frac{9}{4} \frac{1}{x^2}\right). \quad (18)$$

Воспользовавшись известным значением интеграла [3]

$$\int_0^x dx \exp(-a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp(2ab) \operatorname{erf} ax - \frac{b}{x} \exp(-2ab) \operatorname{erf} ax - \frac{b}{x} \exp(2ab) \exp(-2ab), \quad (19)$$

можно получить следующее соотношение:

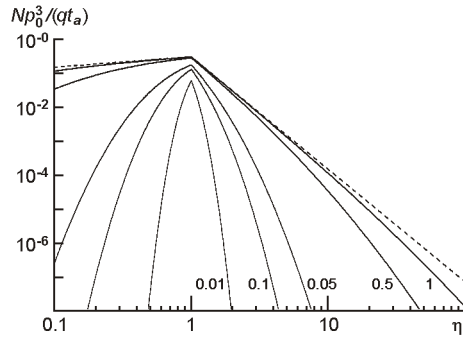
$$\int_0^x \frac{dx}{x^2} \exp\left(-x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{e}} \exp(2\sqrt{e}) \operatorname{erfc} x\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{x} \exp(2\sqrt{e}) \operatorname{erfc} x\sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{x} \exp(2\sqrt{e}) \exp(-2\sqrt{e}), \quad (20)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$ — интеграл вероятностей и дополнительный интеграл вероятностей соответственно. Принимая во внимание формулу (20), запишем соотношение для концентрации КЛ (18) в следующем виде:

$$N(p, t) = \frac{qt_a}{4p_0^3} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}}}^{3/2} \exp \left[-\left| \ln \left| \sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}} \operatorname{erfc} \frac{|\ln p|}{2\sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}}} \right| \right] \right. \\ \left. \exp \left[-\left| \ln \left| \sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}} \operatorname{erfc} \frac{|\ln p|}{2\sqrt{\frac{1}{e} - \frac{9}{4}}} \right| \right] \right]. \quad (21)$$

Нестационарное уравнение переноса (12) описывает эволюцию функции распределения частиц в импульсном пространстве при наличии постоянного моноэнергетического источника. Распределение КЛ по импульсам со временем приближается к равновесному распределению, которое описывается решением стационарного уравнения переноса. Действительно, можно показать, что если время, прошедшее после начала инъекции частиц, значительно превышает характерное время ускорения (6) ($\tau \gg 1$, $\eta \gg 1$), выражение для концентрации КЛ (21) переходит в соотношение (14), описывающее равновесное энергетическое распределение частиц.

Рис. 1. Зависимость концентрации космических лучей от безразмерного импульса частицы в различные моменты времени (числа у кривых)



На рис. 1 приведена зависимость безразмерной величины $Np_0^3 / (qt_a)$ (которая пропорциональна концентрации частиц (21)) от импульса $\eta = p/p_0$ в различные моменты времени. Числа у кривых соответствуют значениям безразмерного времени (11), а параметр e равен единице. Штриховая кривая на рис. 1 иллюстрирует равновесное энергетическое распределение частиц (14). Видно, что со временем начальное моноэнергетическое распределение расширяется, постепенно заполняя все импульсное пространство, и приближается к решению стационарного уравнения переноса (штриховая кривая на рис. 1).

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ДИФФУЗИИ И ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТЬЮ УСКОРЕНИЯ

Рассмотрим стационарное пространственно-энергетическое распределение частиц, коэффициент диффузии которых не зависит от их энергии. Предположим, что ускорение частиц происходит в ограни-

ченной области пространства ($r < r_0$), в каждой точке которой происходит инжекция частиц с импульсом p_0 .

Таким образом, в пространственной области $\xi < 1$ уравнение переноса КЛ имеет вид (1). Запишем стационарное уравнение переноса КЛ в безразмерных переменных (9), (10)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 N}{d\xi^2} - \frac{N}{2} = \frac{qt_a}{p_0^3} \quad (1). \quad (22)$$

Заметим, что уравнение (22) справедливо в ограниченной области пространства ($r < r_0$), в которой происходит взаимодействие КЛ с плазменной турбулентностью. Предположим, что во внешней области пространства ($r > r_0$) ускорение КЛ не происходит, а имеет место только рассеяние заряженных частиц на неоднородностях магнитного поля без изменения энергии частиц. Отметим, что инжекция частиц имеет место только в ограниченной области пространства ($r < r_0$). Со временем частицы будут заполнять все больший объем пространства, а их пространственно-энергетическое распределение будет постепенно приближаться к равновесному распределению, которое описывается стационарными уравнениями переноса КЛ. В данном разделе полагаем, что перенос КЛ во внешней среде характеризуется таким же коэффициентом диффузии D , что и в области ускорения частиц. Отметим, что мы рассматриваем сферически-симметричное пространственное распределение частиц. В этом случае концентрация частиц во внешней среде удовлетворяет стационарному, однородному уравнению диффузии и изменяется обратно пропорционально радиусу r ($N(r) \sim 1/r$).

Выполнив преобразование Меллина

$$N(\xi, s) = \int_0^\xi N(\xi', s) \xi'^{s-1} d\xi'$$

уравнения переноса (22), получим следующее уравнение для образа Меллина концентрации частиц:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 N(\xi, s)}{d\xi^2} - s(s-3)N(\xi, s) = \frac{qt_a}{p_0^3}. \quad (24)$$

Решение этого уравнения, которое справедливо в пространственной области $\xi < 1$, имеет вид

$$N(\xi, s) = C(s) \frac{\sin \sqrt{e} s(s-3)}{\sqrt{e} s(s-3)} = \frac{qt_a}{p_0^3 s(s-3)}, \quad (25)$$

где величина $C(s)$ не зависит от координат.

Во внешней области ($\xi > 1$) образ Меллина концентрации КЛ определяется соотношением

$$N(\xi, s) = A(s) / \xi. \quad (26)$$

Так как предполагаем, что коэффициенты диффузии КЛ в области ускорения и во внешней среде совпадают, то из непрерывности диффузионного потока частиц на сфере радиуса r_0 следует непрерывность

радиального градиента концентрации КЛ. Записав условие непрерывности концентрации КЛ (25), (26) и производных величины $N(\rho, s)$ (25), (26) по координате ρ в точке $\rho = 1$, получим систему уравнений для определения постоянных $C(s)$ и $A(s)$. В результате получим следующее выражение для образа Меллина концентрации КЛ в области ускорения частиц ($\rho < 1$):

$$N(\rho, s) = \frac{qt_a}{p_0^3 s(s-3)} \frac{\sin(\rho(s-3))}{(s-3)\cos(\rho(s-3))} \rho, \quad (27)$$

где

$$\rho(s) = \sqrt{e s(s-3)}. \quad (28)$$

Выражение (27) является четной функцией переменной s , т. е. в ее разложении в ряд Тэйлора по s имеются только четные степени переменной s . Таким образом, выражение (27) является функцией величины s^2 , а образ Меллина концентрации КЛ $N(\rho, s)$ (27) оказывается рациональной функцией переменной s . Функция (27) комплексной переменной s не имеет точек ветвления, ее особыми точками являются простые полюса, которые определены формулой

$$s_n = \frac{3}{2} \pm 1 \sqrt{1 - \frac{(2n-1)^2}{9e}}. \quad (29)$$

Чтобы получить выражение для концентрации КЛ, необходимо выполнить обратное преобразование Меллина:

$$N(\rho, \rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L} ds N(\rho, s) \rho^{-s}. \quad (30)$$

Интегрирование в формуле (30) производится по прямой, параллельной мнимой оси, которая расположена в правой полуплоскости комплексной переменной s левее всех особых точек функции $N(\rho, s)$ (27). Обратное преобразование Меллина функции (27) выполним, используя теорему Коши и теорию вычетов. При вычислении интеграла (30) для частиц высоких энергий ($\rho > 1$) замыкаем контур интегрирования дугой бесконечного радиуса, расположенной в правой полуплоскости комплексной переменной s . Отметим, что в силу леммы Жордана интеграл по этой дуге будет становиться пренебрежимо малым при стремлении радиуса дуги к бесконечности. Поэтому вычеты необходимо вычислять только в положительных значениях s_n , которым соответствует знак плюс в формуле (29). Напротив, если $\rho < 1$, замыкаем контур интегрирования дугой, расположенной в левой полуплоскости переменной s . Поэтому при вычислении вычетов используем отрицательные значения s_n , которым соответствует знак минус в соотношении (29). В результате получаем следующее выражение для концентрации частиц:

$$N(\rho, \rho) = \frac{8}{3^2} \frac{qt_a}{p_0^3} \rho^{-s_n} (1-\rho)^{s_n} \frac{\sin[(2n-1)\rho/2]}{(2n-1)^2 \sqrt{1 - (2n-1)^2/(9e)}} \rho^{s_n}, \quad (31)$$

где показатель степени s_n определен соотношением (29). Причем для

частиц, импульс p которых превышает импульс инжекции p_0 (> 1), необходимо выбрать знак плюс в формуле (29), а для частиц низкой энергии (< 1) — знак минус в соотношении (29). Полученные соотношения (29), (31) описывают пространственно-энергетическое распределение КЛ в пределах области ускорения частиц (< 1). Форма спектра КЛ во внешней области (> 1) определяется спектром частиц на границе области ускорения, т. е. в точке $= 1$. Концентрация частиц во внешней среде ($r > r_0$) изменяется в пространстве обратно пропорционально радиусу r и определяется соотношением $N(,) = N(1,)$. Если импульс ускоренных частиц значительно превышает импульс инжекции ($>> 1$), из соотношения (31) следует степенная зависимость концентрации КЛ от импульса с показателем степени s_0 :

$$N(,) \propto \frac{1}{r^{s_0}},$$

$$s_0 = \frac{3}{2} + 1 \sqrt{1 - \frac{2}{9e}}. \quad (32)$$

Отметим, что величина s_0 (32) отличается от показателя спектра в формуле для концентрации ускоренных частиц (14), соответствующей приближению пространственно однородного распределения частиц. Отличие состоит только в подкоренном выражении и может быть устранено соответствующей перенормировкой безразмерного параметра e .

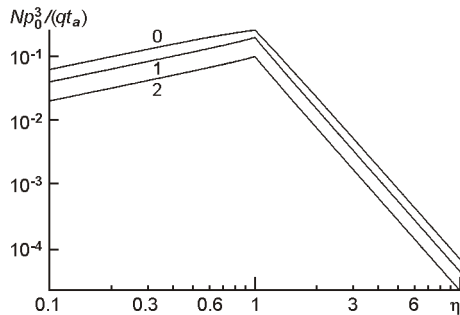


Рис. 2. Равновесный спектр ускоренных частиц. Числа у кривых — значения безразмерной координаты

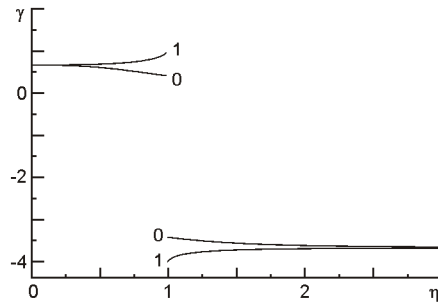
На рис. 2 представлена зависимость концентрации частиц от импульса в различных точках пространства. Параметр e равен единице, а числа у кривых соответствуют значениям безразмерной координаты η . Приведены спектры КЛ в центре системы, на границе области ускорения и на расстоянии r_0 от этой границы (кривые, обозначенные 0, 1 и 2 соответственно). Видно, что спектры КЛ оказываются степенными за исключением области вблизи значений η , близких к единице. Другими словами, спектр КЛ отличается от степенного только для частиц, импульсы которых близки к величине импульса инжекции p_0 . Для частиц, энергия которых существенно отлична от энергии инжектированных частиц, спектр оказывается степенным для всех значений η , причем показатель спектра КЛ не зависит от пространственных координат.

Если концентрация частиц с данным значением импульса $N(p)$ известна, то показатель жесткостного спектра КЛ можно вычислить согласно формуле

$$\frac{p}{N(p)} \frac{N(p)}{p} = \frac{N(\eta)}{N(\eta)}. \quad (33)$$

Зависимость показателя спектра КЛ (31), (33) от импульса частицы приведена на рис. 3. Числа у кривых соответствуют значениям координаты η , параметр η_0 выбран равным единице. Приведены показатели спектра КЛ в центре системы ($\eta = 0$) и на границе области ускорения частиц ($\eta = 1$). Форма спектра КЛ во внешней, диффузионной области не зависит от координат, поэтому зависимость величины от импульса частицы во внешней среде ($r > r_0$) оказывается такой же, как и на границе области ускорения (кривая, соответствующая значению $\eta = 1$). Из рис. 3 видно, что показатель спектра КЛ (31), (33) практически не зависит от координат, если безразмерный импульс частиц отличается от импульса инъекции ($\eta = 1$) на величину $\sim 1/2$). Следовательно, показатель стационарного спектра ускоренных частиц, энергия которых значительно превышает энергию испускаемых частиц, оказывается постоянным во всех точках пространства.

Рис. 3. Показатель равновесного спектра частиц в центре области ускорения ($\eta = 0$) и на ее границе ($\eta = 1$)



Для того чтобы проиллюстрировать изменение пространственного распределения ускоренных частиц со временем, рассмотрим эволюцию концентрации КЛ всех энергий

$$n(r, t) = \int_0^{\infty} dp p^2 N(r, p, t). \quad (34)$$

Проинтегрировав уравнение переноса КЛ (1) по импульсам (с весом p^2), получим следующее уравнение диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial n}{\partial r} \right) + q, \quad (35)$$

правая часть которого представляет собой постоянный источник КЛ, инжестирующий в единицу объема в единицу времени q частиц. Уравнение (35) справедливо в области ускорения частиц, а во внешней области ($r > r_0$) распространение КЛ описывается однородным уравнением диффузии (источник частиц отсутствует). Введем безразмерное время

$$t / t_e, \quad (36)$$

где t_e — характерное время диффузионного переноса частиц (4). Уравнение диффузии КЛ в пространственной области ($r < r_0$) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} = \frac{n}{t_e}, \quad (37)$$

где безразмерная координата r определена формулой (9). Предполагаем, что во внешней области ($r > 1$) источник частиц отсутствует, а перенос КЛ описывается диффузионным уравнением (37), но с равной нулю правой частью.

Выполнив преобразование Лапласа, получим следующее уравнение для образа Лапласа концентрации КЛ $n(r, t)$ в области ускорения ($r < 1$):

$$n(r, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 n(r, t)}{\partial r^2} = \frac{n(r, t)}{qt_e}. \quad (38)$$

Решение уравнения (38) имеет вид

$$n(r, t) = A \frac{\text{sh} \sqrt{r}}{r} \frac{qt_e}{2}. \quad (39)$$

Во внешней области ($r > 1$) образ Лапласа концентрации КЛ определяется соотношением

$$n(r, t) = B \frac{\exp(-\sqrt{r})}{r}. \quad (40)$$

Постоянные величины A, B находим из условий непрерывности концентрации и диффузионного потока КЛ в точке $r = 1$. Таким образом, образ Лапласа концентрации частиц в области ускорения ($r < 1$) имеет вид

$$n(r, t) = \frac{qt_e}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{r}} \right) [\exp(-\sqrt{r}) - \exp(-\sqrt{r})] \right]. \quad (41)$$

Во внешней области образ Лапласа концентрации КЛ описывается соотношением

$$n(r, t) = \frac{qt_e}{2} \frac{\exp(-\sqrt{r}) - \exp(-\sqrt{r})}{\sqrt{r}}. \quad (42)$$

Обратное преобразование Лапласа соотношений (41), (42) выполним, воспользовавшись таблицами преобразований Лапласа [1]. В результате получаем следующее выражение для концентрации КЛ в области ускорения ($r < 1$):

$$n(r, t) = qt_e \frac{qt_e}{2} \frac{(1 - r)^2 (2 - r)}{6} \text{erfc} \frac{1}{2\sqrt{r}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1-x)^2(2-x)}{6} \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ & \frac{\sqrt{t}}{3\sqrt{t}} \left[4 - (1-x)(2-x) \right] \exp \frac{(1-x)^2}{4} \\ & + \frac{\sqrt{t}}{3\sqrt{t}} \left[(1-x)(2-x) - 4 \right] \exp \frac{(1-x)^2}{4} . \end{aligned} \quad (43)$$

Концентрация КЛ во внешней области ($x > 1$) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \frac{qt_e}{2} \frac{(x-1)^2(x-2)}{6} \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ & \frac{(x-1)^2(x-2)}{6} \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{t}} \\ & \frac{\sqrt{t}}{3\sqrt{t}} \left[(x-1)(x-2) - 4 \right] \exp \frac{(x-1)^2}{4} \\ & \frac{\sqrt{t}}{3\sqrt{t}} \left[(x-1)(x-2) - 4 \right] \exp \frac{(x-1)^2}{4} . \end{aligned} \quad (44)$$

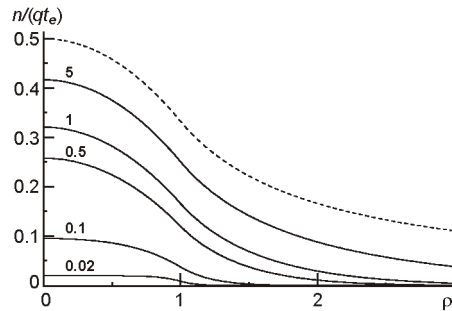
Если время, прошедшее после начала инъекции частиц, значительно превышает характерное время диффузии t_e ($x \gg 1$, $t \gg t_e$), то концентрация КЛ (43), (44) приближается к величине

$$n(x) = \frac{qt_e}{3} \frac{3}{2} (x-1) \frac{1}{(x-1)}, \quad (45)$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ — единичная функция Хевисайда. Отметим, что выражение для концентрации КЛ (45) является решением соответствующей стационарной задачи.

На рис. 4 представлена зависимость концентрации КЛ (43), (44) от безразмерной координаты x в различные моменты времени (числа у кривых). Пунктирная кривая иллюстрирует решение стационарного диффузионного уравнения (45). При малых значениях t концентрация КЛ в области ускорения практически не зависит от координат, а во

Рис. 4. Зависимость концентрации космических лучей от координаты x в различные моменты времени (числа у кривых)



внешней области находится пренебрежимо малое число частиц (кривая, соответствующая $\beta = 0.02$). С течением времени пространственное распределение КЛ постепенно приближается к равновесному (45).

Характеристики переноса КЛ в области ускорения и вне ее могут сильно различаться. Например, транспортный пробег КЛ в межпланетной среде значительно превосходит пробег частиц в солнечной короне. Транспортные пробеги частиц высокой энергии внутри остатка сверхновой и в межзвездной среде также могут существенно различаться. Параметры переноса частиц во внешней среде могут влиять на форму энергетического спектра КЛ как в пределах области ускорения частиц, так и вне ее. В работе [24] получено стационарное решение уравнения переноса (1) в одномерном случае для ограниченной области ускорения частиц ($-L < x < L$) при свободном распространении КЛ во внешней области (что соответствует нулевым граничным условиям в точках $\pm L$). Авторами проведено сравнение полученного пространственно-энергетического распределения ускоренных частиц с энергетическим распределением КЛ, соответствующим уравнению (3) [24].

Предположим, что перенос КЛ в области ускорения частиц характеризуется коэффициентом диффузии D_1 , а во внешней среде ($r > r_0$) — D_2 . В этом случае из условия непрерывности диффузионного потока КЛ на границе области ускорения частиц следует, что производная концентрации КЛ по пространственной переменной испытывает скачок в точке $x = L$. Величина этого скачка пропорциональна отношению коэффициентов диффузии КЛ D_2/D_1 . Стационарное пространственное распределение концентрации частиц в данном случае описывается соотношением

$$n = \frac{qt_e}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right), \quad (46)$$

Отметим, что в предельном случае $D_2 = D_1$ формулы (45) и (46) совпадают.

Рассмотрим стационарное пространственно энергетическое распределение концентрации КЛ $N(r, E)$ в диффузионной среде с отличающимися рассеивающими свойствами. В области ускорения частиц ($\beta < 1$) перенос КЛ характеризуется коэффициентом диффузии D_1 , а уравнение переноса имеет вид (1). Во внешней области ($\beta > 1$) концентрация КЛ $N(r, E)$ удовлетворяет уравнению диффузии с коэффициентом диффузии D_2 . Образ Меллина концентрации КЛ имеет вид (25) или (26) для области ускорения и для внешней области соответственно. Из условия непрерывности диффузионного потока КЛ в точке $x = L$ следует соотношение

$$\frac{N(1, 0, E)}{D_1} = \frac{N(1, 0, E)}{D_2}. \quad (47)$$

Условие непрерывности концентрации КЛ и граничное условие (47) позволяют определить константы A, C , которые входят в формулы для образа Меллина концентрации частиц (25), (26). Таким образом,

получим следующее выражение для концентрации КЛ в области ускорения частиц ($\beta < 1$):

$$N(\beta, s) = \frac{qt_a}{p_0^3 s(s-3)} \frac{\sin(s) \cos(s)}{1 - \sin(s) - (s)\cos(s)} \quad (48)$$

где функция $\psi(s)$ определена формулой (28). Заметим, что в предельном случае $\beta = 1$ соотношение (48) совпадает с выражением для объема Меллина концентрации КЛ (27).

Выполнив обратное преобразование Меллина, получим следующее выражение для концентрации частиц в пространственной области $r < r_0$:

$$N(\beta, r) = \frac{2qt_a}{3 p_0^3 r^3} \frac{\sin \frac{x_n}{2}}{x_n - x_n \sin x_n \cos x_n} \sqrt{1 - \frac{4x_n^2}{9}}^{s_n}, \quad (49)$$

где x_n — корни уравнения

$$1 - \sin x - x \cos x = 0. \quad (50)$$

Показатель степени в соотношении (49) определяется формулой

$$s_n = \frac{3}{2} + \sqrt{1 - \frac{4x_n^2}{9}}, \quad (51)$$

причем знак плюс соответствует частицам высокой энергии ($\beta > 1$), а знак минус — низкой ($\beta < 1$). При стремлении коэффициента β диффузии КЛ во внешней среде к величине $\beta = 1$ выражение для концентрации КЛ (49) переходит в (31). Концентрация частиц во внешней среде ($\beta > 1$) обратно пропорциональна радиусу. Таким образом, спектр КЛ во внешней области определяется энергическим распределением частиц на границе области ускорения ($N(\beta, r) = N(1, r) / \beta$), а форма спектра не зависит от координат.

Из формулы (49) следует, что для высокоэнергичных частиц ($\beta \gg 1$) имеет место степенная зависимость концентрации КЛ от импульса частицы с показателем спектра

$$s_0 = \frac{3}{2} + \sqrt{1 - \frac{4x_0^2}{9}}. \quad (52)$$

Заметим, что величина x_0 , самый малый положительный корень уравнения (50), зависит от единственного параметра β / β_1 . При условии $\beta = \beta_1$ имеем $x_0 = 2$, и выражения для s_0 (52) и (32) совпадают. При

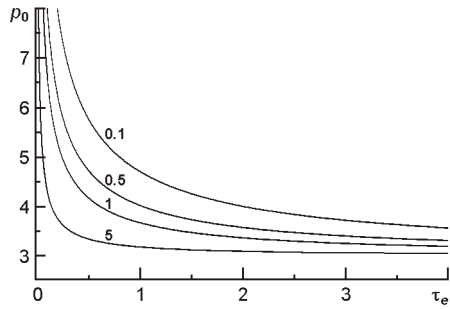


Рис. 5. Показатель спектра частиц высокой энергии как функция величины τ_e . Числа у кривых равны отношению коэффициентов диффузии космических лучей в области ускорения и вне нее (D_1/D_2)

уменьшении параметра D_1/D_2 величина x_0 увеличивается. Следовательно, при увеличении коэффициента диффузии КЛ во внешней среде показатель степени s_0 также увеличивается, а спектр КЛ становится более мягким ($N(\epsilon) \propto \epsilon^{-s_0}$). Напротив, при уменьшении величины D_1/D_2 вынос частиц из области ускорения становится менее интенсивным, в результате спектр частиц высокой энергии будет более жестким.

На рис. 5 приведена зависимость показателя спектра s_0 (52) от величины τ_e (характеризующей эффективность ускорения) при различных значениях параметра D_1/D_2 (числа у кривых). Видно, что при заданном отношении коэффициентов диффузии КЛ величина показателя спектра s_0 уменьшается при увеличении τ_e (7). Следовательно, при увеличении параметра τ_e спектр КЛ становится более жестким. При увеличении коэффициента диффузии КЛ во внешней среде (т. е. при уменьшении отношения D_1/D_2) и заданной величине τ_e показатель спектра КЛ также увеличивается, и спектр частиц становится более мягким (рис. 5). Действительно, при интенсивном переносе КЛ во внешней области частицы быстрее покидают область ускорения, и равновесный энергетический спектр КЛ оказывается более крутым.

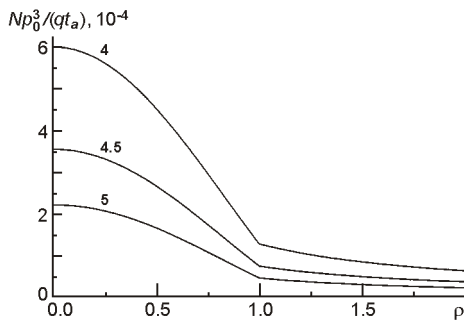


Рис. 6. Пространственная зависимость концентрации космических лучей. Числа у кривых — значения безразмерного импульса

Зависимость концентрации КЛ (49) от координаты ρ представлена на рис. 6. Значения безразмерного импульса частиц приведены у кривых. Выбраны следующие величины параметров: $\tau_e = 1$; $D_1/D_2 = 0.2$. Максимум концентрации КЛ имеет место в центре системы ($\rho = 0$), а во внешней области концентрация частиц уменьшается пропорционально величине $1/r$. В точке $r = r_0$ ($\rho = 1$) производная концентрации частиц по пространственной координате испытывает скачок, обу-

словленный различными рассеивательными свойствами среды в области ускорения КЛ и вне нее (1).

**СТАТИСТИЧЕСКОЕ УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ,
КОЭФФИЦИЕНТ ДИФфуЗИИ КОТОРЫХ ЗАВИСИТ ОТ ИХ ИМПУЛЬСА**

Коэффициент диффузии КЛ в космической среде зависит от энергии частиц [5, 27]. Следовательно, характерное время ускорения частиц t_a (5) и время «убегания» КЛ t_e (4) являются функциями импульса частицы, причем частицы высокой энергии быстрее покидают область ускорения. Следовательно, эффективность статистического ускорения уменьшается с увеличением энергии частицы. Энергетический спектр ускоренных частиц уже не будет степенной функцией p , а будет становиться все более крутым (мягким) при увеличении импульса частицы [9, 15, 20, 21].

Предположим, что коэффициент диффузии КЛ зависит от импульса частицы по степенному закону

$$D = D_0 p^\alpha, \tag{53}$$

где D_0 — коэффициент диффузии частиц, импульс которых равен импульсу инъекции p_0 . В этом случае коэффициент диффузии КЛ по импульсам (2) может быть записан в виде

$$D_p = D_0 p^\alpha, \tag{54}$$

где

$$D_0 = \frac{p_0^2 u_1^2}{9 p_0}. \tag{55}$$

Рассмотрим статистическое ускорение частиц в пространственно однородном случае, когда концентрация КЛ удовлетворяет уравнению (3). Нас будут интересовать равновесные энергетические распределения частиц, которые описываются стационарными уравнениями переноса. Запишем стационарное уравнение (3), принимая во внимание соотношения (10), (53), (54)

$$\frac{N}{e} \frac{1}{2} \frac{d}{dp} \left(p^4 \frac{N}{p_0^3} \right) = 0. \tag{56}$$

В уравнение (56) входят параметры t_a (6) и t_e (7), которые определены в точке $p = p_0$. Концентрация частиц с данным значением импульса $N(p)$ является непрерывной функцией импульса и удовлетворяет граничному условию (13), которое возникает вследствие наличия источника частиц в правой части уравнения (56). Решение уравнения (56) ищем в виде

$$N(p) = N_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{3}{2}}. \tag{57}$$

Выполнив замену переменной

$$\frac{1}{\sqrt{e}}, \quad (58)$$

получаем модифицированное уравнение Бесселя для функции (). Учитывая граничное условие (13), приходим к следующему выражению для концентрации КЛ низких энергий (< 1):

$$N(\eta) = \frac{qt_a}{p_0^3} \frac{3}{2} K_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) I(\eta), \quad (59)$$

где $I(x)$, $K(x)$ — модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда соответственно, а порядок этих функций определяется формулой

$$\frac{3}{2}. \quad (60)$$

Концентрация частиц, импульс которых превосходит импульс инжекции (> 1), имеет вид

$$N(\eta) = \frac{qt_a}{p_0^3} \frac{3}{2} I_{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right) K(\eta). \quad (61)$$

Если импульс частиц значительно превосходит импульс инжекции, можно использовать известное выражение для асимптотики функции Макдональда [1]. Таким образом, при условии $\eta \gg 1$ из формулы (61) получим

$$N(\eta) \approx \frac{3}{2} \exp \left(-\frac{1}{\sqrt{e}} \eta \right). \quad (62)$$

Отметим, что соотношения для концентрации КЛ, аналогичные формулам (58)—(61), были получены в работах [9, 11, 14, 25].

Зависимость концентрации КЛ от безразмерного импульса частицы $\eta = p/p_0$ приведена на рис. 7. Параметр e , определяющий зависимость коэффициента диффузии КЛ от импульса (53), выбран равным единице, а числа у кривых равны значениям величины e (7). Видно, что при увеличении импульса частицы спектр КЛ становится круче, т. е. более высоким энергиям соответствует более мягкий энергетический спектр. Большим значениям параметра e соответствует более жесткий спектр КЛ, т. е. более эффективное ускорение частиц.

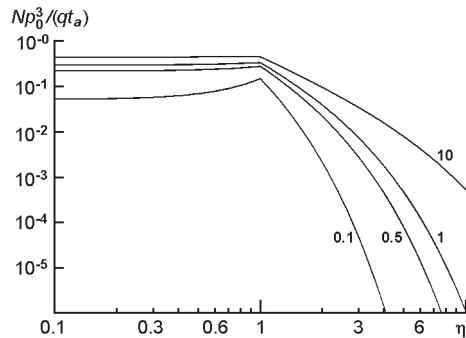


Рис. 7. Равновесный спектр ускоренных частиц. Числа у кривых — значения параметра e .

Перейдем к исследованию равновесного пространственно-энергетического распределения ускоренных частиц на основе уравнения переноса (1). В случае степенной зависимости коэффициента диффузии КЛ от импульса частицы (53), стационарное уравнение переноса КЛ принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 N}{e^2} - \frac{N}{e^2} = \frac{qt_a}{p_0^3} \quad (63)$$

Заметим, что уравнение переноса (63) описывает пространственно-энергетическое распределение концентрации частиц в области ускорения ($e < 1$), а во внешней среде ($e > 1$) имеет место только диффузионное распространение КЛ (с тем же коэффициентом диффузии D). Введем функцию $N(e, s)$ согласно соотношению (57) и перейдем к переменной s (58). Функция $N(e, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 N}{ds^2} - \frac{N}{2} = \frac{qt_a}{p_0^3} \sqrt{e} \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad (64)$$

где величина D определена формулой (60).

Выполним преобразование Фурье — Бесселя функции $N(e, s)$:

$$N(e, s) = \int_0^\infty J_0(sx) N(e, x) dx, \quad (65)$$

где $J(x)$ — функция Бесселя. Получим следующее уравнение для образа Фурье — Бесселя концентрации частиц:

$$s^2 N(e, s) - \frac{1}{2} N(e, s) = \frac{qt_a}{p_0^3} J_0\left(\frac{s}{\sqrt{e}}\right). \quad (66)$$

Решение уравнения (66) имеет вид

$$N(e, s) = C(s) \frac{\exp(-s) - \exp(s)}{s^2 p_0^3} J_0\left(\frac{s}{\sqrt{e}}\right). \quad (67)$$

Во внешней области ($e > 1$) концентрация КЛ удовлетворяет стационарному уравнению диффузии (рассматриваем сферически-симметричное пространственное распределение частиц) и изменяется обратно пропорционально координате e . Условия непрерывности концентрации КЛ и ее производной по e в точке $e = 1$ позволяют получить следующее уравнение для $C(s)$ на границе области ускорения ($e = 1$):

$$C(1, s) - C(s) = 0. \quad (68)$$

Соотношение (68) позволяет определить величину $C(s)$ в формуле (67). Приходим к следующему выражению для образа Фурье — Бесселя функции N :

$$N(r, s) = \frac{qt_a}{s^2 p_0^3} J_0 \left(\frac{s}{\sqrt{e}} \right) \left[1 - \frac{\text{sh } s\sqrt{e}}{s\sqrt{e} \text{ch } s\sqrt{e}} \right]. \quad (69)$$

Выполним обратное преобразование Фурье — Бесселя:

$$N(r, \eta) = \int_0^\infty ds s J_0(s\eta) N(r, s). \quad (70)$$

Воспользовавшись соотношениями (57), (58), получим следующее соотношение для концентрации КЛ в области ускорения ($\eta < 1$):

$$N(r, \eta) = \frac{qt_a}{p_0^3} \int_0^\infty ds \frac{J_0(s\eta) J_0(s)}{s} \left[1 - \frac{\text{sh } s\sqrt{e}}{s\sqrt{e} \text{ch } s\sqrt{e}} \right]. \quad (71)$$

Концентрация частиц во внешней области ($\eta > 1$) определяется значением концентрации частиц на границе области ускорения

$$N(r, \eta) = \frac{N(r, 1)}{\eta}, \quad (72)$$

где величина $N(r, 1)$ вычисляется по формуле (71) в точке $\eta = 1$.

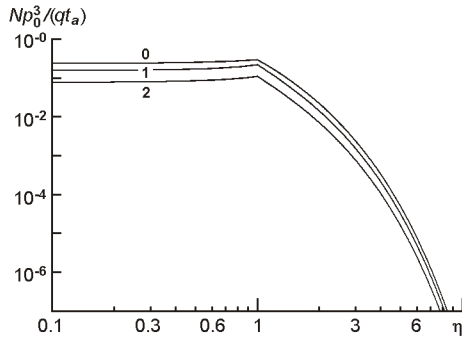


Рис. 8. Равновесный спектр космических лучей в различных точках пространства. Числа у кривых — значения координаты

На рис. 8 приведена зависимость концентрации КЛ от безразмерного импульса частицы в различных точках пространства. Числа у кривых соответствуют значениям координаты r . Выбраны следующие значения параметров: $e = 1$, $p_0 = 1$. Форма спектра КЛ во внешней среде ($\eta > 1$) не зависит от координат. Так, например, кривые, соответствующие равновесному энергетическому распределению частиц на границе области ускорения ($\eta = 1$) и на расстоянии r_0 от этой границы ($\eta = 2$), имеют одинаковую форму. Расчеты показывают, что для частиц, импульс которых превышает импульс инжекции в два раза и более, форма равновесного энергетического распределения КЛ не зависит от координат и достаточно хорошо согласуется с соотношением (61), если в этой формуле изменить параметр e в $4/\eta^2$ раз.

Предположим, что распространение КЛ в пределах области ускорения частиц и вне нее характеризуется различными коэффициентами диффузии (D_1). В области ускорения частиц уравнение переноса КЛ имеет вид (63), а образ Фурье — Бесселя функции удовлетворя-

ет соотношению (67). Однако условие непрерывности диффузионного потока частиц на границе области ускорения имеет в данном случае вид (47). Вследствие этого вместо граничного условия (68) приходим к соотношению

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, s)}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (73)$$

Подставив функцию $N(\mathbf{r}, s)$ (67) в уравнение (73), получим соотношение для постоянной $C(s)$. Таким образом, образ Фурье — Бесселя функции $N(\mathbf{r}, s)$ имеет вид

$$N(\mathbf{r}, s) = \frac{qt_a}{s^2 p_0^3} J_0\left(\frac{s}{\sqrt{e}} r\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\text{sh} s\sqrt{e}}{1 - \text{sh} s\sqrt{e}} - \frac{s\sqrt{e} \text{ch} s\sqrt{e}}{1 - \text{sh} s\sqrt{e}}}. \quad (74)$$

Выполнив обратное преобразование Фурье — Бесселя (70), учитывая соотношения (57), (58), получим следующее выражение для концентрации частиц в пространственной области $r < 1$:

$$N(\mathbf{r}, s) = \frac{qt_a}{p_0^3} \int_0^{\frac{3}{2}} ds \frac{J_0(s) J_0\left(\frac{s}{\sqrt{e}} r\right)}{s} \cdot \frac{\text{sh} s\sqrt{e}}{1 - \text{sh} s\sqrt{e} - s\sqrt{e} \text{ch} s\sqrt{e}}$$

Заметим, что в предельном случае $\mu = 1$ соотношение (75) совпадает с (71). Во внешней среде ($\mu > 1$) концентрация КЛ удовлетворяет соотношению (72). Расчеты показывают, что для частиц высокой энергии ($p \sim 2p_0$) форма спектра КЛ практически не зависит от координат, и при соответствующей перенормировке параметра μ хорошо описывается формулой (61).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено статистическое ускорение космических лучей в турбулентной среде и показано, что равновесное пространственно-энергетическое распределение ускоренных частиц определяется эффективностью их ускорения и характеристиками диффузионного распространения КЛ в области ускорения и за ее пределами. Форма стационарного спектра частиц высокой энергии не зависит от пространственных

координат и при соответствующей перенормировке параметра ϵ_e , характеризующего эффективность процесса ускорения КЛ, соответствует энергетическому распределению частиц в пространственно однородном случае.

Милан Стеглик благодарит коллектив Главной астрономической обсерватории НАН Украины за сотрудничество и гостеприимство. Эта работа выполнена, в частности, при реализации проекта ITMS N 26220120029, основанного на «Research and Development Program», при поддержке «Research and Development Fund» и грантов Словацкой академии наук «VEGA N 2/0081/10 и 2/0173/09».

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.—832 с.
2. *Кардашев И. С.* Нестационарность спектров молодых источников нетеплового космического радиоизлучения // *Астрон. журн.*—1962.—**39**, № 3.—С. 393—409.
3. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.—800 с.
4. *Тверской Б. А.* К теории статистического ускорения Ферми // *Журн. эксперим. и теорет. физики.*—1967.—**52**, № 2.—С. 483—497.
5. *Топтыгин И. Н.* Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.—302 с.
6. *Федоров Ю. И.* Статистическое ускорение космических лучей в анизотропной, турбулентной среде // *Кинематика и физика небес. тел.*—2011.—**27**, № 1.—С. 3—24.
7. *Achterberg A.* On the nature of small amplitude Fermi acceleration // *Astron. and Astrophys.*—1981.—**97**.—P. 259—264.
8. *Aschwanden M. J.* Particle acceleration and kinematics in solar flares // *Space Sci. Rev.*—2002.—**101**.—P. 1—227.
9. *Becker P. A., Le T., Dermer C. D.* Time-dependent stochastic particle acceleration in astrophysical plasmas // *Astrophys. J.*—2006.—**647**, N 1.—P. 539—551.
10. *Dermer C. D., Miller J. A., Li H.* Stochastic particle acceleration near accreting black holes // *Astrophys. J.*—1996.—**456**, N 1.—P. 106—118.
11. *Droege W., Schlickeiser R.* Particle acceleration in solar flares // *Astrophys. J.*—1986.—**305**, N 2.—P. 909—912.
12. *Fan Z., Liu S., Fryer C. L.* Stochastic electron acceleration in the TeV supernova remnant RX J 1713. 7-3946: The high energy cutoff // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2009.—**406**.—P. 1337—1349.
13. *Fedorov Yu. I., Katz M. E., Kichatinov L. L., Stehlik M.* Cosmic-ray kinetics in a random anisotropic reflective non-invariant magnetic field // *Astron. and Astrophys.*—1992.—**260**.—P. 499—509.
14. *Fedorov Yu. I., Stehlik M.* Cosmic ray energetic spectra and its evolution in helical plasma turbulence // *Proc. 21-st Europ. Cosmic Ray Symp.* — Kosice, 2008.—P. 297—302.
15. *Fedorov Yu., Stehlik M.* Stochastic acceleration by induced electric field versus Fermi acceleration // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*—2010.—**43**, N 18.—P. 185701.
16. *Fermi E.* On the origin of the cosmic radiation // *Phys. Rev.*—1949.—**75**, N 8.—P. 1169—1174.
17. *Fletcher L., Hudson H. S.* Impulsive phase flare energy transport by large-scale Alfvén waves and the electron acceleration problem // *Astrophys. J.*—2008.—**675**, N 2.—P. 1645—1655.

18. *Melrose D.* On the formation of energy spectra in synchrotron sources // *Astrophys. Space Sci.*—1969.—**5**.—P. 131—169.
19. *Mertsch P.* A new analytic solution for 2-nd order Fermi acceleration // *Arxiv (astro-ph)* 1110. 6644.
20. *Miller J. A., Cargill P. I., Emslie A. G., et al.* Critical issues for understanding particle acceleration in impulsive solar flares // *J. Geophys. Res.*—1997.—**102**.—P. 14631—14659.
21. *Miller J. A., Guessom N., Ramaty R.* Stochastic Fermi acceleration in solar flares // *Astrophys. J.*—1990.—**361**, N 2.—P. 701—708.
22. *Miller J. A., La Rosa T. N., Moore R. L.* Stochastic electron acceleration by cascading fast mode waves in impulsive solar flares // *Astrophys. J.*—1996.—**461**, N 1.—P. 445—464.
23. *Miller J. A., Roberts D. A.* Stochastic proton acceleration by cascading Alfvén waves in impulsive solar flares // *Astrophys. J.*—1995.—**452**, N 2.—P. 912—932.
24. *Mochol I., Ostrowski M.* Validity range of the escape term approximation in the momentum diffusion equation // *Proc. 31-st Int. Cosmic Ray Conf. — Lodz, Poland, 2009.*—SH-2, 5—0226.
25. *Park B. T., Petrosian V.* Fokker-Planck equations of stochastic acceleration: Green's functions and boundary conditions // *Astrophys. J.*—1995.—**446**, N 2.—P. 699—716.
26. *Ramaty R., Murphy R. J.* Nuclear processes and accelerated particles in solar flares // *Space Sci. Rev.*—1987.—**45**.—P. 213—268.
27. *Schlickeiser R.* *Cosmic ray astrophysics.* — Berlin — Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.—519 p.
28. *Schneider P.* A comment on second-order Fermi acceleration // *Astron. and Astrophys.*—1993.—269.—P. L13—L15.
29. *Steinacker J., Schlickeiser R.* Stochastic acceleration of solar protons in the trans-relativistic region // *Astron. and Astrophys.*—1989.—**224**.—P. 259—266.
30. *Virtanen J. J. P., Vainio R.* Stochastic acceleration in relativistic parallel shocks // *Astrophys. J.*—2005.—**621**, N 1.—P. 313—323.
31. *Zheng Y. G., Zhang L.* Stochastic acceleration of relativistic particles in a turbulent magnetic field // *Proc. 32-nd Int. Cosmic Ray Conf. — Beijing, China, 2011.*—**8**.—P. 174.

Статья поступила в редакцию 13.02.12