Доповіді
Національної
академії наук
України

1 • 2009

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 330:519(447)

Б. Ю. Кишакевич, А. К. Прикарпатський, І. П. Твердохліб

Аналіз оптимальних стратегій портфельної конкуренційної моделі ринку акцій

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. О. Чикрієм)

Розглядається проблема вибору найціннішого для покупця пакета акцій із запропонованого банківського портфеля в умовах часових обмежень та конкуренції з боку інших покупців. Пропонується економіко-математична модель задачі оптимальної зупинки процесу вибору пакета акцій із бази даних, яка адекватно описується дискретними ланцюгами Маркова. Обгрунтовано метод пошуку оптимального моменту зупинки процесу вибору найціннішого для покупця пакета акцій з банківського портфеля, що дозволило визначити оптимальну стратегію кожного з двох покупців-конкурентів. Здійснено асимптотичний аналіз оптимальних стратегій клієнтів при купівлі ними акцій залежно від параметрів банківського середовища і отримано трансцедентне рівняння для визначення оптимальної частки пакетів акцій із портфеля, перегляд яких покупцем є обов'язковим.

Регулятивний вплив ринку акцій, акумульованих у банківському середовищі, на ефективність економіки країни добре відомий. Це середовище може мати в активі свого портфеля значну кількість пакетів акцій, впорядкованих за натуральним показником їх фінансово-економічної привабливості або цінності для потенційного клієнта. В умовах сучасного цейтнот-біржового механізму реалізації акцій, що включає фіксований часовий інтервал і обмеження доступу до повної інформації про їх корисність, важливою з точки зору покупця є оптимальна стратегія вибору [1, 2] найбільш цінного пакета акцій із запропонованого банківського портфеля. Фахівці підкреслюють нетривіальність та складність зазначеної проблеми, вплив психологічних факторів на поведінку брокерів, критичну важливість дисципліни поведінки покупців на таких ринках [3]. Традиційно досліджувалися задачі вибору оптимального портфеля фінансових активів із множини заданих та оптимального керування власне портфелем активів [4, 5], у яких обмежень на час відбору не накладається.

Ситуація істотно ускладнюєтся, коли є декілька конкуруючих між собою покупців, і тоді постає нетривіальна проблема вибору клієнтом потенційно найціннішого пакета акцій в межах портфеля раніше інших. При цьому біржовий характер такого типу ринкових операцій надає покупцю акцій тільки динамічну порівняльну інформацію про їх цінність в процесі вибору. А саме, якщо клієнт вибрав для ознайомлення будь-який пакет акцій з банківського портфеля, то він може після аналізу його базових характеристик відразу його придбати або повернути запит назад до бази даних банку і перейти до розгляду наступного пакета. Якщо корисність вибраного пакета виявиться нижчою за цінність попередньо розглянутих, то одразу слід переходити до аналізу наступного пакета акцій і так далі, аж поки не буде вибраним пакет акцій з характеристикою цінності, вищою за всі раніше розглянуті. В цьому випадку покупець повинен прийняти рішення, чи вважає він даний пакет акцій потенційно найціннішим з усіх можливих, і тоді на ньому зупиняється, придбавши його, або переходить до аналізу привабливості наступних пакетів, враховуючи, що обсяг портфеля є скінченним і час на їх розгляд обмежений. Якщо ж клієнтів є два або більше, то аналогічну стратегію вибору найпривабливішого пакета акцій на підставі аналізу їх відносних характеристик вибирає також кожен з них, причому виграє торги акцій той покупець, який швидше, тобто за менше число звертань до бази даних портфеля акцій банку, вибере саме потенційно найбажаніший пакет акцій.

Але на процес вибору клієнтом найціннішого пакета акцій накладаються певні додаткові обмеження фінансового характеру, що значно впливають на кількість запитів до бази даних портфеля акцій: покупці зобов'язані сплачувати певну суму грошей, так званий штраф, або fee, за кожний проглянутий і повернутий назад до портфеля пакет акцій. Банки застосовують різні дисципліни штрафування клієнтів за неуспішну трансакцію. Приміром, це може бути фіксована сума грошових одиниць за кожен проглянутий пакет акцій або лінійна прогресивна шкала штрафних санкцій, що збільшує сплачену суму штрафу пропорційно порядковому номеру неуспішної трансакції, або інші. Якщо ж клієнт-покупець зупинився на потенційно найціннішому для нього пакеті акцій і вибрав його для придбання, то банк виплачує йому певну винагороду, так званий gift, за успішну фінансову трансакцію, тим самим стимулюючи клієнтів до активної співпраці з ним. Описана вище конкуренційна модель ринку акцій у середовищі банківського портфеля в умовах цейтнот-біржової схеми взаємодії покупців являє собою досить стандартну ситуацію [1, 6, 7] у сучасному фінансово-економічному просторі. Оскільки весь процес самого вибору потенційно найбільш цінного пакета акцій є майже повністю випадковим, для його опису природним є використання теорії випадкових процесів, зокрема певних її аспектів, що стосуються проблем мінімаксних стратегій з керованими правилами зупинок. Однією зі спроб побудови досить адекватної математичної моделі описаного вище ринкового процесу і є запропоноване нижче дослідження.

1. Портфельна конкуренційна модель ринку акцій. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ означає [1] деякий ймовірнісний простір, тобто множину Ω елементарних подій з виділеною σ-алгеброю $\mathcal{F}$ його підмножин із ймовірнісною мірою P, визначеною на підмножинах з $\mathcal{F}$. Задамо на просторі Ω деякий дискретний марковський [9, 8] процес $x\colon \mathbb{Z}_+ \times \Omega \to \mathcal{H}$ із значеннями в деякому топологічному просторі $\mathcal{H}$. Для кожного $t \in \mathbb{Z}_+$ величина $x_t(\omega) \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{Z}_+$, є випадковою, а набір $\{x_t(\omega) \in \mathcal{H}\colon t \in \mathbb{Z}_+\}$ утворює віртуальну траєкторію можливих станів процесу.

Припустимо тепер, що існує зростаюча сім'я σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\colon t \in \mathbb{Z}_+\}$ така, що $\mathcal{F}_s \subset \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ для всіх $t > s \in \mathbb{Z}_+$. Тоді процес $x\colon \mathbb{Z}_+ \times \Omega \to \mathcal{H}$ має назву *адаптованого* до сім'ї $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\colon t \in \mathbb{Z}_+\}$, якщо відображення $x_t\colon \Omega \to \mathcal{H}$ є F_t-вимірним для кожного $t \in \mathbb{Z}_+$. Щодо процесу $x\colon \mathbb{Z}_+ \times \Omega \to \mathcal{H}$ вводиться важливе поняття марковського моменту *зупинки* [9, 10], як такого відображення $\tau\colon \Omega \to \mathbb{Z}_+$, що подія $\{\omega \in \Omega\colon t < \tau(\omega)\} \subset \mathcal{F}_t$ для всіх $t \in \mathbb{Z}_+$. Розглянемо довільне відображення $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ і знайдемо *математичне* *сподівання* [9] процесу $f(x_t)\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ щодо σ-алгебри $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, яке позначимо $E_s(f(x_t)) := = E\{(f(x_t)|F_s\colon t > s \in \mathbb{Z}_+\}$. Тоді, за визначенням,

$$\int\limits_{A\in F_s} E_s(f(x_t))\,dP_s := \int\limits_{A\in\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}} f(x_t)\,dP \tag{1}$$

для всіх підмножин $A \in \mathcal{F}_s$, де міра dP_s на F_s визначається як індукована міра $i_s^* dP$ відносно відображення вкладення $i_s\colon \mathcal{F}_s \to \mathcal{F}$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Нехай тепер $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}_+$ означає деяке відображення, що характеризує ступінь корисності вибору елемента $x \in \mathcal{H}$, який в нашому випадку моделює базу даних пакетів акцій портфеля банку. Тоді функція $V(a) := = \sup\limits_{\tau} E_a(f(x_t))$, де супремум береться за всіма можливими марковськими моментами зупинки процесу $x_t\colon \Omega \to \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{Z}_+$, при умові, що $x_0 = a \in \mathcal{H}$, називається ціною задачі оптимальної зупинки нашого випадкового процесу і, зокрема, може бути ціною вибору найціннішого пакета акцій з портфеля банку. З огляду на нашу конкуренційну модель ринку акцій у середовищі банківського портфеля потрібно сконструювати для кожного покупця відповідну функцію ціни оптимального вибору [1] найбажанішого пакета акцій, виходячи з описаних вище умов цього процесу.

Вважатимемо для зручності, що наявні тільки два клієнти, конкуруючі між собою під час процесу вибору найціннішого для кожного з них пакета акцій із запропонованого портфеля із скінченним обсягом $N \in \mathbb{Z}_+$ елементів. Всі пакети акцій A_i, $i = \overline{1,N}$, ми пронумеруємо в такий спосіб, що

$$W(A_1) < W(A_2) < \dots < W(A_N), \tag{2}$$

де $W(A_i) \in [0,1]$, $i = \overline{1,N}$, є деяка функція корисності пакетів акцій, конкретний вираз якої для нас є неважливим. Ймовірнісний простір Ω складається, очевидно, із всеможливих перестановок $\omega := \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ набору чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, причому вважатимемо, що всі вони є рівноймовірні. Таким чином, результат процесу вибору за n-м разом покупцями пакета акцій ω_n, $n = \overline{1,N}$, $s = \overline{1,2}$, будемо позначати $X_n^{(s)}(\omega) = \omega_n$, $s = \overline{1,2}$, а через $\tau_s(\omega) \in \mathcal{H} := \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $s = \overline{1,2}$, позначатимемо моменти зупинки процесу, результатом якого будуть найбільші значення математичного сподівання відповідних функцій ціни вибору пакета акцій. Вибір найбажанішого пакета акцій A_N, який неявно несе номер N, істотно ускладнюється тим фактом, що після $n = \overline{1,N}$ вибраних і повернених до портфеля пакетів акцій $(X_1^{(s)}, X_2^{(s)}, \dots, X_n^{(s)})$, $s = \overline{1,2}$, покупець не має інформації щодо їх істинних апріорі приписаних значень ціни, а може фіксувати в процесі вибору лише їх відносне розташування, тобто $X_i^{(s)} < X_j^{(s)}$, якщо $W(A_i) < W(A_j)$, $i \neq j \leqslant n$, $s = \overline{1,2}$. У зв'язку з цим є природним запровадити сім'ї σ-алгебр подій $\mathcal{F}_n^{(s)}$, $n = \overline{1,N}$, $s = \overline{1,2}$, породжені подіями $(X_i^{(s)} < X_j^{(s)}, i \neq j \leqslant n) := \mathcal{F}_n^{(s)}$, причому $\mathcal{F}_1^{(s)} := \{\varnothing, \Omega\}$, $s = \overline{1,2}$, і визначити два набори нових характеристичних випадкових величин, враховуючи описаний раніше конкуренційний процес вибору найціннішого пакета акцій. А саме, нехай математичні сподівання

$$\begin{aligned} V_{\tau_1}^{(1)}(\tau_2) := c_\alpha E\Big\{1_{\{X_{\tau_1}^{(1)}=N, X_{\tau_2}^{(2)}\neq N\}} + 1_{\{X_{\tau_1}^{(1)}=N, X_{\tau_2}^{(2)}=N, \tau_1<\tau_2\}}\Big\} - \\ - \alpha \sum_{k=1}^{\tau_1-1} \frac{k}{N^2} E\Big\{1_{\{X_k^{(1)}\neq N, X_{\tau_2}^{(2)}\neq N\}} + 1_{\{X_k^{(1)}\neq N, X_{\tau_2}^{(2)}=N, k<\tau_2\}}\Big\}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$V^{(2)}_{\tau_2}(\tau_1) := c_\alpha E\Big\{1_{\{X^{(2)}_{\tau_2}=N, X^{(1)}_{\tau_1}\neq N\}} + 1_{\{X^{(2)}_{\tau_2}=N, X^{(1)}_{\tau_1}=N, \tau_2<\tau_1\}}\Big\} -$$

$$- \alpha \sum_{k=1}^{\tau_2-1} \frac{k}{N^2} E\Big\{1_{\{X^{(2)}_{k}\neq N, X^{(1)}_{\tau_1}\neq N\}} + 1_{\{X^{(2)}_{k}\neq N, X^{(1)}_{\tau_1}=N, k<\tau_1\}}\Big\} \qquad (4)$$

означають відповідні функції ціни процесу вибору найбажанішого пакета акцій для обох клієнтів, де $c_\alpha > 0$ є величина банківського заохочення клієнта за виконану трансакцію придбання пакета акцій з портфеля, $\alpha > 0$ є відповідний коефіцієнт "штрафу" за кожну відмову купівлі попередньо вибраного пакета акцій, а τ_1, $\tau_2 \in \mathcal{H}$ є відповідними марковськими моментами зупинки процесів. Одразу зазначимо, що у попередніх виразах нами конкретизовано дисципліну штрафування клієнтів за відмову придбання розглянутого пакета акцій: величина штрафу за k-те повернення пакета до портфеля дорівнює $k\alpha/N^2$. Оскільки процеси вибору для кожного з покупців є аналогічними, то для нас буде достатнім розглянути детальніше тільки першу проблему вибору найбільш цінного пакета акцій з таких двох:

$$\arg\sup_{\tau_1} V^{(1)}_{\tau_1}(\tau_2) = \tau_1^*, \qquad \arg\sup_{\tau_2} V^{(2)}_{\tau_2}(\tau_1) = \tau_2^*. \qquad (5)$$

Назвемо оптимізаційну задачу вигляду (2)–(5) *портфельною конкуренційною моделлю ринку акцій*. Для розв'язання екстремальних проблем (5) ми застосуємо метод асоційованих марковських процесів щодо відповідних марковських моментів зупинки процесу вибору, чому і присвячений наступний розділ.

2. Метод асоційованих марковських процесів. Розглянемо таку послідовність функцій ціни вибору найбільш цінного пакета акцій першим клієнтом-покупцем:

$$V^{(1)}_{n}(\tau_2) := c_\alpha (P\{X^{(1)}_n = N, X^{(2)}_{\tau_2} \neq N\} + P\{X^{(1)}_n = N, X^{(2)}_{\tau_2} = N, n < \tau_2\}) -$$

$$- \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N}^2 (P\{X^{(1)}_k \neq N, X^{(2)}_{\tau_2} \neq N\} + P\{X^{(1)}_k \neq N, X^{(2)}_{\tau_2} = N, k < \tau_2\}), \qquad (6)$$

де $n = \overline{1, \tau_1}$, величини $\alpha > 0$, $c_\alpha > 0$, причому вважається, що другий покупець при виборі найціннішого пакета акцій дотримується оптимальної, так званої *порогової*, стратегії з марковським моментом зупинки $\tau_2(l) > l$ за умови, що марковський момент зупинки вибору першим клієнтом є $\tau_1(l) = l \in \mathcal{H}$. Для конкретизації стратегії вибору найбажанішого пакета акцій першим покупцем обчислимо відповідні ймовірності (6), враховуючи сім'ї асоційованих σ-алгебр $\mathcal{F}^{(s)}_n$, $n = \overline{1, \tau_1}$, $s = \overline{1, 2}$:

$$V^{(1)}_{n}(\tau_2) = c_\alpha P\{X^{(1)}_n = N | \mathcal{F}^{(1)}_n\}[P\{X^{(2)}_{\tau_2} \neq N\} + P\{X^{(2)}_{\tau_2} = N, n < \tau_2\}] -$$

$$- \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2} P\{X^{(1)}_k \neq N\}[P\{X^{(2)}_{\tau_2} \neq N\} + P\{X^{(2)}_{\tau_2} = N, k < \tau_2\}]. \qquad (7)$$

Оскільки наявні у (7) умовні ймовірності легко обчислити, базуючись на змістовній інтерпретації відповідних подій, то функція ціни вибору (7) для першого клієнта-покупця набуває для $n = \overline{1, \tau_1}$ такого вигляду:

$$V^{(1)}_{n}(\tau_2) = \frac{c_\alpha n}{N}(1 - P\{X^{(2)}_{\tau_2} = N, \tau_2 \leqslant n\}) - \frac{\alpha(N-1)}{N} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{N^2}(1 - P\{X^{(2)}_{\tau_2} = N, \tau_2 \leqslant k\}). \qquad (8)$$

Для обчислення ймовірностей $P\{X^{(2)}_{\tau_2} = N, \tau_2 \leqslant k\}$, $k = \overline{1,n}$, у виразі (8) необхідно розглянути асоційовані з процесом вибору найціннішого пакета акцій покупцями такі випадкові послідовності марковських моментів зупинки:

$$x^{(s)}_n := \min\{t > x^{(s)}_{n-1}\colon X^{(s)}_t > \max(X^{(s)}_{t-1}, \ldots, X^{(s)}_1)\}, \tag{9}$$

де $x^{(s)}_n \in \mathcal{H}$, $s = \overline{1,2}$, — момент вибору чергового кандидата на найбільш цінний пакет акцій відповідним клієнтом. Випадкові послідовності (9) є визначальними для функції ціни (8), основні властивості яких характеризуються [11] такою лемою.

Лема 1. *Послідовності $x^{(s)}_n \in \mathcal{H}$, $n = \overline{1,N}$, $s = \overline{1,2}$, вигляду* (9) *є дискретними ланцюгами Маркова на фазовому просторі $\mathcal{H}$ з перехідними ймовірностями*

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i}{j(j-1)},\ 0 \leqslant i < j; & \dfrac{i}{N},\ j = 0; \qquad 0,\ i \geqslant j > 0; \\ 1,\ i = 0,\ j = 1; & 0,\ i = 0,\ j > 1, \end{cases} \tag{10}$$

для всіх i, $j = \overline{0,N}$, де введено додатковий стан $\{0\}$ обриву послідовностей, в який попадає процес після отримання найбільш цінного пакета акцій.

Позначимо через $\widehat{\tau}_s \in \mathcal{H}$, $s = \overline{1,2}$, оптимальні моменти зупинки послідовностей (9). Тоді, очевидно, мають місце співвідношення: $\tau_s = x_{\widehat{\tau}_s}$, де $s = \overline{1,2}$. Розглянемо тепер довільну марковську послідовність вигляду (9) і асоційований з послідовністю цінових функцій (8) наступний розклад фазового простору $\mathcal{H}$ в пряму суму підпросторів $\mathcal{H}_+ := \{j \in \mathcal{H}\colon (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j > V^{(1)}_j(\tau_2)\}$, $\mathcal{H}_- := \{j \in \mathcal{H} : (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_j \leqslant V^{(1)}_j(\tau_2)\}$, де $\mathcal{P} := \{p_{ij}\colon i, j = \overline{0,N}\}$ — матриця перехідних ймовірностей (10). Тоді справедлива [12] така теорема.

Теорема 1. *Нехай матриця $\mathcal{P}$ перехідних ймовірностей* (10) *є такою, що $p_{ij} = 0$ для всіх $i \in \mathcal{H}_+$ та $j \in \mathcal{H}_-$. Тоді момент $\widehat{\tau}_1 \in \mathcal{H}$ першого попадання випадкової послідовності $\{x^{(1))}_n\colon n = \overline{0,N}\}$ в множину $\mathcal{H}_-$ є оптимальним для сукупності функцій ціни $\{V^{(1)}_n(\tau_2)\colon n = \overline{0,N}\}$.*

З метою подальшого застосування теореми 1 обчислимо у виразі (8) ймовірності $P\{X^2_{\tau_2} = N, \tau_2 \leqslant k\}$ для всіх $k = \overline{0,N}$ при умові, що $\tau_1(l) = x^{(1)}_{\widehat{\tau}_1}(l) := l \in \mathcal{H}$. Тоді, якщо $k = \overline{1, l-1}$, ймовірність $P\{X^{(2)}_{\tau_2} = N, \tau_2 \leqslant k\} = P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)} = N, \tau_2(l) \leqslant k\} = 0$, оскільки $\tau_2 := \tau_2(l) \geqslant l$, і якщо $k = \overline{l,N}$

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)} = N, \tau_2(l) \leqslant k\} = \sum_{j=l}^{k} P\{\tau_2(l) = j\} \frac{j}{N}. \tag{11}$$

Щоб обчислити ймовірність $P\{\tau_2(l) = j\colon j \in \mathcal{H}\}$, зауважимо, що на підставі прямого рівняння Колмогорова можна одержати [13, 2]

$$P\{\tau_2(l) = j\} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} P\{x^{(2)}_{\widehat{\tau}_2(l)} = i\} p_{ij}, & j = \overline{2, l-1}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{l-1} P\{x^{(2)}_{\widehat{\tau}_2(l)} = i\} p_{ij}, & j = \overline{l,N}, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{j}, & j = \overline{1, l-1}, \\ \dfrac{l-1}{j(j-1)}, & j = \overline{l,N}. \end{cases} \tag{12}$$

Із (11), (12) знаходимо для $k = \overline{l, N}$, що

$$P\{X^{(2)}_{\tau_2(l)} = N, \tau_2(l) \leqslant k\} = \sum_{j=l}^{k} \frac{l-1}{N(j-1)}.$$

Підставивши попередні результати в (8), отримуємо остаточний вираз для функції ціни першого клієнта-покупця:

$$V^{(1)}_n(\tau_2) = c_\alpha \frac{n}{N}\left(1 - \frac{l-1}{N}\sum_{j=l}^{n}\frac{1}{j-1}\right) - \frac{\alpha(N-1)n(n+1)}{2N^3} + \\ + \frac{\alpha(N-1)(l-1)}{N^2}\sum_{k=l}^{n}\frac{k}{N^2}\sum_{j=l}^{k}\frac{1}{j-1} \tag{13}$$

для всіх $n = \overline{1, N}$. Тепер для розв'язання першого рівняння в (5) досить обчислити $\tau_1^* = \arg V^{(1)}_{\tau_1}(\tau_2) \in \mathcal{H}$ на основі теореми 1. Отже, отримана послідовність (9) оптимального вибору найбільш цінного пакета акцій першим клієнтом-покупцем має бути зупинена в момент $\tau_1(l) = l = x^{(1)}_{\widehat{\tau}_1(l)} \in \mathcal{H}$, який можна знайти, розв'язавши визначальні нерівності

$$(\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_{l-1} > V_{l-1}(\tau_2), \qquad (\mathcal{P}V^{(1)}(\tau_2))_l \leqslant V^{(1)}_l(\tau_2). \tag{14}$$

Нехай тепер $l \in \mathcal{H}$ задовольняє нерівності (14). Тоді має місце така лема.

Лема 2. *Для прогресивної лінійної і узгодженої з обсягом портфеля акцій дисципліни штрафування покупця послідовність* (9) *допускає розбиття фазового простору* $\mathcal{H}$ *в пряму суму підпросторів* $\mathcal{H}_+ = \{\overline{0, l-1}\}$ *та* $\mathcal{H}_- = \{\overline{l, N}\}$ *за умови, що промоційний коефіцієнт* $c_\alpha \geqslant \alpha/2$.

Як висновок з леми 2 отримуємо, що величина $\tau_1(l) = l \in \mathcal{H}$, яка розв'язує нерівності (14), задає оптимальну стратегію вибору найбільш цінного пакета акцій першим покупцем. Згідно з симетрією нашої конкуренційної проблеми вибору, такою ж повинна бути і стратегія поведінки другого клієнта-покупця найціннішого пакета акцій з банківського портфеля.

3. Асимптотичний аналіз оптимальних стратегій вибору пакета акцій. Визначальне рівняння процесу вибору найбільш цінного пакета акцій першим клієнтом-покупцем, згідно з оптимальною стратегією (14), має вигляд:

$$c_\alpha - \frac{\alpha(N-1)(l+1)}{2N^3} + \frac{\alpha(N-1)}{N^2} = c_\alpha\left(\sum_{j=l-1}^{N-1}\frac{1}{j} - \frac{(l-1)}{N}\sum_{j=l}^{N-1}\frac{1}{j}\sum_{k=l-1}^{j}\frac{1}{k}\right) - \\ - \frac{\alpha l(N-1)}{2N^3}\sum_{j=l+1}^{N}\frac{j+1}{j-1} + \frac{\alpha(N-1)l(l-1)}{N^2}\sum_{j=l+1}^{N}\frac{1}{j(j-1)}\sum_{k=l}^{j}\frac{k}{N^2}\sum_{j=l}^{k}\frac{1}{j-1}. \tag{15}$$

Для спрощення та ефективнішого аналізу рівняння (15) припустимо, що портфель банку містить досить велике число $N \in \mathbb{Z}_+$ пакетів акцій. Тим самим, згідно з оптимальною стратегією вибору першого покупця, момент зупинки $\tau_1(l) := l(N) \in \mathcal{H}$ буде задовольняти

Таблиця 1. Дійсні розв'язки рівняння (17) при різних величинах коефіцієнта β

β	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
z^*	0,237	0,240	0,245	0,247	0,250	0,251	0,252	0,253	0,254	0,262	0,263

асимптотичну умову $\lim\limits_{N\to\infty} l(N)/N := z \in (0,1)$. Враховуючи цю умову, знаходимо за допомогою асимптотичного аналізу [14], що співвідношення (15) при $N \to \infty$ переходить в таке трансцендентне рівняння для визначення параметра зупинки $z^* \in (0,1)$:

$$c_\alpha\left(1 + \ln z + \frac{z}{2}\ln^2 z\right) + \frac{\alpha}{2}z(1-z) = \frac{\alpha}{2}z^2\left[\ln z + \frac{1}{2}(1-z)(3-z)\right]. \tag{16}$$

Розв'язок рівняння (16) істотно залежить від параметрів α, c_α банківського середовища. Для подальшого аналізу відповідно перетворимо (16) і отримаємо трансцендентне рівняння для визначення величини z^*:

$$\beta\left(1 + \ln z + \frac{z}{2}\ln^2 z\right) = z^2\ln z + \frac{5}{2}z^2 - 2z^3 + \frac{z^4}{2} - z, \tag{17}$$

де $\beta = 2c_\alpha/\alpha \geqslant 1$. Дійсні корені трансцендентного рівняння (17) при фіксованому значенні β можуть бути знайдені на проміжку $(0,1)$ стандартними числовими методами. Проведений аналіз розв'язків рівняння (17) показав, що у зазначеному інтервалі існує тільки один дійсний корінь. Тобто покупець має тільки одну оптимальну стратегію вибору найціннішого пакета акцій з банківського портфеля. Наближені значення розв'язків рівняння (17) на інтервалі $(0,1)$ для ряду значень величини $\beta \in [1,2]$ наведені у табл. 1.

Отже, приходимо до формулювання такої стратегії поведінки клієнта на ринку акцій: при досить значному обсягу $N \in \mathbb{Z}_+$ пакетів акцій у портфелі банку оптимальною стратегією поведінки першого покупця при виборі найціннішого пакета акцій буде перегляд на відносну порівняльну цінність $l = z^*N \in \mathbb{Z}_+$ акцій, а потім вибір першого у ряді пакета акцій, корисність якого перевищує всі попередньо проглянуті.

4. Таким чином, розглянута конкуренційна модель ринку акцій у середовищі банківського портфеля в умовах цейтнот-біржового процесу вибору клієнтами потенційно найбільш цінного пакета акцій адекватно описується спеціальним дискретним марковським процесом на фазовому просторі $\mathcal{H} = \{0, 1, \ldots, N\}$. Як було також показано, оптимальна стратегія покупця при виборі ним найціннішого пакета акцій визначається при досить великій кількості пакетів у портфелі універсальним трансцендентним рівнянням (17), залежним від величини β, що характеризує співвідношення банківських параметрів заохочення та штрафу. Умовою найменшого ризику втрат банку-продавця акцій, очевидно, є $\beta = 1$, що приводить до інваріантної форми рівняння (17) стосовно параметрів c_α та α. В цьому випадку покупцю досить проглянути $\simeq 23{,}75\%$ пакетів з портфеля для оптимального вибору найкращого пакета акцій.

Відзначимо, що досліджена модель є дещо спрощеною версією цейтнот-біржової поведінки клієнтів-покупців акцій за умови відсутності апріорної інформації про якісні характеристики портфеля. Нами свідомо припускалося, що кожен клієнт має достатній фінансовий капітал для придбання будь-якого пакета акцій з банківського портфеля. Якщо ж клієнти обмежені у фінансових ресурсах або ж є декілька параметрів якості пакетів акцій, то відповідні оптимальні стратегії поведінки таких покупців значно ускладнюються, що потребує окремого аналізу та розвитку запропонованого методу дослідження.

1. *Березовский Б. А., Гнедин А. В.* Задача наилучшего выбора. – Москва: Наука, 1984. – 197 с.
2. *Davis M. H. A., Panas V. G., Zariphopoulou T.* European option pricing with transaction costs // SIAM J. Control Optimiz. – 1993. – **31**. – P. 470–493.
3. *Матвійчук А. В.* Аналіз та прогнозування розвитку фінансово-економічних систем із використанням теорії нечіткої логіки. – Київ: Центр навч. літ-ри, 2005. – 206 с.
4. *Кігель В. Р.* Методи і моделі підтримки прийняття рішень у ринковій економіці. – Київ: ЦУЛ, 2003. – 202 с.
5. *Летчиков А. В.* Лекции по финансовой математике. – Москва; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2004. – 240 с.
6. *Davis M. H. A., Norman A. R.* Portfolio selection with transaction costs // Math. of Operational Research. – 1990. – **15**. – P. 676–713.
7. *Merton R. C.* Optimization consumption and portfolio rules in a continuous-time model // J. Economic Theory. – 1971. – **3**. – P. 373–413.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. Т. 1. / Пер. с англ. – Москва: Мир, 1984. – 528 с.
9. *Morette de Witt C., Elworthy K. D.* A stepping stone in stochastic analysis // Phys. Reports. – 1981. – 77/3. – P. 125–167.
10. *Arnold L.* Qualitative theory of stochastic systems and its application in physics // Ibid. – P. 215–219.
11. *Gilbert J., Mosteller F.* Recognizing the maximum of a sequence // American Statist. Ass. – 1966. – **61**. – P. 35–73.
12. *Пресман Э. Л., Сонин И. М.* Игровые задачи оптимальной остановки. Существование и единственность точек равновесия. Вероятностные проблемы управления в экономике. – Москва: Наука, 1977. – С. 115–144.
13. *Мазалов В. В., Винниченко С. В.* Моменты остановки и управляемые случайные блуждания. – Новосибирск: Наука, 1992. – 112 с.
14. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы. – Москва: Наука, 1985. – 270 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка
Інститут математики НАН України, Київ
Академія гірництва та металургії, Краків, Польща
Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 10.04.2008

B. Yu. Kyshakevych, A. K. Prykarpatsky, I. P. Tverdokhlib

Optimal strategy analysis of a competitive bank portfolio model of the share market

We consider the problem of choice of the most valuable stock packet by a buyer within an offered bank portfolio under conditions of time limitation and competition between buyers. An economic-mathematical model of the optimal stopping of choosing a stock packet from a database adequately described by a discrete Markov chain is proposed. A method of search for the optimal choice process stop moment of the most valuable stock packet from a bank portfolio for a potential buyer allowing to define the optimal strategy for every buyer-competitor is substantiated. The asymptotic analysis of optimal client strategies as for the purchasing the stock packets under the dependence on the bank environment medium is done, and a transcendent equation for the determination of the optimal part of packets from the portfolio to be necessary revisited is obtained.