УДК 539.3

Л. В. Назаренко

Долговременная повреждаемость дискретно-волокнистых композитов с ортотропными включениями при экспоненциально-степенной функции длительной микропрочности

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошуном)

Теорію довготривалої мікропошкоджуваності для однорідних матеріалів, в основу якої покладено рівняння механіки стохастично неоднорідних середовищ, узагальнено на випадок композита з ортотропними включеннями. Процес пошкоджуваності компонентів композита моделюється утворенням в них стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, зумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короткочасну міцність за критерієм Губера — Мізеса, яке приймається випадковою функцією координат. На основі методу ітерацій побудовано алгоритми обчислення залежностей мікропошкоджуваності компонентів дискретно-волокнистого матеріалу від часу, макронапружень або макродеформацій від часу, а також отримані відповідні криві у випадку експоненціально-степеневої функції мікродовговічності.

Структурная теория длительной повреждаемости однородного материала, построенная на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, изложена в работе [1] и обобщена для зернистых и дискретно-волокнистых композитов. В настоящей работе теория длительной повреждаемости при экспоненциально-степенной функции долговечности обобщается на случай композитного материала, армированного эллипсоидальными ортотропными включениями. Предполагается, что матрица является изотропной, в то время как включения обладают ортотропной симметрией упругих свойств.

Рассматривается случай, когда процесс повреждаемости происходит в матрице композита. В основу структурной теории длительной повреждаемости композитных материалов положены уравнения механики микронеоднородных сред стохастической структуры. Процесс повреждаемости матрицы рассматриваемого композита моделируется разрушением рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор [2]. Критерию разрушения единичного микрообъема свойственна его длительная прочность, описываемая экспоненциально-степенной функцией длительной микропрочности, которая определяется зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера–Мизеса [3]. Предел кратковременной прочности принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается распределением Вейбулла [2]. Эффективные деформативные свойства и напряженно-деформированное состояние композита стохастической структуры определяются на основе стохастических уравнений упругости методом условных моментов [4].

Построен алгоритм вычисления микроповреждаемости матрицы дискретно-волокнистого композита как функции времени, а также макронапряжений и макродеформаций от времени. Получены соответствующие кривые в случае экспоненциально-степенной функции длительной микропрочности.

1. Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными дискретными волокнами. Предполагается, что матрица изотропная, а включения ортотропные, причем в процессе нагружения в матрице возникают микроразрушения, которые моделируются случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Макронапряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и макродеформации $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle \qquad (i,j,k,l = 1,2). \tag{1}$$

Здесь λ^*_{ijkl} — тензор эффективных упругих модулей, который является функцией модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda^{[1]}_{ijkl}$, $\lambda^{[2]}_{ijkl}$, объемного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений $\overline{s}_2$, $\overline{s}_3$ [4], т. е.

$$\lambda^*_{ijkl} = \lambda^*_{ijkl}(\lambda^{[1]}_{ijkl}, \lambda^{[2]}_{ijkl}, c_1, \overline{s}_2, \overline{s}_3), \qquad \overline{s}_2 = \frac{s_2}{s_1}, \qquad \overline{s}_3 = \frac{s_3}{s_1}, \tag{2}$$

где s_1, s_2, s_3 — размеры полуосей эллипсоидальных включений в направлении координатных осей соответственно.

Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов $\lambda^{[1]}_{ijkl}$, $\lambda^{[2]}_{ijkl}$ определяются [5] через тензоры модулей упругости скелетов компонентов λ^1_{ijkl}, λ^2_{ijkl} и их пористости p_1, p_2, характеризующие поврежденность, т. е.

$$\lambda^{[1]}_{ijkl} = \lambda^{[1]}_{ijkl}(\lambda^1_{ijkl}, p_1), \qquad \lambda^{[2]}_{ijkl} = \lambda^{[2]}_{ijkl}(\lambda^2_{ijkl}, p_2). \tag{3}$$

На основе зависимостей (2), (3) и соотношений

$$\langle\sigma^r_{ij}\rangle = \lambda^{[r]}_{ijkl}\langle\varepsilon^r_{kl}\rangle \qquad (r = 1,2) \tag{4}$$

можно определить средние напряжения и средние деформации поврежденного r-компонента $\langle\sigma^r_{ij}\rangle$, $\langle\varepsilon^r_{kl}\rangle$ как функции макродеформаций или макронапряжений [4]

$$\langle\sigma^r_{ij}\rangle = f^1_{ij}(\langle\varepsilon_{kl}\rangle), \qquad \langle\varepsilon^r_{ij}\rangle = f^2_{ij}(\langle\varepsilon_{kl}\rangle), \qquad \langle\sigma^r_{ij}\rangle = f^3_{ij}(\langle\sigma_{kl}\rangle), \qquad \langle\varepsilon^r_{ij}\rangle = f^4_{ij}(\langle\sigma_{kl}\rangle). \tag{5}$$

Средние по скелету r-компонента напряжения $\overline{\sigma}^r_{ij}$ $(r = 1,2)$ связаны со средними напряжениями $\langle\sigma^r_{ij}\rangle$ $(r = 1,2)$ поврежденного r-компонента зависимостями

$$\overline{\sigma}^r_{ij} = \frac{1}{1-p_r}\langle\sigma^r_{ij}\rangle \qquad (r = 1,2). \tag{6}$$

Для случая, когда процесс накопления повреждений происходит в матрице, примем критерий кратковременного разрушения в микрообъеме неповрежденной части материала матрицы в форме Губера–Мизеса [2]

$$I^2_{\overline{\sigma}} = k_2, \qquad I^2_{\overline{\sigma}} = (\overline{\sigma}^{2\,\prime}_{ij}, \overline{\sigma}^{2\,\prime}_{ij})^{1/2}, \tag{7}$$

где $\overline{\sigma}_{ij}^{2\,\prime}$ — девиатор средних по неповрежденной части материала матрицы напряжений; k_2 — предельное значение инварианта $I_{\overline{\sigma}}^2$, являющееся случайной функцией координат.

Если инвариант $I_{\overline{\sigma}}^2$ для некоторого микрообъема материала матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2, то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^2, длительность которого зависит от степени близости $I_{\overline{\sigma}}^2$ к предельному значению k_2. В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^2 = \varphi(I_{\overline{\sigma}}^2, k_2), \tag{8}$$

причем $\varphi(k_2, k_2) = 0$, $\varphi(0, k_2) = \infty$, согласно (6).

Одноточечную функцию распределения $F(k_2)$ параметра k_2 можно описывать распределением Вейбулла [2]

$$F(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{02}, \\ 1 - \exp(-m_2(k_2 - k_{02})^{\alpha_2}), & k_2 \geqslant k_{02}, \end{cases} \tag{9}$$

где k_{02} — минимальная величина предельного значения k_2, с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах материала матрицы; m_2, α_2 — постоянные, характеризующие разброс микропрочности в материале.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность матрицы характеризуется пористостью p_{02}. Тогда функция распределения $F(k_2)$, согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, где предел микропрочности меньше соответствующего значения k_2. Поэтому, если в неразрушенной части материала матрицы напряжения равны $\overline{\sigma}_{ij}^2$, то функция $F(I_{\overline{\sigma}}^2)$ определяет, согласно (6), (8), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Тогда уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости имеет вид [2]

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F(I_{\overline{\sigma}}^2). \tag{10}$$

Если напряжения в матрице $\overline{\sigma}_{jk}^2$ действуют в течение некоторого времени t, то, согласно критерию длительной прочности (7), за это время разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2, для которых имеет место неравенство

$$t \geqslant \tau_k^2 = \varphi(I_{\overline{\sigma}}^2, k_2), \tag{11}$$

где инвариант $I_{\overline{\sigma}}^2$ определяется выражениями (6).

Если время τ_k^2 хрупкого разрушения для реальных материалов имеет конечное значение для произвольных $I_{\overline{\sigma}}^2$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности $\varphi(I_{\overline{\sigma}}^2, k_2)$ можно представить экпоненциально-степенной зависимостью [1]

$$\varphi(I_{\overline{\sigma}}^2, k_2) = \tau_{02}\left\{\exp l_2\left[\left(\frac{k_2}{I_{\overline{\sigma}}^2}\right)^{n_1} - 1\right] - 1\right\}^{n_2}, \tag{12}$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{02}, l_2, n_1, n_2 для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (10) в (9), приходим к неравенству

$$k_2 \leqslant I_{\overline{\sigma}}^2\left[1 + \frac{1}{l_2}\ln(1 + \overline{t}_2^{1/n_2})\right]^{1/n_1} \qquad \left(\overline{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}}\right). \tag{13}$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F[I_{\sigma}^2\psi(\overline{t}_2)]$, где

$$\psi(\overline{t}_2) = \left[1 + \frac{1}{l_2}\ln(1 + \overline{t}_2^{1/n_2})\right]^{1/n_1}, \tag{14}$$

определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы в момент времени $\overline{t}_2$. Тогда с учетом (5) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02})F\left[\frac{I_{\langle\sigma\rangle}^2}{1 - p_2}\psi(\overline{t}_2)\right], \tag{15}$$

где пористость p_2 является функцией безразмерного времени $\overline{t}_2$, а инвариант $I_{\langle\sigma\rangle}$ определяется выражением (6) и является функцией макродеформаций или макронапряжений, согласно (15).

Уравнения баланса пористости (13) с учетом (6), (12) в начальный момент $\overline{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (13), (6), (12) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

2. На основе соотношений (2), (3), (6), (12), (13) можно определить объемное содержания микроповреждений дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными включениями в матрице и напряженно-деформированное состояние для функции $\psi(\overline{t}_2)$, определяемой формулой (12), как при заданных макронапряжениях $\langle\sigma_{jk}\rangle$, так и при заданных макродеформациях $\langle\varepsilon_{jk}\rangle$. В качестве включений и матрицы взяты соответственно топаз и эпоксидная смола с характеристиками неповрежденной части:

$$\begin{gathered}
\lambda_{11}^1 = 287 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{22}^1 = 365 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{33}^1 = 300 \text{ ГПа}, \\
\lambda_{23}^1 = 90 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{13}^1 = 85 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{12}^1 = 128 \text{ ГПа}, \\
\lambda_{44}^1 = 110 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{55}^1 = 135 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{66}^1 = 133 \text{ ГПа}, \\
E_2 = 3 \text{ ГПа}, \qquad \nu_2 = 0{,}35
\end{gathered} \tag{16}$$

при объемной концентрации включений, начальном содержании пор в матрице и форме включений:

$$c_1 = 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75, \qquad p_{02} = 0, \qquad \overline{s}_2 = 1, \qquad \overline{s}_3 = 3, \tag{17}$$

а также при

$$k_{02} = 0{,}01 \text{ ГПа}, \qquad m_2 = 1000, \qquad \alpha_2 = 2, \qquad l_2 = 1, \qquad n_1 = 1, \qquad n_2 = 1. \tag{18}$$

На рис. 1 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ для объемного содержания включений $c_1 = 0{,}25$ при различных значениях макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$. На рис. 2 показаны зависимости макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ для объемных содержаний включений $c_1 = 0{,}25$ при различных значениях макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$.

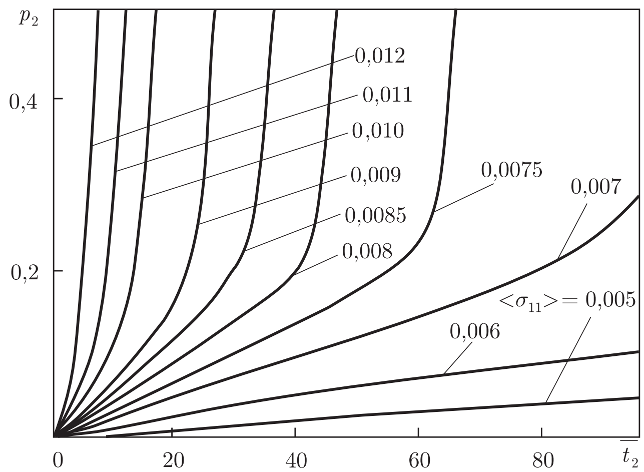

Рис. 1. Зависимость пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ при различных значениях макронапряжения

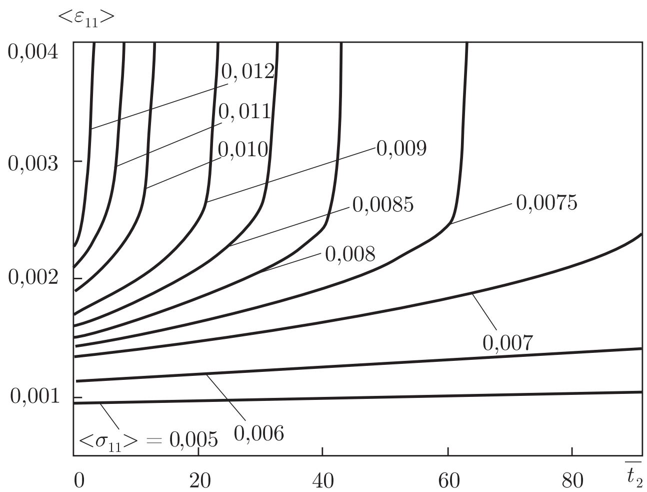

Рис. 2. Зависимость макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ при различных значениях макронапряжения

Как видим, при всех значениях макронапряжений $\langle\sigma_{11}\rangle$ для определенных значений времени $\overline{t}_2$ макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения материала.

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции долговечности (10), с результатами для дробно-степенной функции долговечности [2] показывает, что при заданных макропараметрах характер зависимостей макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ и зависимостей пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ различен. В случае дробно-степенной функции долговечности для макронапряжений, меньших определенных значений, кривые этих зависимостей имеют горизонтальную асимптоту, тогда как в случае экспоненциально-степенной функции долговечности для всех значений макронапряжений макродеформации и поврежденность матрицы достигают критической величины, являющейся началом разрушения.

На рис. 3 изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ при значениях макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle = 0{,}002$; 0,008; 0,016 и различных значениях объемного содержания включений c_1. На графиках сплошной линией показаны кривые при объемном

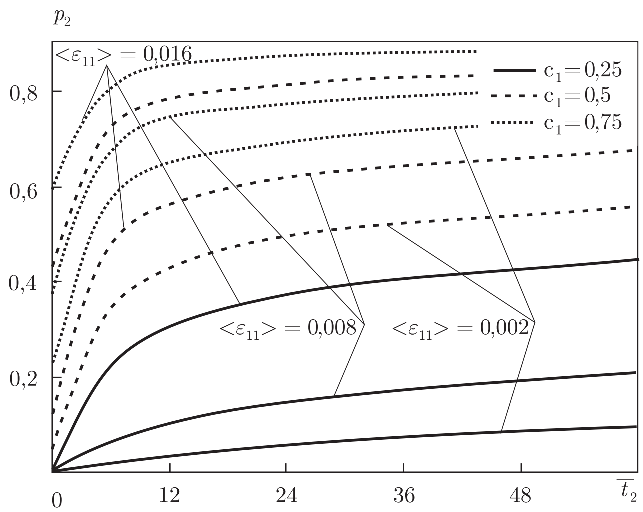

Рис. 3. Зависимость пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ при различных значениях макродеформации

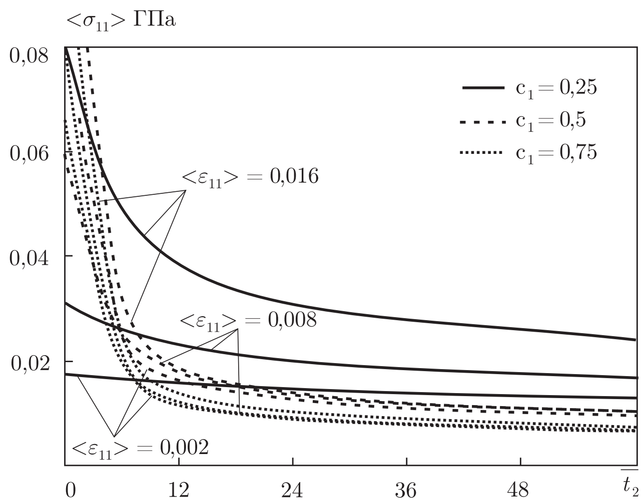

Рис. 4. Зависимость макронапряжения $\langle\sigma_{jk}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ при различных значениях макродеформации

содержании включений $c_1 = 0{,}25$, штриховой — при $c_1 = 0{,}5$, пунктирной — при $c_1 = 0{,}75$. Такие же обозначения приняты и на рис. 4.

Графики показывают, что с увеличением макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для всех объемных содержаний включений и произвольного значения времени $\overline{t}_2$ микроповрежденность p_2 увеличивается. Здесь наблюдается рост поврежденности со временем, в то время как в экспериментах с полимерами [6] при фиксированной деформации поврежденность заметным образом не изменяется. Такое расхождение можно объяснить как релаксацией напряжений в полимерах, обусловленной ползучестью, которая здесь не учитывается, так и приближенностью рассматриваемой модели повреждаемости в конечно временной форме.

На рис. 4 приведены кривые зависимостей макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ при значениях макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle = 0{,}002$; $0{,}008$; $0{,}016$ и различных значениях объемного содержания включений c_1. Как видим, при всех значениях объемного содержания включений кривые являются нисходящими.

Сравнение результатов, полученных для экспоненциально-степенной функции долговечности (10), с результатами для дробно-степенной функции долговечности [2] показывает, что при заданных макропараметрах характер зависимостей макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$ от времени $\overline{t}_2$ и зависимостей пористости матрицы p_2 от времени $\overline{t}_2$ в обоих случаях одинаков.

1. *Khoroshun L. P.* Principles of the micromechanics of material damage. 2. Long-term damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, No 2. – P. 127–135.
2. *Khoroshun L. P.* Micromechanics of short-term thermal microdamageability // Ibid. – 2001. – **37**, No 9. – P. 1158–1165.
3. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 312 с.
4. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. (Механика композитов: В 12-ти т. Т. 3).
5. *Назаренко Л. В.* Thermoelastic properties of orthotropic porous materials // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, № 2. – P. 114–122.
6. *Тамуж В. П., Куксенко В. С.* Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 15.01.2008

L. V. Nazarenko

Long-term damageability of discrete-fibrous composites with orthotropic inclusions on the exponential-power function for the long-term microstrength

The theory of long-term damageability for homogeneous materials is generalized to the case of orthotropic composites with stochastic structure, by using the equations of the mechanics of micrononuniform media. The process of damage of components of a composite is modeled by the appearance of randomly positioned micropores. The effective deformation properties and a stress-strain state of an orthotropic composite with microdamages are described by the stochastic equations of elasticity theory. By using the method of iterations, the temporal behavior of the microdamageability, macrostresses, and macrostrains for an orthotropic composite is constructed.