Физика низких температур, 2007, т. 33, № 11, с. 1271–1281

Классификация состояний равновесия магнетиков с векторным и квадрупольным параметрами порядка

Д.А. Демьяненко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина

М.Ю. Ковалевский

Национальный научный центр «Харьковский физико-технический институт» ул. Академическая,1, г. Харьков, 61108, Украина

Белгородский государственный университет, ул. Победы, 85, г. Белгород, 308015, Россия
mikov@kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 31 мая 2007 г.

Проведена классификация состояний равновесия магнитных конденсированных сред, симметрия которых спонтанно нарушена относительно поворотов в спиновом пространстве и трансляций в конфигурационном пространстве. Рассмотрены случаи векторного и тензорного параметров порядка, обладающих различными трансформационными свойствами при отражении времени. Сформулированы условия ненарушенной симметрии и пространственной симметрии состояний равновесия для таких сред. В случае векторного параметра порядка выяснена связь этих условий симметрии с пара-, ферро-, антиферро-, ферри- и спиральными магнитными состояниями. Выяснена связь указанных условий симметрии с квадрупольными магнитными состояниями — одно- и двухосными магнитными нематиками, магнитными холестериками и двойной магнитной спиралью.

Проведено класифікацію станів рівноваги магнітних конденсованих середовищ, симетрія яких спонтанно порушена щодо поворотів у спіновому просторі й трансляцій у конфігураційному просторі. Розглянуто випадки векторного та тензорного параметрів порядку, які мають різні трансформаційні властивості при відбитті часу. Сформульовано умови непорушеної симетрії й просторової симетрії станів рівноваги для таких середовищ. У випадку векторного параметра порядку з’ясовано зв’язок цих умов симетрії з пара-, феро-, антиферо-, фери- і спіральними магнітними станами. З’ясовано зв’язок зазначених умов симетрії із квадрупольними магнітними станами — одно- та двохосьовими магнітними нематиками, магнітними холестериками й подвійною магнітною спіраллю.

PACS: 75.40.Cx Статические свойства (параметр порядка, статическая восприимчивость, теплоемкости, критические индексы и т.д.).

Ключевые слова: магнетики, фазовые переходы, параметр порядка, квазисредние, симметрия, распределение Гиббса, спиновый нематик.

Введение

Фазовые переходы II рода сопровождаются изменением симметрии состояния равновесия системы при переходе через критическую температуру. Адекватное описание состояния равновесия в конденсированных средах с нарушенной симметрией ниже критической температуры требует введения в теорию дополнительных термодинамических параметров, не связанных с законами сохранения, а обусловленных физической природой новой фазы. В соответствии с феноменологией классификации состояний равновесия вырожденных конденсированных сред [1] необходимо знание в явном виде свободной энергии как функции параметра порядка. Минимизация свободной энергии по параметру порядка и возникающее при этом уравнение на равновесную структуру параметра порядка имеет в общем случае нелинейный характер. Теоретико-групповой подход [2,3], не зависящий от конкретной математической модели, использует представление о ненарушенной симметрии вырожденного состояния равновесия как подгруппе симметрии нормальной фазы.

Классификация состояний равновесия магнитных состояний в настоящей работе осуществляется исходя из условий ненарушенной и пространственной симметрии при ненулевых значениях параметра порядка. Детально рассмотрены магнетики с векторным и квадрупольным параметрами порядка. Эти параметры имеют различную четность при преобразовании отражения времени. В развиваемом нами подходе уравнения на равновесные значения параметра порядка получаются линейными. Дана физическая интерпретация полученных решений для векторного и квадрупольного параметров порядка.

1. Состояния равновесия нормальных конденсированных сред

Равновесный статистический оператор Гиббса для магнитных сред имеет вид

$$\hat{w} = \exp(\Omega(Y) - Y_a \hat{\gamma}_a), \tag{1}$$

где Y_a — термодинамические силы, сопряженные аддитивным интегралам движения, $\hat{\gamma}_a \equiv (\hat{H}, \hat{P}_k, \hat{S}_\alpha)$, $a = 0, k, \alpha$. Здесь $\hat{H} = \int d^3x \hat{\varepsilon}(x)$ — гамильтониан, $\hat{P}_k = \int d^3x \hat{\pi}_k(x)$ — импульс, спин $\hat{S}_\alpha = \int d^3x \hat{s}_\alpha(x)$. Остальные интегралы движения не существенны для исследования задачи классификации состояний равновесия магнитных сред.

Входящие в подынтегральные выражения операторы представляют собой плотности аддитивных интегралов движения. Термодинамический потенциал $\Omega(Y)$ определяется из условия нормировки $\mathrm{Sp}\hat{w} = 1$. Набор термодинамических сил включает в себя $Y_0^{-1} \equiv T$ — температуру, $-Y_k/Y_0 \equiv v_k$ — нормальную скорость, $-Y_\alpha/Y_0 \equiv h_\alpha$ — эффективное магнитное поле.

Сформулируем свойства симметрии состояния равновесия. Условие пространственной однородности нормального состояния имеет вид

$$[\hat{w}_n, \hat{P}_k] = 0. \tag{2}$$

Наличие интеграла движения — оператора спинового момента — позволяет сформулировать соответствующее свойство симметрии. С этой целью введем в рассмотрение обобщенный оператор спинового момента равенством:

$$\hat{\Sigma}_\alpha(Y) = \hat{S}_\alpha + \hat{S}_\alpha^Y, \quad \hat{S}_\alpha^Y \equiv -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta \frac{\partial}{\partial Y_\gamma}. \tag{3}$$

Введенный оператор действуют как в гильбертовом пространстве, так и в пространстве термодинамических функций. На вектор Y_α дифференциальный оператор действует так: $i[\hat{S}_\alpha^Y, Y_\rho] = \varepsilon_{\alpha\beta\rho} Y_\beta$. В силу известных коммутационных соотношений

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma$$

и явного вида операторов (3) получим квантовые скобки Пуассона для введенных операторов (3):

$$i[\hat{\Sigma}_\alpha(Y), \hat{\Sigma}_\beta(Y)] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Sigma}_\gamma(Y).$$

С помощью этого оператора удобно сформулировать свойства симметрии равновесного статистического оператора относительно спиновых поворотов

$$[\hat{w}_n, \hat{\Sigma}_\alpha(Y)] = 0. \tag{4}$$

Условия симметрии относительно поворотов в спиновом пространстве означают пренебрежение слабыми дипольными и спин-орбитальными взаимодействиями в гамильтониане магнитной системы. Группа симметрии нормального состояния равновесия среды имеет вид

$$G = [SO(3)]_S \times [T(3)].$$

Здесь $[SO(3)]_S$ — группа симметрии относительно поворотов в спиновом пространстве, $[T(3)]$ — трансляционная группа в пространстве. Каждый элемент группы представляет собой унитарный оператор $U \equiv \exp i\hat{G}g$, (g — действительные параметры преобразования), оставляющий инвариантным распределение Гиббса

$$U\hat{w}_n U^+ = \hat{w}_n. \tag{5}$$

Генераторами преобразований (5) являются линейные комбинации операторов $\hat{G} \in \{\hat{\Sigma}_\alpha, \hat{P}_k\}$. Обратим внимание, что свойство инвариантности (5) имеет место для произвольных параметров преобразования, сопряженных к интегралам движения в силу условий симметрии (2),(4). Поэтому средние $\mathrm{Sp}\hat{w}[\hat{G}, \hat{b}(x)]$ обращаются в нуль для произвольного квазилокального оператора $\hat{b}(x)$. Это, в частности, справедливо для операторов $\hat{b}(x) \equiv \hat{\Delta}_a(x)$, имеющих смысл операторов параметра порядка и не коммутирующих с интегралами движения $\hat{G}$. Индекс a отражает тензорную размерность параметра порядка. В последующих разделах будут сформулированы трансформационные свойства операторов параметра порядка изучаемых магнетиков. Здесь же достаточно заметить, что возникающие коммутаторы типа $[\hat{G}, \hat{\Delta}_a(x)]$ линейны и однородны по операторам параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$, что приводит к обращению в нуль их равновесных средних

$$\mathrm{Sp}\hat{w}_n \hat{\Delta}_a(x) = 0$$

в нормальном состоянии, то есть в состоянии, описываемом статистическим оператором Гиббса (1).

Магнитные свойства среды в нормальном состоянии равновесия характеризуются только значением спина $s_\alpha = \mathrm{Sp}\hat{w}_n \hat{s}_\alpha(x)$. В силу (2),(4) справедливо уравнение $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} s_\gamma + \varepsilon_{\alpha\lambda\rho} Y_\lambda \partial s_\beta / \partial Y_\rho = 0$, откуда следует равенство $s_\alpha = s Y_\alpha / Y$, $Y \equiv |\mathbf{Y}|$. Таким образом, в этом состоянии спин направлен вдоль направления вектора $\mathbf{Y}$ и его величина в терминах плотности термодинамического потенциала

$$\omega(Y) = \lim_{V\to\infty} \Omega(Y)/V$$

имеет, очевидно, вид $s(Y) = 2Y \partial\omega(Y)/\partial Y^2$. Здесь V — объем системы. Рассмотренный случай представляет собой парамагнитное состояние равновесия конденсированной среды.

2. Состояния равновесия вырожденных магнитных сред и задача их классификации

Рассмотрим состояния равновесия со спонтанно нарушенной симметрией относительно поворотов в спиновом пространстве. В этом случае статистический оператор (1) не описывает правильно равновесные состояния изучаемых конденсированных сред, для которых равновесный параметр порядка отличен от нуля. Для построения статистической теории равновесия конденсированной среды в рамках статистической теории используем концепцию квазисредних [4]. Конструктивным моментом этой концепции является введение в равновесный статистический оператор бесконечно малого источника $\nu\hat{F}$, который уменьшает симметрию состояния статистического равновесия по сравнению с симметрией гамильтониана и позволяет обобщить распределение Гиббса на конденсированные среды в условиях спонтанного нарушения симметрии. Согласно [4], квазисреднее величины $a(x)$ в состоянии статистического равновесия с нарушенной симметрией определяется формулой

$$a(x) = \langle \hat{a}(x) \rangle \equiv \lim_{\nu\to 0} \lim_{V\to\infty} \mathrm{Sp}\hat{w}_\nu \hat{a}(x),$$

где

$$\hat{w}_\nu \equiv \exp(\Omega_\nu - Y_a \hat{\gamma}_a - \nu Y_0 \hat{F}). \quad (6)$$

Источник $\hat{F}$ обладает симметрией исследуемой фазы конденсированной среды и снимает вырождение состояния равновесия. Имеет место спонтанное нарушение симметрии состояния равновесия $[\hat{w}, \hat{G}_0] \neq 0$, при $[\hat{H}, \hat{G}_0] = 0$, и, следовательно, равновесное среднее параметра порядка отлично от нуля

$$\Delta_a(x) = \mathrm{Sp}\hat{w}\hat{\Delta}_a(x) \neq 0,$$

где $\hat{G}_0$ — подмножество генераторов группы $\hat{G}$, по отношению к которым симметрия нарушена. Выписанное операторное соотношение следует понимать в смысле квазисредних, то есть

$$\lim_{\nu\to 0} \lim_{V\to\infty} \mathrm{Sp}\hat{w}_\nu [\hat{G}_0, \hat{a}(x)] \neq 0.$$

Здесь и в дальнейшем используем одинаковое обозначение как для средних, так и для квазисредних. В соответствии с концепцией квазисредних выбираем источник $\hat{F}$, нарушающий симметрию состояния равновесия, в виде линейного функционала оператора параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$:

$$\hat{F} = \int d^3x (f_a(x)\hat{\Delta}_a(x) + \mathrm{h.c.}), \quad (7)$$

где $f_a(x)$ — некоторая функция координат, сопряженная оператору параметра порядка, которая задает его равновесные значения $\Delta_a(x) = \langle \hat{\Delta}_a(x) \rangle$. Такая модификация статистического оператора Гиббса дает возможность ввести в рассмотрение дополнительные термодинамические параметры [5–8]. Заметим, что введение источника $\hat{F}$ в общем случае нарушает инвариантность равновесного статистического оператора по отношению к трансляциям, то есть $[\hat{w}, \hat{P}_k] \neq 0$, и поэтому в этом случае может возникнуть зависимость параметра порядка от координаты. Конкретная пространственная зависимость параметров порядка будет найдена ниже при рассмотрении неоднородных магнитных состояний равновесия.

Операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ представляют собой некоторые определенные локальные функции полевых операторов рождения и уничтожения. Сформулируем трансформационные свойства операторов параметра порядка. Условие трансляционной инвариантности имеет вид

$$i[\hat{P}_k, \hat{\Delta}_a(x)] = -\nabla_k \hat{\Delta}_a(x). \quad (8)$$

При преобразованиях, связанных с группой спиновых поворотов, генераторами которых являются операторы спина $\hat{S}_\alpha$ $(\alpha = x, y, z)$, операторы параметра порядка $\hat{\Delta}_a(x)$ преобразуются по представлениям этой группы

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_a(x)] = -g_{\alpha ab} \hat{\Delta}_b(x), \quad (9)$$

где $(\hat{g}_\alpha)_{ab} \equiv g_{\alpha ab}$ — некоторые постоянные, зависящие от тензорной размерности оператора параметра порядка. Генераторы группы спиновой симметрии $\hat{S}_\alpha$ удовлетворяют соотношениям

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{S}_\gamma,$$

здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — антисимметричный тензор Леви–Чивита. Из формул (9), используя тождество Якоби для операторов $\hat{S}_\alpha, \hat{S}_\beta$ и $\hat{\Delta}(x)$, получаем соотношение

$$[\hat{g}_\alpha, \hat{g}_\beta] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{g}_\gamma. \quad (10)$$

Сформулируем свойства симметрии состояния равновесия и введем дополнительные термодинамические параметры для вырожденных конденсированных сред. Рассмотрим вначале трансляционно-инвариантные подгруппы ненарушенной симметрии H полной группы симметрии G. Трансляционная инвариантность означает, что равновесный статистический оператор удовлетворяет соотношению симметрии

$$[\hat{w}, \hat{P}_k] = 0. \tag{11}$$

Анализ трансляционно-инвариантных подгрупп ненарушенной симметрии равновесных состояний в соответствии с [7] осуществим исходя из соотношения

$$[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{b}, Y)] = 0, \tag{12}$$

где генератор ненарушенной (оставшейся) симметрии $\hat{T}(\mathbf{b}, Y)$ представляет собой линейную комбинацию интегралов движения (генераторы подгруппы H)

$$\hat{T}(b, Y) \equiv b_\alpha \hat{\Sigma}_\alpha(Y) \tag{13}$$

с действительным параметром. Из равенств

$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{b}, Y)]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \quad i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{P}_k]\hat{\Delta}_a(x) = 0, \tag{14}$$

учитывая алгебраические соотношения (8)–(11) и определение (13), получим систему линейных дифференциальных уравнений, которые задают структуру параметра порядка в состоянии равновесия:

$$b_\alpha \left(g_{\alpha ab} \Delta_b + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Y_\beta \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial Y_\gamma} \right) = 0,$$

$$\nabla_k \Delta_a(x) = 0. \tag{15}$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если положить вектор $Y_\alpha = 0$. При этом первое из дифференциальных уравнений (15) переходит в систему линейных алгебраических уравнений для параметра порядка

$$T_{ab}(\mathbf{b}) \Delta_b = 0, \quad T_{ab}(\mathbf{b}) \equiv b_\alpha g_{\alpha ab}. \tag{16}$$

Условие существования нетривиального решения $\Delta_a \neq 0$ системы линейных уравнений (16) приводит к равенству

$$\det \left| T_{ab}(\mathbf{b}) \right| = 0, \tag{17}$$

которое накладывает ограничения на допустимые значения вектора $\mathbf{b}$. Таким образом, в трансляционно-инвариантном случае равновесный статистический оператор Гиббса является функцией термодинамических параметров и параметров генератора ненарушенной симметрии, удовлетворяющих соотношению (17): $\hat{w} = \hat{w}(Y, \mathbf{b})$.

Рассмотрим теперь состояния равновесия, которые не обладают свойством трансляционной инвариантности (11). Пространственную симметрию таких неоднородных состояний равновесия определим соотношением

$$[\hat{w}, \hat{P}_k(q, Y)] = 0, \quad \hat{P}_k(q, Y) \equiv \hat{P}_k - q_{k\alpha} \hat{\Sigma}_\alpha(Y), \tag{18}$$

здесь $q_{k\alpha}$ — некоторые действительные параметры. Генератор ненарушенной симметрии таких состояний теперь включает в себя оператор импульса

$$\hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{d}, Y) \equiv b_\alpha \hat{\Sigma}_\alpha(Y) + d_i \hat{P}_i. \tag{19}$$

Соотношения

$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{d}, Y)]\hat{\Delta}_a(x) = 0,$$

$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, P_k(q, Y)]\hat{\Delta}_a(x) = 0 \tag{20}$$

в соответствии с (8)–(12) и (13) ведут к связям параметров, входящих в определение генераторов ненарушенной и пространственной симметрии. Эти соотношения следует дополнить двумя условиями на параметры ненарушенной и пространственной симметрии, которые являются следствием тождеств Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{P}_k(q, Y)$ и $\hat{w}, \hat{P}_i(q, Y), \hat{P}_k(q, Y)$:

$$\mathrm{Sp}[\hat{w}, [\hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{d}, Y), \hat{P}_k(q, Y)]]\hat{\Delta}_a(x) = 0,$$

$$\mathrm{Sp}[\hat{w}, [\hat{P}_i(q, Y), \hat{P}_k(q, Y)]]\hat{\Delta}_a(x) = 0. \tag{21}$$

Уравнения (20),(21) позволяют решить задачу о классификации состояния равновесия конденсированных сред в пространственно-неоднородном случае. Таким образом, равновесный статистический оператор теперь является функцией термодинамических параметров, а также параметров генераторов ненарушенной и пространственной симметрии: $\hat{w} = \hat{w}(Y, \mathbf{b}, \mathbf{d}, q)$, причем допустимые значения параметров $\mathbf{b}, \mathbf{d}$ и q находятся из соотношений (20) и (21).

3. Магнитные конденсированные среды с векторным параметром порядка. Однородные состояния равновесия

Рассмотрим конденсированные среды с нарушенной симметрией относительно спиновых поворотов, характеризуемые векторным параметром порядка

$$\Delta_\alpha(x, \hat{w}) = \mathrm{Sp}\hat{w}\hat{\Delta}_\alpha(x) = \hat{\Delta}_\alpha(x, \hat{w}).$$

Здесь $\hat{\Delta}_\alpha(x)$ — эрмитов оператор параметра порядка, построенный линейным образом из операторов спинов подрешеток $\hat{\Delta}_\alpha(x) = \hat{\Delta}_\alpha(x, \hat{\mathbf{s}}_n(x))$. Этот векторный оператор параметра порядка удовлетворяет операторным соотношениям

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{\Delta}_\beta(x)] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\Delta}_\gamma(x),$$

$$i[\hat{P}_k, \hat{\Delta}_\alpha(x)] = -\nabla_k \hat{\Delta}_\alpha(x). \tag{22}$$

Примерами таких систем являются, в частности, многоподрешеточные магнетики, спиновые стекла [9–15]. В соответствии с концепцией квазисредних равновесный статистический оператор рассматриваемых магнитных систем имеет вид

$$\hat{w}_\nu = \exp(\Omega(Y) - Y_0\hat{H} - Y_\alpha \hat{S}_\alpha - \nu Y_0 \hat{F}) \equiv \hat{w}_\Delta, \quad (23)$$

$$\hat{F} = \int d^3x (f_\alpha(x)\hat{\Delta}_\alpha(x) + \text{h.c.}),$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан обменного взаимодействия ($[\hat{H}, \hat{S}_\alpha] = 0$).

Введем дискретные преобразования пространственного отражения и обращения времени и выпишем соответствующие трансформационные преобразования интегралов движения и параметра порядка относительно этих преобразований:

$$1)\ x_i \to x_i' = -x_i, \qquad t \to t' = t,$$

$$2)\ x_i \to x_i' = x_i, \qquad t \to t' = -t.$$

Преобразование пространственного отражения определяется равенством

$$\hat{\psi}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\psi}(-\mathbf{x}, t) = \hat{\mathrm{P}}\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathrm{P}}^+. \quad (24)$$

Отсюда следует, что $[\hat{\mathrm{P}}^2, \hat{\psi}(\mathbf{x})] = 0$. Учитывая, что оператор $\hat{\mathrm{P}}$ определен с точностью до фазового множителя, и замечая, что произвольный оператор, коммутирующий с операторами $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ и $\hat{\psi}^+(\mathbf{x}, t)$, кратен единичному, можно считать, что $\hat{\mathrm{P}}^2 = 1$ и, следовательно, собственные значения оператора $\hat{\mathrm{P}}$ равны ± 1. Оператор $\hat{\mathrm{P}}$ называется оператором пространственной четности. В соответствии с выражениями плотностей аддитивных интегралов движения $\hat{\pi}_k(x), \hat{s}_\alpha(x)$

$$\hat{s}_i(x) = \hat{\psi}^+_\sigma(x)(s_i)_{\sigma\sigma'}\hat{\psi}_{\sigma'}(x),$$

$$\hat{\pi}_i(x) = -i\{\hat{\psi}^+_\sigma(x)\nabla_i\hat{\psi}_\sigma(x) - \nabla_i\hat{\psi}^+_\sigma(x)\hat{\psi}_\sigma(x)\}/2$$

в терминах полевых операторов и соотношением (24) получим трансформационные соотношения

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})\hat{\mathrm{P}}^+ = \underline{\varepsilon}_a\hat{\zeta}_a(-\mathbf{x}), \quad (25)$$

где множитель

$$\underline{\varepsilon}_a \equiv +\delta_{a\alpha} - \delta_{ak}$$

представляет собой пространственную сигнатуру оператора $\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})$. В силу линейности оператора параметра порядка по спиновым операторам и соотношения (25) получим для векторного оператора параметра порядка трансформационное соотношение

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\mathrm{P}}^+ = \hat{\Delta}_\alpha(-\mathbf{x}). \quad (26)$$

Рассмотрим теперь дискретное преобразование обращения времени

$$t \to t' = -t.$$

Этой операции соответствует следующее преобразование полевого оператора $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}, t) \to \hat{\psi}'(\mathbf{x}, t') = \mathrm{T}\hat{\psi}^*(\mathbf{x}, t), \quad (27)$$

где Т — унитарная матрица ($\mathrm{TT}^+ = 1$), действующая на спиновые индексы $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ и знак «*» служит для обозначения операции комплексного сопряжения. Эта операция зависит от выбора базиса в гильбертовом пространстве. Если выбран определенный базис в гильбертовом пространстве, то в нем операция комплексного сопряжения определяется формулой

$$\langle n|\psi^*|n'\rangle = \langle n|\psi|n'\rangle^*.$$

Так как операторы $\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)$ и $\hat{\psi}'(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то они связаны унитарным оператором $\hat{\mathrm{T}}$, действующим в гильбертовом пространстве:

$$\hat{\psi}'(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathrm{T}}\hat{\psi}(\mathbf{x}, t)\hat{\mathrm{T}}^+ = \mathrm{T}\hat{\psi}^*(\mathbf{x}, -t). \quad (28)$$

Зная выражения для операторов аддитивных интегралов движения в терминах полевых операторов рождения и уничтожения и используя равенство (27) при $t = 0$, легко установить справедливость соотношений

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})\hat{\mathrm{T}}^+ = \varepsilon_a\hat{\zeta}^*_a(-\mathbf{x}). \quad (29)$$

Здесь величина

$$\varepsilon_a \equiv -\delta_{a\alpha} - \delta_{ak}$$

представляет собой временную сигнатуру шредингеровского оператора $\hat{\zeta}_a(\mathbf{x})$. Легко видеть, что $[\mathrm{T}^2, \hat{\psi}(\mathbf{x}, t)] = 0$.

Используя формулы (28),(29) и учитывая линейность векторного оператора параметра порядка по операторам плотности спина, найдем закон преобразования оператора параметра порядка при преобразовании обращения времени

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{\Delta}_\alpha(\mathbf{x})\hat{\mathrm{T}}^+ = -\hat{\Delta}^*_\alpha(\mathbf{x}). \quad (30)$$

Соотношения (24)–(26) и (29),(30) позволяют получить трансформационные свойства равновесного статистического оператора Гиббса (23) при дискретных преобразованиях отражения пространства и обращения времени

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}}\hat{w}(Y_0, Y_\alpha, f_{\alpha\beta})(\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}})^+ = \hat{w}^*(Y_0, -Y_\alpha, -f_{\alpha\beta}). \quad (31)$$

Для пространственно-однородных состояний (11) генератор ненарушенной симметрии (13) магнетиков имеет вид

$$\hat{T}(\mathbf{b}, Y) \equiv b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha(Y).$$

(Во избежание недоразумений обращаем внимание на различное написание операторов ненарушенной симметрии $\hat{T}(\mathbf{b}, Y)$ и унитарного оператора обращения времени $\hat{\mathrm{T}}$.) Не ограничивая общность рассмотрения, можно считать, что вектор $\mathbf{b}$ единичный: $b_\alpha^2 = 1$. В силу условия ненарушенной симметрии (12) и операторной алгебры (22) получим уравнения, определяющие равновесную структуру спина и параметра порядка

$$b_\alpha \left(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma + \varepsilon_{\alpha\lambda\rho} Y_\lambda \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial Y_\rho} \right) = 0, \nabla_k \Delta_a(x) = 0. \quad (32)$$

Так как равновесный статистический оператор Гиббса зависит от векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{Y}$: $\hat{w} = \hat{w}(\mathbf{Y}, \mathbf{b})$, то плотность термодинамического потенциала является функцией двух скалярных инвариантов $\omega = \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{b}) = \omega(Y^2, \mathbf{Yb})$. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$s_\alpha = \frac{\partial \omega}{\partial Y^2} 2Y_\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Yb}} b_\alpha. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (32), видим, что уравнения (32) выполняются тождественно при любых направлениях вектора $\mathbf{b}$.

1. Если $\lim\limits_{\mathbf{Y}\to 0} \dfrac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Yb}} \neq 0$, то при $\mathbf{b} \neq 0$, $\mathbf{Y} = 0$ реализуется ферромагнитное упорядочение.

2. Частный случай, при котором $\mathbf{b} \neq 0$, $\mathbf{Y} = 0$ и $\lim\limits_{\mathbf{Y}\to 0} \dfrac{\partial \omega}{\partial \mathbf{Yb}} \to 0$, соответствует антиферромагнитному упорядочению.

3. Общая ситуация, когда $\mathbf{b} \neq 0$ и $\mathbf{Y} \neq 0$, отвечает ферримагнитному упорядочению.

4. Неоднородные состояния равновесия магнитных сред с векторным параметром порядка

Исследуем теперь случай, когда пространственная симметрия состояния равновесия имеет более сложный пространственный характер и определяется равенством (18). При этом генератор ненарушенной симметрии соответственно имеет вид (19). Согласно условиям симметрии, запишем соотношения

$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{d}, Y)]\hat{\Delta}_\beta(x) = 0, \quad i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{P}_k(q, Y)]\hat{\Delta}_\alpha(x) = 0. \quad (34)$$

Откуда следуют уравнения, устанавливающие равновесную структуру параметра порядка, и возникают ограничения на параметры генераторов ненарушенной симметрии и пространственной симметрии. Условие пространственной симметрии, вид генератора $\hat{P}_k$(18) и алгебра (22) приводят к уравнениям

$$\nabla_k \Delta_\beta(x) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} q_{k\alpha} \Delta_\gamma(x), \quad t_{kj} \varepsilon_{juv} q_{v\lambda} \varepsilon_{\lambda\beta\gamma} \Delta_\gamma(x) = 0. \quad (35)$$

Второе соотношение в (35) является следствием требования отсутствия линейного по координате слагаемого в условии пространственной симметрии (18) и первого соотношения в (35). Условие ненарушенной симметрии в (34), принимая во внимание вид генератора (19), приводит к уравнениям

$$(b_\alpha + d_i q_{i\alpha})\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Delta_\gamma(x) = 0, \quad a_i \varepsilon_{ikl} q_{l\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\gamma(x) = 0. \quad (36)$$

Дополнительные связи параметров генераторов симметрии, введенных соотношениями (18), (19), установим, используя тождество Якоби. Для операторов $\hat{w}, \hat{T}, \hat{P}(q, Y)$, принимая во внимание свойства симметрии, приходим к равенству

$$\mathrm{Sp}[\hat{w}, [\hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{d}, Y), \hat{P}_k(q, Y)]]\hat{\Delta}_\beta(x) = 0.$$

Откуда, учитывая (18),(19),(22), получаем соотношения

$$\begin{gathered}(b_\beta q_{i\rho} + b_\rho q_{i\beta})\varepsilon_{\rho\alpha\gamma}\Delta_\gamma(x) = 0, \\ (a_i t_{kl} - a_l t_{ki}) q_{l\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\gamma(x) = 0.\end{gathered} \quad (37)$$

Используя далее тождество Якоби для операторов $\hat{w}, \hat{P}_i, \hat{P}_k$ и учитывая свойство пространственной симметрии (18), имеем соотношение

$$\mathrm{Sp}[\hat{w}, [\hat{P}_i(q, Y), \hat{P}_k(q, Y)]]\hat{\Delta}_\beta(x) = 0.$$

Отсюда следуют уравнения

$$\begin{gathered}(t_{ij} t_{kl} - t_{il} t_{kj}) q_{l\alpha} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Delta_\gamma(x) = 0, \\ (q_{l\alpha} q_{i\beta} + q_{l\beta} q_{i\alpha})\Delta_\alpha(x) = 0.\end{gathered} \quad (38)$$

Система уравнений (35)–(38) полностью определяет допустимую структуру параметров генератора симметрии и вид параметра порядка в равновесии. Не трудно видеть, что решение этой системы уравнений можно представить в виде

$$\Delta_\beta(x) = a_{\beta\gamma}(\mathbf{n}\theta(x))\underline{\Delta}_\gamma(0), \quad \theta(x) = \theta + \mathbf{qx},$$
$$q_{i\alpha} = q_i n_\alpha.$$

Здесь q_k — вектор магнитной спирали, n_α — ось анизотропии в спиновом пространстве, матрица t_{ik} — произвольна. Ортогональная матрица поворота связана с углом спинового поворота соотношением

$$\begin{gathered}a_{\alpha\beta}(\theta(x)) \equiv (\exp(\varepsilon\theta(x)))_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\cos\theta(x) + \\ + n_\alpha n_\beta (1 - \cos\theta(x)) + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\gamma \sin\theta(x),\end{gathered} \quad (39)$$

$$\theta_\alpha(x) = n_\alpha \theta(x), \qquad n_\alpha^2 = 1.$$

Равновесные значения плотности спина $s_\alpha(x)$ зависят от координат: $s_\alpha(x) = a_{\alpha\beta}(x)\underline{s}_\beta$, причем вся пространственная зависимость содержится в ортогональной матрице поворота $a_{\alpha\beta}(x)$, определенной равенствами (39). Таким образом, состояние равновесия рассматриваемой неоднородной магнитной системы со спонтанным нарушением симметрии относительно спиновых поворотов и пространственных трансляций характеризуется термодинамическими силами Y_a, вектором магнитной спирали $\mathbf{q}$ и углом спинового поворота θ: $\hat{w} = \hat{w}(Y, \mathbf{q}, \theta)$. Такие неоднородные магнитные состояния получили название спиральных магнетиков [16–20].

5. Магнитные конденсированные среды с квадрупольным параметром порядка. Однородные состояния равновесия

Квадрупольные магнетики описываются тензорным параметром порядка

$$Q_{\alpha\beta}(x, \hat{w}) = \mathrm{Sp}\hat{w}\hat{Q}_{\alpha\beta}(x).$$

Здесь $\hat{Q}_{\alpha\beta}(x)$ — эрмитов оператор параметра порядка, введенный нами билинейным образом из операторов спина подрешеток $\hat{\Delta}_\alpha(x) = \hat{\Delta}_\alpha(x, \hat{s}_n(x))$:

$$\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}(\hat{s}_{\alpha n}(x)\hat{s}_{\beta n}(x) + \hat{s}_{\beta n}(x)\hat{s}_{\alpha n}(x) - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\hat{s}^2_{\gamma n}(x)). \tag{40}$$

Этот оператор является симметричным и бесшпуровым

$$\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = \hat{Q}_{\beta\alpha}(x), \qquad \hat{Q}_{\alpha\alpha}(x) = 0.$$

Квадрупольный оператор параметра порядка в соответствии с определением (40) удовлетворяет выписанным операторным соотношениям:

$$i[\hat{S}_\alpha, \hat{Q}_{\beta\gamma}(x)] = -\varepsilon_{\alpha\beta\rho}\hat{Q}_{\gamma\rho}(x) - \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}\hat{Q}_{\beta\rho}(x),$$
$$i[\hat{P}_k, \hat{Q}_{\alpha\beta}(x)] = -\nabla_k\hat{Q}_{\alpha\beta}(x). \tag{41}$$

Видим, что правые стороны квантовых скобок Пуассона (41) линейны по квадрупольному оператору параметра порядка. Это обстоятельство приводит, как мы увидим далее, к линейным уравнениям, классифицирующим состояния равновесия этих магнитных систем.

Состояние равновесия магнитной конденсированной среды описывается статистическим оператором Гиббса (6), причем теперь источник (7) в гиббсовской экспоненте имеет вид

$$\hat{F} = \int d^3x f_{\alpha\beta}(x)\hat{Q}_{\alpha\beta}(x).$$

Рассмотрим трансформационное свойство квадрупольного оператора параметра порядка при преобразовании пространственного отражения (24). Согласно формуле (25) и определению (40), имеем

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{Q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{\mathrm{P}}^+ = \hat{Q}_{\alpha\beta}(-\mathbf{x}). \tag{42}$$

При дискретном преобразовании обращения времени в силу (28),(29) и (40) получим соотношение

$$\hat{\mathrm{T}}\hat{Q}_{\alpha\beta}(\mathbf{x})\hat{\mathrm{T}}^+ = \hat{Q}^*_{\alpha\beta}(\mathbf{x}). \tag{43}$$

Формулы (42),(43) совместно с (25),(29) позволяют найти трансформационные соотношения при отражении координат и обращении времени для статистического оператора Гиббса:

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}}\hat{w}(Y_0, Y_\alpha, f_{\alpha\beta})(\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}})^+ = \hat{w}^*(Y_0, -Y_\alpha, f_{\alpha\beta}).$$

Видим, что характер преобразований равновесного статистического оператора существенно зависит от трансформационных свойств источника, нарушающего симметрию. В частности, при $Y_\alpha = 0$ статистический оператор четен относительно *TP*-преобразований.

$$\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}}\hat{w}(Y_0, f_{\alpha\beta})(\hat{\mathrm{P}}\hat{\mathrm{T}})^+ = \hat{w}^*(Y_0, f_{\alpha\beta}). \tag{44}$$

Соотношения (44),(24),(25),(28),(29) приводят к равенствам

$$\mathrm{Sp}\hat{w}(Y_0, f_{\alpha\beta})\hat{s}_\alpha(x) = 0, \qquad \mathrm{Sp}\hat{w}(Y_0, f_{\alpha\beta})\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) \neq 0.$$

Пять независимых компонент квадрупольного параметра порядка могут быть параметризованы соотношением

$$Q_{\alpha\beta}(x, \hat{w}) = Q(x, \hat{w})\left(e_\alpha(x, \hat{w})e_\beta(x, \hat{w}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right) +$$
$$+ Q'(x, \hat{w})\left(f_\alpha(x, \hat{w})f_\beta(x, \hat{w}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}\right).$$

Здесь Q и Q' — модули параметра порядка, и векторы $d_\alpha, e_\alpha, f_\alpha$ образуют ортонормированный репер:

$$\mathbf{de} = 0,\ \mathbf{df} = 0,\ \mathbf{ef} = 0,\ \mathbf{f}^2 = 1,\quad \mathbf{d}^2 = 1,\ \mathbf{e}^2 = 1,$$
$$\mathbf{e} \times \mathbf{f} = \mathbf{d},\quad \mathbf{f} \times \mathbf{d} = \mathbf{e},\quad \mathbf{d} \times \mathbf{e} = \mathbf{f}. \tag{45}$$

Нетрудно видеть, что введенные векторы удовлетворяют равенству

$$e_\alpha e_\beta + f_\alpha f_\beta + d_\alpha d_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \tag{46}$$

Определим генератор одноосной спиновой симметрии и двухосной спиновой симметрии равенствами

$$\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}) = \hat{S}_\alpha + \hat{S}^{\mathbf{e}}_\alpha, \tag{47}$$

$$\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \hat{S}_\alpha + \hat{S}^{\mathbf{e}}_\alpha + \hat{S}^{\mathbf{f}}_\alpha. \tag{48}$$

Эти операторы, как легко видеть, удовлетворяют равенствам

$$i[\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}), \hat{\Sigma}_\beta(\mathbf{e})] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma(\mathbf{e}),$$
$$i[\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{f}), \hat{\Sigma}_\beta(\mathbf{e}, \mathbf{f})] = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\Sigma}_\gamma(\mathbf{e}, \mathbf{f}).$$

Введем в рассмотрение генераторы ненарушенной симметрии в соответствии с формулами (18),(53),(54) для одноосного и двухосного случаев

$$\hat{T} \equiv b_\alpha \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}) = \hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{e}),$$
$$\hat{T} \equiv b_\alpha \hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e}, \mathbf{f}) = \hat{T}(\mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{f}). \qquad (49)$$

Заметим, кроме того, что для производных, связанных с единичными векторами e_α и f_α, справедливы соотношения

$$\frac{\partial e_u}{\partial e_v} = \frac{\partial f_u}{\partial f_v} \equiv \delta_{uv} - e_u e_v - f_u f_v = d_u d_v. \qquad (50)$$

Обратим внимание, что формулы (50) учитывают связи соотношений (45) для векторов e_α и f_α. Соотношения (50) справедливы, как мы увидим далее, для двухосных магнитных систем. Однако при рассмотрении одноосных магнитных сред, которые характеризуются одним спиновым вектором, связи типа (45) отсутствуют, и вместо формул (50) в этом случае справедливо соотношение

$$\frac{\partial e_u}{\partial e_v} = \delta_{uv} - e_u e_v \equiv \delta^{\perp}_{uv}(e). \qquad (51)$$

Условие ненарушенной симметрии (12) совместно с условием пространственной однородности (11) в соответствии с определениями (49) и алгебраическими соотношениями (41) приводит к уравнениям для одноосного случая:

$$b_\alpha \left\{ \varepsilon_{\alpha u\rho} Q_{\rho v} + \varepsilon_{\alpha v\rho} Q_{\rho u} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\beta \frac{\partial Q_{uv}}{\partial e_\gamma} \right\} = 0,$$
$$\nabla_k Q_{uv}(x) = 0. \qquad (52)$$

Для двухосного случая получим аналогичным образом уравнения

$$b_\alpha \left\{ \varepsilon_{\alpha u\rho} Q_{\rho v} + \varepsilon_{\alpha v\rho} Q_{\rho u} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} e_\beta \frac{\partial Q_{uv}}{\partial e_\gamma} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f_\beta \frac{\partial Q_{uv}}{\partial f_\gamma} \right\} = 0,$$
$$\nabla_k Q_{uv}(x) = 0. \qquad (53)$$

Очевидно, что решения уравнений (52) и (53) не зависят от координаты $Q_{uv}(x) = Q_{uv}(0) \equiv Q_{uv}$. Решение уравнения (53) ищем в виде

$$Q_{uv} = Q\left(e_u e_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right). \qquad (54)$$

Используя формулу (51), найдем

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial e_v} = Q(\delta^{\perp}_{\alpha v}(\mathbf{e}) e_\beta + e_\alpha \delta^{\perp}_{\beta v}(\mathbf{e})).$$

Подставляя эту формулу в уравнение (52), видим, что оно тождественно выполняется при всех значениях вектора **b**. Магнитные состояния с параметром порядка вида (54), следуя работе [21], называем одноосные спиновые нематики.

Перейдем к нахождению решения уравнения (53) и будем искать его в виде

$$Q_{uv} = Q\left(e_u e_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right) + Q'\left(f_u f_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right). \qquad (55)$$

Заметим, что, согласно (50), имеют место равенства

$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial e_v} = Q d_v (d_\alpha e_\beta + e_\alpha d_\beta),$$
$$\frac{\partial Q_{\alpha\beta}}{\partial f_v} = Q' d_v (d_\alpha f_\beta + d_\beta f_\alpha). \qquad (56)$$

Подставляя (56) и (57) в (54), получаем уравнение

$$b_\lambda \{ Q[\varepsilon_{\lambda\alpha\rho} e_\beta e_\rho + \varepsilon_{\lambda\beta\rho} e_\rho e_\alpha - f_\lambda (d_\alpha e_\beta + d_\beta e_\alpha)] +$$
$$+ Q'[\varepsilon_{\lambda\alpha\rho} f_\beta f_\rho + \varepsilon_{\lambda\beta\rho} f_\rho f_\alpha - e_\lambda (d_\beta f_\alpha + d_\alpha f_\beta)] \} = 0. \qquad (57)$$

Для установления допустимых значений вектора **b** ищем его в виде разложения по ортонормированному реперу

$$\mathbf{b} = \alpha \mathbf{e} + \beta \mathbf{f} + \gamma \mathbf{d}, \qquad (58)$$

где числа α, β, γ связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Подставляя (58) в (57), в результате получаем равенство

$$\gamma (Q - Q')(e_\beta f_\alpha + e_\alpha f_\beta) = 0. \qquad (59)$$

Отсюда следует, что при $Q \neq Q'$ параметр $\gamma = 0$. Это решение описывает двухосный спиновый нематик

$$Q_{uv} = Q\left(e_u e_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right) + Q'\left(f_u f_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right),$$

и вектор **b** имеет вид $b_\lambda = \alpha e_\lambda + \beta f_\lambda$, причем $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Другое решение получается из (59), если $Q = Q'$. В этом случае вектор **b** произволен. В силу соотношения (46) параметр порядка приобретает вид одноосного спинового нематика

$$Q_{uv} = -Q\left(d_u d_v - \frac{1}{3}\delta_{uv} \right).$$

В работе [22] получены нелинейные динамические уравнения для магнитной системы с квадрупольным параметром порядка:

$$\begin{cases} \dot{s}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(\dfrac{\delta H}{\delta s_\beta} s_\gamma + 2Q_{\mu\gamma}\dfrac{\delta H}{\delta f_{\mu\beta}}\right), \\ \dot{f}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta H}{\delta f_{\gamma\nu}}(\delta_{\gamma\beta}\varepsilon_{\nu\mu\alpha} + \delta_{\gamma\beta}\varepsilon_{\gamma\beta\mu})s_\mu + (\varepsilon_{\beta\gamma\rho}Q_{\alpha\rho} + \varepsilon_{\alpha\gamma\rho}Q_{\beta\rho})\dfrac{\delta H}{\delta s_\gamma}. \end{cases} \tag{60}$$

Не ограничивая общности, плотность энергии выберем в следующем виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\chi}s_\alpha^2 + \lambda s_\alpha Q_{\alpha\beta}s_\beta + \frac{1}{2}\mu Q_{\alpha\beta}^2. \tag{61}$$

Покажем, что найденные равновесные значения квадрупольного параметра порядка и спина соответствуют стационарному решению приведенных динамических уравнений (60). Действительно, зная вид плотности энергии (61), получим следующие равенства:

$$\left.\frac{\delta H}{\delta s_\alpha}\right|_{\mathbf{s}=0} = 0, \qquad \left.\frac{\delta H}{\delta f_{\alpha\beta}}\right|_{\mathbf{s}=0} = \mu f_{\alpha\beta}. \tag{62}$$

Подставляя выражения (62) в уравнения (60) и учитывая вид квадрупольного параметра порядка, легко убедиться, что выполняются равенства $\dot{s}_\alpha = 0, \dot{f}_{\alpha\beta} = 0$, соответствующие стационарному случаю.

6. Неоднородные состояния равновесия магнитных сред с квадрупольным параметром порядка

Обратимся теперь к неоднородным состояниям равновесия (см. формулу (18)). Операторы ненарушенной и пространственной симметрии имеют вид

$$\hat{T}(\mathbf{b},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f}) \equiv b_\alpha\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e},\mathbf{f}) + d_i\hat{P}_i,$$
$$\hat{P}_k(q,\mathbf{e},\mathbf{f}) \equiv \hat{P}_k - q_{k\alpha}\hat{\Sigma}_\alpha(\mathbf{e},\mathbf{f}). \tag{63}$$

Набор параметров генератора ненарушенной симметрии включает в себя векторы **b**, **d**, **e**, **f**. Так как для компонент оператора импульса справедливо соотношение $[\hat{P}_i, \hat{P}_k] = 0$, то потребуем, чтобы и для компонент генератора пространственной симметрии было справедливо аналогичное соотношение

$$[\hat{P}_k(q,\mathbf{e},\mathbf{f}), \hat{P}_k(q,\mathbf{e},\mathbf{f})] = 0. \tag{64}$$

Учитывая явный вид выражения (63), приходим к соотношению

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}q_{i\alpha}q_{k\beta} = 0,$$

которое выполняется, если тензор $q_{i\alpha}$ обладает структурой

$$q_{i\alpha} = q_i n_\alpha,$$

где q_i — вектор магнитной спирали и n_α — ось спиновой анизотропии. Подставляя последнее выражение в (63), получаем, согласно (64), соотношения, определяющие допустимый вид квадрупольного параметра порядка и вектора **b**:

$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, [\hat{T}(\mathbf{b},\mathbf{d},Y), \hat{P}_k(q,\mathbf{e},\mathbf{f})]]\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = 0,$$
$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{T}(\mathbf{b},\mathbf{d},Y)]\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = 0,$$
$$i\mathrm{Sp}[\hat{w}, \hat{P}_k(q,\mathbf{e},\mathbf{f})]\hat{Q}_{\alpha\beta}(x) = 0.$$

Используя далее квантовые скобки (41), приходим к уравнениям на структуру квадрупольного параметра порядка и допустимые значения вектора:

$$b_\alpha F_\alpha^{uv}(x) = 0, \quad (\mathbf{b}\times\mathbf{n})_\alpha F_\alpha^{uv}(x) = 0,$$
$$\nabla_k Q_{uv}(x) = q_k n_\alpha F_\alpha^{uv}(x), \tag{65}$$

где введено обозначение

$$F_\alpha^{uv}(x) = \varepsilon_{\alpha u\rho}Q_{\rho v}(x) + \varepsilon_{\alpha v\rho}Q_{\rho u}(x) +$$
$$+ \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}e_\beta\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial e_\gamma} + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}f_\beta\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial f_\gamma}.$$

Покажем, что решением системы уравнений (65) является следующий вид квадрупольного параметра порядка:

$$Q_{uv}(x) = Q\left(m_u(x)m_v(x) - \frac{1}{3}\delta_{uv}\right) +$$
$$+ Q'\left(l_u(x)l_v(x) - \frac{1}{3}\delta_{uv}\right), \tag{66}$$

где зависящие от координат векторы $\mathbf{m}(x)$ и $\mathbf{l}(x)$ определяются равенствами

$$\mathbf{m}(x) = \mathbf{e}\cos\varphi(x) + \mathbf{f}\sin\varphi(x),$$
$$\mathbf{l}(x) = -\mathbf{e}\sin\varphi(x) + \mathbf{f}\cos\varphi(x), \tag{67}$$
$$\varphi(x) = \varphi - \mathbf{qx}$$

и вектор **n** коллинеарен **d**. Начнем с проверки третьего соотношения в (65). В силу определения (67) векторы $\mathbf{m}(x)$ и $\mathbf{l}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\nabla_k m_u(x) = -q_k l_u(x), \qquad \nabla_k l_u(x) = q_k m_u(x).$$

Поэтому

$$\nabla_k Q_{uv}(x) = (Q' - Q)q_k(l_u(x)m_v(x) + l_v(x)m_u(x)). \tag{68}$$

С другой стороны, так как

$$\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial e_\gamma} = Qd_\gamma(d_u m_v(x)+d_v m_u(x))\cos\varphi(x) - Q'd_\gamma(d_u l_v(x)+d_v l_u(x))\sin\varphi(x),$$
$$\frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial f_\gamma} = Qd_\gamma(d_u m_v(x)+d_v m_u(x))\sin\varphi(x) - Q'd_\gamma(d_u l_v(x)+d_v l_u(x))\cos\varphi(x),$$

то

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left(e_\beta \frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial e_\gamma} + f_\beta \frac{\partial Q_{uv}(x)}{\partial f_\gamma}\right) = -Ql_\alpha(x)(d_u m_v(x)+d_v m_u(x)) + Q'm_\alpha(x)(d_u l_v(x)+d_v l_u(x)). \tag{69}$$

Кроме того, в силу (66) получим соотношение

$$\varepsilon_{\alpha u\rho}Q_{v\rho}(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}Q_{u\rho}(x) = Q(\varepsilon_{\alpha u\rho}m_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}m_u(x))m_\rho(x) + Q'l_\rho(x)(\varepsilon_{\alpha u\rho}l_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}l_u(x)). \tag{70}$$

Из соотношений (69),(70) найдем

$$F_\alpha^{uv}(x) = Q(\varepsilon_{\alpha u\rho}m_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}m_u(x))m_\rho(x) + Q'l_\rho(x)(\varepsilon_{\alpha u\rho}l_v(x)+\varepsilon_{\alpha v\rho}l_u(x)) - Ql_\alpha(x)(d_u m_v(x)+d_v m_u(x)) -$$
$$- Q'm_\alpha(x)(d_u l_v(x)+d_v l_u(x)).$$

Пусть разложение вектора **b** по ортонормированному реперу имеет вид:

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{f} + \gamma\mathbf{d}.$$

Нетрудно видеть, что имеют место равенства

$$F_\alpha^{uv}(x)e_\alpha = F_\alpha^{uv}(x)f_\alpha = 0,$$
$$F_\alpha^{uv}(x)d_\alpha = (Q'-Q)(l_u(x)m_v(x)+l_v(x)m_u(x)). \tag{71}$$

В силу формул (68),(71) видим, что все три уравнения (65) выполняются при $\gamma = 0$ и $Q \neq Q'$.

В одноосном случае, когда, например, $Q \neq 0$, $Q' = 0$, решение описывает магнитные состояния, которые, следуя работе [21], называем спиновыми холестериками. Вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{f}$ ортогонален спиновой оси **d**.

В двухосном случае, когда $Q \neq 0$, $Q' \neq 0$, $Q \neq Q'$, квадрупольный параметр порядка описывает магнитное состояние, которое представляет собой двойную магнитную спираль. Вектор $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{e} + \beta\mathbf{f}$ также ортогонален спиновой оси **d**.

Если $Q = Q'$, то вектор **b** произволен, и эта ситуация соответствует одноосному квадрупольному параметру порядка с магнитным состоянием спинового холестерика.

Заключение

В заключение отметим, что проблема фазовых переходов II рода, обычно рассматриваемая на основе феноменологических подходов, изначально модельно зависима. Представление о ненарушенной и пространственной симметрии состояния равновесия в рамках подхода Гиббса в сочетании с концепцией квазисредних позволяет сформулировать альтернативный подход, свободный от каких-либо модельных предположений. В работе проведена классификация состояний равновесия магнитных сред с векторным и тензорным параметрами порядка. Выяснена допустимая структура параметров порядка в состоянии равновесия и вид генераторов ненарушенной и пространственной симметрии.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-02-16663.

1. Л.Д. Ландау, Собрание трудов, Наука, Москва (1969), Т. 1.
2. V.P. Mineev, *Sov. Scient. Rev. Sec. A* **2**, 173 (1985).
3. F.W. Nijhoff, H.W. Capel, and A. den Breems, *Physica* **A130**, 375 (1985).
4. N.N. Bogoliubov, *Physica* **26**, 51 (1960).
5. А.И. Ахиезер, С.В. Пелетминский, *Методы статистической физики,* Наука, Москва (1977).
6. Н.Н. Боголюбов (мл.), М.Ю. Ковалевский, А.М. Курбатов, С.В. Пелетминский, А.Н. Тарасов, *УФН* **159**, вып. 4, 585 (1989).
7. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *ЭЧАЯ* **33**, 1357 (2002).
8. А.П. Ивашин, М.Ю. Ковалевский, Н.Н. Чеканова, *ФНТ* **30**, 920 (2004).
9. B.I. Halperin and P.C.Hohenberg, *Phys. Rev.* **188**, 898 (1969).
10. Д.В. Волков, А.А. Желтухин, Ю.П. Блиох, *ФТТ* **13**, 1668 (1971).
11. B.I. Halperin and W.M. Saslow, *Phys. Rev.* **B16**, 2154 (1977).
12. А.Ф. Андреев, В.И. Марченко, *УФН* **130**, 39 (1980).
13. I.E. Dzyaloshinskii and G.E.Volovick, *Ann. Phys.* **125**, 67 (1980).

14 В.Г. Барьяхтар, В.Г. Белых, Т.К. Соболева, *ТМФ* **77**, 311 (1988).

15. М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *ТМФ* **100**, 59 (1994).
16. T.A. Kaplan, *Phys. Rev.* **124**, 329 (1961).
17. В.Г. Барьяхтар, М.А. Савченко, Л.А. Шишкин, *ФТТ* **6**, 1435 (1964).
18. С.В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, Наука, Москва (1975).
19. И.Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **46**, 1420 (1964); *там же* **47**, 336 (1964).
20. Ю.А. Изюмов, *Дифракция нейтронов на длиннопериодических структурах*, Энергоатомиздат, Москва (1987).
21. А.Ф. Андреев, И.А. Грищук, *ЖЭТФ* **87**, 467 (1984).
22. А.А. Исаев, М.Ю. Ковалевский, С.В. Пелетминский, *ЭЧАЯ* **27**, 431 (1996).

Classification of equilibrium states of magnets with vector and quadrupole order parameters

D.A. Demyanenko and M.Yu. Kovalevsky

The classification of equilibrium states of magnetic condensed media, the symmetry of which is spontaneously broken relative to rotations in the spin space and translations in the configuration space, is carried out. The cases of vector and tensor order parameters are considered. The conditions of an unbroken symmetry and a spatial symmetry of the equilibrium states is formulated. The connection of these symmetry conditions with ferromagnetic, antiferromagnetic, ferrimagnetic and spiral magnetic states is found out for the case of vector order parameter. The connection of the above symmetry conditions with quadrupole magnetic states — uniaxial and biaxial magnetic nematics, magnetic cholesterics and dual spiral magnetic — is established.

PACS. 75.40.Cx Static properties (order parameter, static susceptibility, heat capacities, critical exponents,etc)

Keywords: magnets, phase conversions, order parameter, quasiaverages, symmetry, Gibbs distribution, spin nematic.