ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2009

ЕНЕРГЕТИКА

УДК 621.3(0758)

Член-корреспондент НАН Украины **А. Е. Божко**

О генерализации автоматической реструктуризации электроцепей и сингуларисных переходных процессов в них

Показано, що автоматична реструктуризація електроланцюгів з реактивними елементами є узагальнюючим явищем.

Известно [1, 2], что периодическую функцию с периодом 2π, удовлетворяющую условиям Дирихле, т. е.:

1) $f(t)$ — однозначна, конечна, кусочно-непрерывна;

2) $f(t)$ имеет конечное число максимумов и минимумов,

можно представить в виде ряда

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega t, \tag{1}$$

называемого рядом Фурье.

Понятно, что синусоидальная функция $f(t) = a \sin \omega t$ не требует применения к себе выражения (1). А это значит, что в ряд Фурье раскладываются несинусоидальные функции геометрически правильной формы, например, треугольной, прямоугольной, трапециевидной и т. п. (см. табл. 7.1 в [2]) и геометрически неправильной (произвольной) формы. Как видим из (1), $f(t)$ является полигармонической функцией. В работе [3] показано, что в электрических цепях с реактивными элементами (индуктивность L и емкость C) при входных полигармонических напряжениях из-за разных сопротивлений $\omega_k L$, $1/(\omega_k C)$, $k = \overline{1, n}$, происходит изменение внутренней структуры этих электроцепей. Такое явление, открытое автором данной работы, было названо автоматической реструктуризацией электрических цепей с реактивными элементами.

Ориентируясь на тот факт, что в электротехнике, радиотехнике входные сигналы электро- и радиоцепей в большинстве случаев являются сигналами, которые могут быть представлены рядом Фурье, т. е. несинусоидальными геометрически правильной и неправильной формы, то эти сигналы, по сути, являются полигармоническими, следовательно, все сигналы в рассматриваемых цепях, кроме синусоидальных, являются полигармоническими.

А это означает, что в электротехнике, радиотехнике при таких несинусоидальных входных сигналах в цепях автоматически осуществляется изменение их структуры и поэтому явление автоматической реструктуризации указанных цепей является обобщающим (генерализованным). Исходя из такого заключения, необходимо, на наш взгляд, по-новому, с учетом данного явления, изучать, рассчитывать электрорадиоцепи.

В работе [4] на примере RL, RC, RLC, $RL\|C$ электроцепей дан метод определения общих сопротивлений, названных автором "условными", этих цепей при входном сигнале $U(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \sin \omega_k t$. Однако для различных по геометрической форме несинусоидальных $U(t)$ полигармоническая сумма будет различной (см. табл. 7.1 [2]) и поэтому "условные" сопротивления цепей с такими входными $U(t)$ будут отличаться от сопротивлений, приведенных в работе [4], хотя метод их определения может быть тот же.

Что же обусловливает явление автоматической реструктуризации цепей? На этот вопрос был дан ответ в ряде работ, например, [5–8]. В основном, в этих и других работах автора был сделан вывод о том, что переходные процессы в электроцепях с L, C элементами затягиваются на начальных участках, т.е. эти цепи как бы имеют некоторую, пусть и малую, зону нечувствительности к входному воздействию. Такая зона была выявлена автором и в эксперименте даже при подаче на вход электроцепей с L, C элементами скачкообразных в дальнейшем постоянных напряжений [9], что дало возможность признать явление автоматической реструктуризации в данных цепях при входных скачкообразных напряжениях вида $U(t) = U1(t)$, где $1(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{при} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{при} \quad t < 0 \end{array} \right\}$. Однако заметим, что при входном $U1(t)$ напряжении в электроцепи с L, C элементами автоматическая реструктуризация происходит только в начале переходного процесса, а это значит, что скачкообразная функция $U1(t)$ имеет в своем начале при включении ее в цепь составляющую, содержащую затухающий ряд гармоник вида $e^{-\alpha t} \sum\limits_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t$, где α — коэффициент затухания; e — основание натурального логарифма. Такой вывод привел автора к мысли о новом, особом (сингуларисном) разложении скачкообразной функции в виде [10]

$$
\begin{gathered}
U1(t) = U(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t, \\
U_{a1} = \frac{1}{\pi}, \qquad U_{ak} = \frac{U_{a1}}{k}, \qquad k = \frac{\omega_k}{\omega_1}.
\end{gathered} \tag{2}
$$

В работах [5, 11], используя разложение (2), автор исследовал переходные процессы в электроцепях, сосредоточенных, распределенных, цепных при скачкообразных $U1(t)$, а также в ряде случаев при прямоугольных импульсах, представляемых в виде

$$
U(0,\tau) = U(1 - e^{-\alpha t}) + e^{-\alpha t} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k t - U[1 - e^{-\alpha t(t-\tau)}] - \\
- e^{-\alpha t(t-\tau)} \sum_{k=1}^{n} U_{ak} \cos \omega_k (t - \tau). \tag{3}
$$

Как видим из (3), здесь участвует разложение (1) два раза: один раз для положительного напряжения $U1(t)$ и второй раз — для отрицательного $-U1(t - \tau)$. Комбинируя скачки в $U(t)$ с помощью разложения (1), можно представить различные по геометрической форме $U(t)$ в виде набора составляющих (со своим знаком) разложения (1). Для подтверждения приведем пример определения переходного процесса в RL цепи при входном напряжении $U(t) = U(1 - e^{-\beta t})$, где β — коэффициент затухания в источнике $U(t)$. Сингуларисное разложение $U(1 - e^{-\beta t})$ может быть следующим:

$$U(1-e^{-\beta t}) = U(1-e^{-\alpha t}) + Ue^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - U(1-e^{-\alpha t})e^{-\beta t} - \\ -Ue^{-(\alpha+\beta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t. \quad (4)$$

Проверим правильность разложения (4).

Так как при $t = 0$

$$U(0) = U\underbrace{(1-e^{-\alpha 0})}_{0} + Ue^{-\alpha 0}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k 0 - U\underbrace{(1-e^{-\alpha 0})}_{0}e^{-\beta 0} - \\ - Ue^{-(\alpha+\beta)0}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k 0 = U[1-e^{-(\alpha+\beta)0}]\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k 0 = 0,$$

т. е. при $t = 0$ $U(0) = 0$, что правильно.

Далее, при $t = \infty$

$$U(\infty) = U(1-\underbrace{e^{-\alpha\infty}}_{0}) + U\underbrace{e^{-\alpha\infty}}_{0}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - U\underbrace{(1-e^{-\alpha\infty})}_{0}\underbrace{e^{-\beta\infty}}_{0} - \\ - U\underbrace{e^{-(\alpha+\beta)\infty}}_{0}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t = U,$$

что также правильно.

В работах автора о сингуларисном разложении скачкообразной функции принято, что $\alpha \gg \beta$ и значительно больше других коэффициентов затухания электроцепей. Поэтому для проверки (4) возьмем крайний случай $\alpha = \infty$. Тогда $e^{-\infty t} = 0$ и $U(t, \alpha = \infty) = U[1 - e^{-\beta t}]$, т. е. и здесь проверка подтверждает правильность (4).

Далее, как было отмечено, определим переходный процесс тока $i(t)$ в RL цепи при входном напряжении (4). Для этого составим дифференциальное уравнение RL цепи, представив (4) в виде отдельных составляющих

$$U - Ue^{-\alpha t} - Ue^{-\beta t} + Ue^{-(\alpha+\beta)t} + Ue^{-\alpha t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t - \\ - Ue^{-(\alpha+\beta)t}\sum_{k=1}^{n} U_{ak}\cos\omega_k t = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}. \quad (5)$$

Переходный процесс $i(t)$ будем определять с помощью операционного исчисления, используя метод Карсона [12]. На основе таблиц [12] оригинал (5) представим в виде изображений

$$U\left\{\frac{\alpha}{p+\alpha}-\frac{p}{p+\beta}+\frac{p}{p+\alpha+\beta}+\sum_{k=1}^{n}\frac{p(p+\alpha)U_{ak}}{(p+\alpha)^2+\omega_k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{p(p+\alpha+\beta)U_{ak}}{(p+\alpha+\beta)^2+\omega_k^2}\right\}=$$
$$=I(p)(R+L_p). \tag{6}$$

На основании (6) изображение тока имеет вид

$$I(p)=\frac{U}{L}\left\{\frac{\alpha}{(p+\alpha)(p+\delta)}-\frac{p}{(p+\beta)(p+\delta)}+\frac{p}{(p+\alpha+\beta)(p+\delta)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\frac{p(p+\alpha)}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}-\sum_{k=1}^{n}U_{ak}\frac{p(p+\alpha+\beta)}{(p+\delta)[(p+\alpha+\beta)^2+\omega_k^2]}\right\}, \tag{7}$$

где $\delta=R/L$ — коэффициент затухания в RL цепи.

Для первых трех составляющих в (7) оригинал следующий (на основании таблиц [12]):

$$i_1(t)=\frac{U}{L}\left\{\left[\frac{\alpha}{\alpha\delta}+\frac{\alpha}{\alpha-\delta}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}-\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\right)-\frac{U}{L(\beta-\delta)}(e^{-\delta t}-e^{-\beta t})+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{U}{L(\alpha+\beta-\delta)}(e^{-\delta t}-e^{-(\alpha+\beta)t})\right]\right\}. \tag{8}$$

Оригиналы, соответствующие остальным составляющим в (7), будем находить для k-й составляющей в своей сумме $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\ldots\right)$, а затем результаты складывать.

Четвертая составляющая в (7) для k-й гармоники состоит из двух

$$\frac{U}{L}U_{ak}\frac{p^2}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}\rightleftarrows\frac{U}{L}\frac{U_{ak}}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\times$$
$$\times\left\{-\delta e^{-\delta t}+\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_k}[\omega_k\delta\cos\omega_k t+(\omega_k^2+\alpha^2-\alpha\delta)\sin\omega_k t]\right\}=i_2(t), \tag{9}$$

$$\frac{U}{L}U_{ak}\frac{\alpha p}{(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\omega_k^2]}\rightleftarrows\frac{U}{L}\frac{U_{ak}\alpha}{(\alpha-\delta)^2+\omega_k^2}\times$$
$$\times\left\{-\delta e^{-\delta t}+\frac{e^{-\alpha t}}{\omega_k}[-\omega_k\cos\omega_k t+(\delta-\alpha)\sin\omega_k t]\right\}=i_3(t). \tag{10}$$

Пятая составляющая в (7) для k-й гармоники также состоит из двух слагаемых. Их оригиналы имеют вид

$$\frac{U}{L}U_{ak}\frac{p^2}{(p+\delta)[(p+\alpha+\beta)^2+\omega_k^2]}\rightleftarrows\frac{U}{L}\frac{U_{ak}}{(\alpha+\beta-\delta)^2+\omega_k^2}\times$$
$$\times\left\langle-\delta e^{-\delta t}+\frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\omega_k}\{\omega_k\delta\cos\omega_k t+[\omega_k^2+(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)\delta]\sin\omega_k t\}\right\rangle=i_4(t), \tag{11}$$

$$\frac{U}{L} U_{ak} \frac{(\alpha+\beta)p}{(p+\delta)[(p+\alpha+\beta)^2+\omega_k^2]} \rightleftarrows \frac{U}{L} \frac{U_{ak}(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta-\delta)^2+\omega_k^2} \times$$

$$\times \left\{ -e^{-\delta t} + \frac{e^{-\alpha t}}{\omega_k} [-\omega_k \cos\omega_k t + (\delta-\alpha-\beta)\sin\omega_k t] \right\} = i_5(t). \tag{12}$$

Складывая выражение (8) и в своих суммах $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ldots\right)$ выражения (8), (10), (11), (12), получим оригиналы тока $i(t) = \sum\limits_{s=1}^{5} i_s(t)$ в виде

$$i(t) = (8) + \sum_{k=1}^{5}[(9)+(10)] - \sum_{k=1}^{5}[(11)+(12)]. \tag{13}$$

При $t = 0$ $i(0) = 0$, при $t = \infty$ $i(\infty) = U/R$. При $\alpha = \infty$ ток $i(t)$ в сингуларисном выражении (13) с учетом (8), (9), (10), (11), (12) принимает вид

$$i(t) = \frac{U\beta}{L}\left[\frac{1}{\beta\delta} + \frac{1}{\beta-\delta}\left(\frac{1}{\beta}e^{-\beta t} - \frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\right)\right]. \tag{14}$$

Выражение (14) полностью соответствует классическому решению задачи по переходному процессу в RL цепи при входном напряжении $U(t) = U(1-e^{-\beta t})$.

Выражение (13) отличается от классического ввиду того, что в нем присутствуют затухающие гармоники, которые не позволяют переходному процессу $i(t)$ в начальном участке вторить переходный процесс (14). А это значит, что в начальном участке $i(t)$ при $U(t) = (4)$ в электроцепи возникает автоматическая реструктуризация цепи, обусловливающая появление индуктивных экспоненциально затухающих сопротивлений $x_{Lk} = \omega_k L$, снижающих величину тока $i(t)$. Из этого примера видно, что даже экспоненциально нарастающее входное напряжение электроцепи с индуктивным сопротивлением вызывает реструктуризацию цепи и изменяет форму переходного процесса тока $i(t)$ в отличие от формы переходного процесса $i(t)$, рассчитанного без сингуларисного разложения напряжения $U(t)$. Кстати, при использовании сингуларисного разложения $U(t)$ нахождение тока $i(t)$ в RL и других цепях можно осуществлять математически классическим методом путем решения дифференциальных уравнений.

Таким образом, в данной работе показано, что автоматическая реструктуризация электроцепей с реактивными элементами в электротехнике, да и, вероятно, в радиотехнике, является обобщающим явлением при всех видах полигармонических сигналов, кроме синусоидального, состоящего только из одной гармоники. Это явление автоматической реструктуризации электроцепей обусловливает изменение формы переходных процессов в цепях по сравнению с теми формами, которые издавна заложены в теоретических основах электротехники.

Заметим, что изменение структуры входного напряжения цепи изменяет ее автоматическую реструктуризацию, т. е. получается, что входное напряжение цепи управляет ее автоматической реструктуризацией. Сингуларисное разложение скачкообразных функций, которые присутствуют во многих входных сигналах цепей, создает так называемую сингуларисную автоматическую реструктуризацию в цепи в начале переходного процесса, она экспоненциально затухает с коэффициентом затухания α.

1. *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров. – Москва: Наука, 1965. – 780 с.
2. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. – Москва: Высш. шк., 1978. – 528 с.
3. *Божко А. Е.* Об автоматической реструктуризации электрических цепей с реактивными элементами при полигармонических входных сигналах // Доп. НАН України. – 2002. – № 11. – С. 101–103.
4. *Божко А. Е.* Об условных сопротивлениях электроцепей при полигармонических входных сигналах // Там само. – 2007. – № 2. – С. 87–95.
5. *Божко А. Е.* К концепции о переходных процессах в электрических цепях // Там само. – 2003. – № 12. – С. 72–75.
6. *Божко А. Е.* Новая интерпретация переходных процессов в электрических цепях // Там само. – 2004. – № 9. – С. 83–87.
7. *Божко А. Е.* О новой трактовке переходных процессов в электроцепях переменного тока // Там само. – 2005. – № 4. – С. 81–86.
8. *Божко А. Е.* К задаче о переходных процессах в цепных схемах с учетом особых разложений скачкообразных напряжений // Там само. – 2007. – № 10. – С. 81–86.
9. *Божко А. Е.* О подтверждении новой концепции о переходных процессах в электроцепях экспериментальными исследованиями // Там само. – 2007. – № 8. – С. 92–95.
10. *Божко А. Е.* Аргументированная детализация новой концепции о переходных процессах в электроцепях // Там само. – 2007. – № 6. – С. 81–87.
11. *Божко А. Е.* Комбинационный анализ переходных процессов в электроцепях с распределенными параметрами // Там само. – 2007. – № 9. – С. 69–76.
12. *Гинзбург С. Г.* Методы решения задач по переходным процессам в электрических цепях. – Москва: Сов. радио, 1959. – 404 с.

*Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков*

Поступило в редакцию 01.02.2008

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. E. Bozhko**

On generalization of automatic restructurization of electric circuits and singularisnal transient processes in them

It is shown that the automatic restructurization of electric circuits with reactive elements is a general phenomenon.