

УДК 535.39:531.715.1

**Ю. В. Корниенко, С. И. Скуратовский**Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова  
ул. Академика Проскуры 12, Харьков-85, 61085  
ss\_snake@ukr.net**Накопление фаз фурье-компонентов при наблюдении  
объекта сквозь турбулентную атмосферу. II**

*Детально рассматривается новый эффективный способ накопления фаз фурье-компонентов мгновенных изображений при наблюдении объекта сквозь турбулентную атмосферу, предложенный авторами ранее. Анализируются пределы возможностей метода и его преимущества.*

*НАКОПИЧЕННЯ ФАЗ ФУР'Є-КОМПОНЕНТІВ ПРИ СПОСТЕРЕЖЕННІ ОБ'ЄКТА КРІЗЬ ТУРБУЛЕНТНУ АТМОСФЕРУ. II, Корнієнко Ю. В., Скуратовський С. І. — Детально розглядається новий ефективний спосіб накопичення фаз фур'є-компонентів миттєвих зображень у випадку спостереження об'єкта крізь турбулентну атмосферу, запропонований авторами раніше. Аналізуються межі можливостей методу та його переваги.*

*THE ACCUMULATION OF FOURIER-COMPONENT PHASES IN CASE OF AN OBJECT OBSERVATION THROUGH A TURBULENT ATMOSPHERE. II, by Kornienko Yu. V., Skuratovskii S. I. We give a comprehensive consideration of our new efficient procedure for the accumulation of phases of instantaneous image fourier-components in case of an object observation through a turbulent atmosphere which was proposed before. The limits of the possibilities of the procedure and its advantages are analyzed.*

Последовательность мгновенных изображений астрономического объекта, полученная сквозь турбулентную атмосферу, несмотря на сильные искажения, содержит какую-то информацию об объекте. При

обработке этой последовательности задача состоит в максимальном извлечении из неё этой информации. Поскольку искажения и шум регистрации носят случайный характер, корректная постановка этой задачи состоит в том, чтобы найти оптимальную статистическую оценку изображения при данном результате наблюдения. Это называется байесовским статистическим подходом [2—4, 11].

Решить эту задачу в полной мере удаётся не всегда, и тогда стараются найти субоптимальный метод накопления сигнала, который по своим результатам приближался бы к оптимальному. Информация об изображении объекта состоит из информации о модулях его фурье-компонентов и о фазах. При слабых искажениях тонким слоем турбулентной среды найти приближённо оптимальную процедуру накопления нетрудно. Она состоит в арифметическом усреднении логарифмов фурье-компонент (т. е. фаз и логарифмов модулей) по последовательности изображений, поскольку искажения логарифмов распределены приближённо нормально и независимо. Хорошим приближением к ней является метод Содина [10] и Нокса и Томпсона [13] в сочетании с методом Лабейри [14]. Однако этот способ накопления сигнала эффективен только при малых значениях дисперсии атмосферных фазовых искажений.

В предыдущей нашей работе [8] было рассмотрено накопление фаз фурье-компонент мгновенных изображений при наблюдении объекта сквозь турбулентную атмосферу и предложен новый, более эффективный способ такого накопления. Данная работа посвящена более детальному рассмотрению этого метода, анализу пределов его возможностей и сравнению его с другими идеями, направленными на накопление фаз при таких наблюдениях.

## ПРЕДЫСТОРИЯ

Необходимость байесовского статистического подхода при обработке результатов физического эксперимента была обстоятельно рассмотрена в работе [11]. Применительно к изображениям, в частности астрономическим, ему была посвящена работа [4]. Понятие накопления сигнала, как временного, так и пространственного, при наблюдении сквозь турбулентную атмосферу, по-видимому, было впервые введено в работе [9]. Там же было введено понятие порядка накопления сигнала в режиме счёта фотонов и показано, что при наблюдении с помощью многолучевого интерферометра [9, 16] для получения информации о фазах фурье-компонентов требуется накопление как минимум третьего порядка (т. е. троек фотонов). Получаемая в результате такого накопления трёхточечная корреляционная функция (или в частотном представлении биспектр) позволяет без систематических ошибок найти фазы. В работе [15] было показано, что такой метод накопления эффективен и при наблюдении с помощью телескопа, хотя при этом

сопровождается систематическими ошибками, тем меньшими, чем слабее сигнал. Дальнейшие результаты в этом направлении получены в работах [12, 18].

Прямое накопление фаз в явном виде было предложено Л. Г. Со-диным в работе [10]. Такое накопление хорошо работает при малых атмосферных возмущениях фазы, имеющих место в дальнем ИК- и радиодиапазоне, но быстро перестаёт работать при их увеличении. Это обусловлено тем, что этот метод оперирует с аргументом комплексного фурье-компонента, т. е. с главным значением логарифма фурье-компонента вместо самого логарифма, являющегося многолистной функцией. Незадолго до этого Нокс и Томпсон [13] предложили свой метод «косвенного» накопления фаз, которое производится путём усреднения по времени не самих фаз, а их разностей между соседними фурье-компонентами. Эти разности во многих случаях остаются малыми, даже когда сами фазовые искажения не малы. Это позволяет усреднять их, не опасаясь встретиться с проблемой многозначности логарифма.

Оба эти метода, однако, не нашли в то время практического применения, по-видимому из-за недостаточного уровня вычислительной техники. Но, как будет показано ниже, трудность состояла не только в этом.

В работе [17] была предпринята попытка найти новый подход к этой задаче, но полученный результат по сути эквивалентен результату [10]. В работе [1] авторы, чтобы обойти несовершенство прямого усреднения фаз, предложили метод, который является синтезом методов [10] и [13]. Как и в методе [13], предлагается из фурье-образа кадра находить разности фаз, однако их не усреднять, а использовать для определения самого фазового поля, которое затем и подлежит усреднению. Эта простая идея натолкнулась на серьёзный подводный камень, который сами же авторы работы [1] и обнаружили: многозначность фазы таким путём скрыть не удаётся. Хотя фурье-образ конечного объекта является непрерывной функцией, из этого не следует то же для главного значения фазы фурье-компонента. В частотной плоскости можно найти замкнутый контур, вдоль которого приращение фазы отлично от нуля. Это не исключает возможности восстановления фурье-образа по полю разностей фаз, но ставит под сомнение осмысленность усреднения таких фазовых полей, когда в фазе может случайно появляться слагаемое  $2\pi k$  с произвольным целым  $k$ .

Мы независимо провели те же исследования и пришли к тому же результату.

В работе [7] была тщательно исследована эффективность усреднения полных фаз для колмогоровской атмосферы при разных значениях параметра Фрида. Было установлено, что эта процедура сохраняет высокую эффективность до больших значений отношения диаметра апертуры к параметру Фрида, чем процедура прямого усреднения фаз [10]. Однако при дальнейшем увеличении этого отношения или дис-

персии фазовых искажений в атмосфере она тоже постепенно теряет свою эффективность. Те же исследования с тем же результатом были выполнены в работе [8] для случая, когда атмосферные искажения фаз представляют собой стационарный гауссов процесс. Чтобы понять природу этого явления и найти пути борьбы с ним, требуется более детальный анализ предмета.

### ВЛИЯНИЕ НАКЛОНА ВОЛНОВОГО ФРОНТА НА РАБОТУ ТЕЛЕСКОПА

Как известно [5], пространственно-частотная характеристика  $\tilde{G}(k_x, k_y)$  системы телескоп — атмосфера (фурье-образ мгновенного ядра) имеет вид

$$\tilde{G}(k_x, k_y) = A^*(-k_x, -k_y)A(k_x, k_y) d d, \quad (1)$$

где  $A(k_x, k_y)$  — частотная характеристика системы для когерентного света,  $k_x, k_y$  — декартовы координаты в апертурной плоскости телескопа. В случае тонкого неоднородного слоя, расположенного непосредственно вблизи телескопа, выражение (1) принимает вид

$$\tilde{G}(k_x, k_y) = a(-k_x, -k_y) \exp[i \phi(-k_x, -k_y)] a(k_x, k_y) \exp[i \phi(k_x, k_y)] d d, \quad (2)$$

где  $a(k_x, k_y)$  — апертурная функция телескопа, равная единице на апертуре и нулю за её пределами, а  $\phi(k_x, k_y)$  — поле атмосферных искажений фазы световой волны, приходящей от объекта. Видно, что работа телескопа основана на интерференции световых потоков от разных частей апертуры, а влияние атмосферы состоит в искажении этой интерференционной картины. Анализ влияния атмосферы и возможности его исключения из результатов наблюдения удобно вести на примере простейшей оптической системы такого рода — интерферометра Физо — Майкельсона с диаметром  $d$  субапертур и расстоянием  $L$  между ними. Обе субапертуры формируют в начале координат фокальной плоскости световые пятна (дифракционные изображения точки), одинаковые по распределению интенсивности, но отличающиеся по распределению фаз. При их сложении образуется интерференционная картина в виде системы полос, которая и используется для измерений. Атмосферные неоднородности порождают случайный сдвиг фаз между субапертурами, приводящий к смещению системы полос. При естественных предположениях о статистике атмосферных неоднородностей математическое ожидание величины этого сдвига равно нулю, а дисперсия конечна. Это позволяет частично устранить влияние атмосферы усреднением фазы системы полос по времени. Именно эту работу выполняет зрительный аппарат наблюдателя при визуальных наблюдениях с помощью интерферометра Физо — Майкельсона таких объектов, как двойная звезда.

При таком рассмотрении обычно считается, что атмосферное искажение фазы в пределах субапертуры не зависит от координат. С ухудшением атмосферы такое предположение становится неприменимым. Учесть зависимость в низшем приближении можно, считая, что волновой фронт остаётся плоским, но претерпевает наклон. Величина этого наклона по порядку составляет  $h/d$ , где  $h = \lambda/(2\theta)$ , — набег фазы на диаметре субапертуры. Результатом этого наклона является смещение пятна относительно начала координат на величину  $hF/d$ , где  $F$  — фокусное расстояние интерферометра. Если теперь учесть, что диаметр дифракционного пятна в фокальной плоскости составляет  $F/d$ , получается, что величина смещения пятна достигает его диаметра при  $h = \lambda$ , а при больших  $h$  превышает его. При большой базе интерферометра дрожание пятен будет статистически независимым, и вероятность их совмещения станет малой. Это приведёт к исчезновению интерференции между световыми потоками и потере информации о фазовых соотношениях между ними.

Эти соображения можно применить и к телескопу, мысленно выделяя на его апертуре две субапертуры. Расстояние между ними зависит от рассматриваемой пространственной частоты, а диаметр определяется произволом исследователя. Если поле фазовых искажений представляет собой стационарный гауссов процесс, максимальный диаметр субапертуры, на которой фазовый фронт можно условно считать плоским, составляет величину порядка радиуса корреляции, т. е. размера неоднородностей  $l$ . Это приводит к выводу, что критическое значение среднего квадратичного фазового искажения составляет  $2\pi l$ . Превышение этой величины приводит к быстрой потере фазовой информации и невозможности эффективной реконструкции изображения. Заметим, что этот вывод относится к механизму формирования изображения, а не к процедуре накопления фаз, и потому справедлив при любом способе такого накопления.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РАССМАТРИВАЕМОЙ ЗАДАЧИ

Простые соображения, приведенные в предыдущем пункте, в значительной мере объясняют с физической точки зрения причину неудач, которые постигают нас при увеличении дисперсии атмосферных фазовых искажений. Однако хотелось бы посмотреть на эту проблему с математической стороны, чтобы понять, почему всё-таки перестаёт работать процедура усреднения, которая, казалось бы, должна работать всегда. Это и будет предметом дальнейшего исследования.

Поле атмосферных искажений фазы  $(\phi(x, y))$  является вещественной функцией  $\phi(x, y)$ , определённой на апертуре телескопа. Вся совокупность таких функций образует гильбертово пространство  $H$ , вместо которого для упрощения можно рассматривать конечномерное пространство, размерность которого равна числу независимых точек от-

счёта функции  $(k_x, k_y)$ , т. е. числу атмосферных неоднородностей на апертуре телескопа.

Рассмотрим некоторый фурье-компонент  $J(k)$  искажённого изображения для некоторой фиксированной пространственной частоты  $k$ . Его значение, как это следует из (2), зависит от поля  $a(k_x, k_y)$ , т. е. от значений  $(k_x, k_y)$  во всех точках  $(x, y)$  апертуры телескопа. Таким образом, она оказывается значением функционала, определённого на пространстве  $H$  равенством (2). Важным моментом для дальнейшего здесь является тот факт, что фурье-компонент зависит не от  $(k_x, k_y)$  в какой-то определённой точке апертуры, а от всей совокупности значений  $a(k_x, k_y)$ .

Дальше нас будет интересовать фаза этого фурье-компонента, т. е. его аргумент  $\arg[J(k)]$ , являющийся мнимой частью главного значения логарифма фурье-компонента  $\ln[J(k)]$ . Областью изменения  $\arg[J(k)]$  является сегмент  $[-\pi, +\pi]$ , включающий концы. При этом концы интервала отождествляются, т. е. значения  $-\pi$  и  $+\pi$  рассматриваются как тождественные. Будем здесь называть такой интервал окружностью и обозначать через  $C$ . Функционал

$$(k) \operatorname{Im} \ln a(-k_x, -k_y)$$

$$\exp[i \operatorname{Im} \ln a(k_x, k_y)] a(k_x, k_y) \exp[i \operatorname{Re} \ln a(k_x, k_y)] d k_x d k_y, \quad (3)$$

определённый на пространстве  $H$  и принимающий значения на окружности  $C$ , является непрерывным. Он непосредственно определяет влияние поля фазовых искажений на фазу фурье-компонента, которое количественно выражается равенством (1). Понимание этой картины помогает ответить на вопрос о статистических свойствах атмосферного шума, которые нужно знать, чтобы найти оптимальный способ накопления сигнала. Строгое решение задачи об оптимальном накоплении сигнала основано на байесовской оценке [3] невозмущённой фазы по последовательности её возмущённых значений. В широком классе случаев решение этой задачи состоит в арифметическом усреднении членов последовательности. На этом и основаны наши действия по накоплению фаз фурье-компонентов. Задачу строгого отыскания процедуры оптимального накопления сигнала мы в этой работе не ставим. Однако практический успех, достигнутый в компьютерном эксперименте, оправдывает такие действия.

Положение, однако, изменяется при увеличении дисперсии атмосферных искажений фазы. Когда ширина распределения фазовых искажений по порядку величины достигает 2, начинает проявляться то решающее обстоятельство, что топологическое пространство, в котором принимает свои значения возмущённая фаза, т. е. окружность  $C$ , отличается от привычной для нас вещественной оси, на которой обычное усреднение является естественным способом накопления. Это приводит к другому поведению распределений вероятности интересующих нас величин и требует других действий для оптимального накопления сигнала.



При неограниченном увеличении атмосферных искажений возмущённые фазы, определённые на вещественной оси, были бы распределены нормально со всё большей дисперсией. Однако распределение фаз, определённых на окружности, при этом неограниченно приближается к равномерному. Это обстоятельство можно игнорировать, пока среднее квадратичное значение фазового искажения мало по сравнению с  $2\pi$ , так как при этом плотность вероятности значений  $\varphi$  пренебрежимо мала, и сегмент  $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$  при практических расчётах не отличается от всей вещественной оси.

Однако с увеличением дисперсии фазовых искажений картина изменяется. Пусть вектору  $\varphi_0$  пространства  $H$  в силу соотношения (3) соответствует значение фазы фурье-компонента  $J(k)$ , равное  $\varphi_0$ . Пусть вектор  $\varphi$ , изменяясь, описывает в пространстве  $H$  непрерывный несамопересекающийся контур, который начинается и кончается в точке  $\varphi_0$ . Каким будет конечное значение  $\varphi$ ? В силу непрерывности функционала (3) можно не сомневаться, что конечное значение  $J(k)$  не будет отличаться от начального. Но при этом конечное значение фазы может быть отличным от начального на величину  $2\pi n$ , где  $n$  — любое целое число. Это не нарушает непрерывности зависимости  $\varphi$  от  $t$ , поскольку на окружности  $C$  значения  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi n$  эквивалентны, но придает процедуре арифметического усреднения лишь условный смысл, поскольку сложение главных значений отличается от сложения вещественных чисел: например  $\pi + \pi$  эквивалентно нулю.

Суть ситуации, таким образом, состоит в следующем. При данной топологии задачи неприменимы наши обычные представления о накоплении сигнала путём усреднения. В случае малой дисперсии атмосферных искажений обычные представления справедливы с некоторой степенью условности и с большой вероятностью приводят к успеху. С увеличением дисперсии эта вероятность снижается, и при дисперсии порядка  $(2\pi)^2$  предлагаемая процедура накопления перестает работать. Это является свойством задачи, а не процедуры. Другие возможные варианты процедуры накопления должны давать такой же результат. Это утверждение было объектом проверки в описанных ниже компьютерных экспериментах.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАКОПЛЕНИЯ ФАЗ НА КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ

Целью этого исследования является качественная экспериментальная проверка представлений, изложенных в двух предыдущих пунктах. Ставились две связанных между собой задачи. Первая состояла в уточнении зависимости степени успеха реконструкции изображения от значений показателей состояния атмосферы. Вторая состояла в сравнении эффективности нашего метода реконструкции (накопления полных фаз) и метода Нокса и Томпсона (накопления разностей фаз).

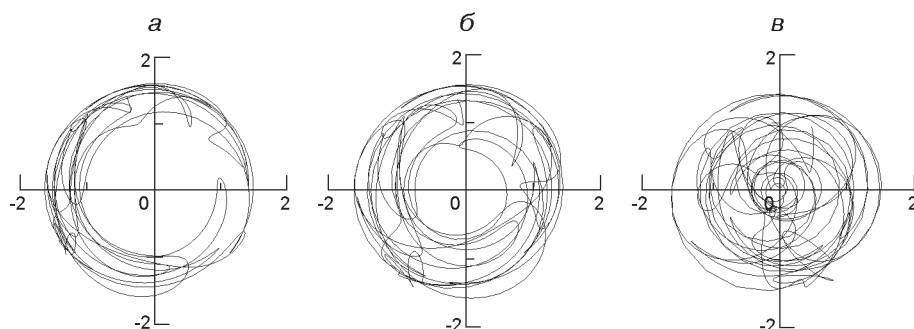


Рис. 1. Траектории изменения одной пространственной частоты для  $q = 1$  (а), 2 (б) и 6 (в)

Для исследований была использована система моделирования, кратко обрисованная в нашей предыдущей работе [8] и в [6]. С её помощью генерировалась последовательность изображений объекта, моделирующая результат наблюдения. При этом можно было задавать желаемую дисперсию фазовых искажений и их корреляционные свойства в пространстве и во времени. После формирования изображения к нему добавлялся стационарный гауссов шум регистрации. Задача обстоятельного исследования влияния этого шума в данной работе не ставилась, поэтому в экспериментах задавалось только три значения отношения шум/сигнал: 0, 0.001 и 0.01. Полученная таким образом последовательность, моделирующая результат наблюдения, использовалась как исходная для реконструкции изображения с дифракционным разрешением телескопа. Успех реконструкции оценивался визуально и по среднему квадратичному отклонению результата от истинного изображения.

Реконструкция изображения осуществлялась двумя методами: нашим методом [7, 8] и методом Нокса и Томпсона [13].

Как и прежде, генерируемая последовательность обычно содержала 1000 изображений. Скорость съёмки обеспечивала интервал времени между кадрами в  $1/20$  времени заморозки атмосферы. Одна и та же последовательность обрабатывалась обоими методами; результат реконструкции сохранялся для последующего анализа.

При необходимости во время обработки строились траектории отдельных фурье-компонентов на комплексной плоскости. Примеры таких траекторий приведены в работе [8] и на рис. 1. Была установлена чёткая связь между видом таких траекторий и степенью успеха при реконструкции. Реконструкция оказывается удачной, если эти траектории проходят вдали от нуля, что бывает при не слишком больших значениях среднего квадратичного фазового отклонения  $q$ . Это условие нарушается при  $q > 2$ .

Ниже кратко излагаются результаты применения каждого из методов, а затем производится сравнение полученных результатов.



## МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ПОЛНЫХ ФАЗ

Обработка последовательности производилась так же, как и в работе [8]. Для накопления фаз создавался массив полных фаз  $F$  и массив средних значений  $M$ . Каждый компонент соответствовал своей пространственной частоте  $k$ . Перед началом накопления компоненты массива  $M$  устанавливались в ноль, а компонентам  $F$  придавались значения  $\arg[J_1(k)]$ . Затем по порядку перебирались все кадры исходной последовательности, и для каждого из них выполнялся очередной шаг накопления. Для каждого фурье-компонента  $i$ -го изображения он включал в себя следующие действия. Сначала производилось отслеживание фазы, т. е. определение слагаемого  $2\pi n$ , которое нужно прибавить к текущему значению  $\arg[J_i(k)]$ , чтобы получить наиболее вероятное значение полной фазы. Выбор производился по условию, чтобы текущая полная фаза наименее отличалась от её значения в предыдущем кадре. Эти значения запоминались в массиве  $F$  и прибавлялись к элементам массива  $M$ . По завершении этого процесса в массиве  $M$  получались суммы полных фаз для каждой пространственной частоты по всей последовательности кадров. Деля эти суммы на число кадров в последовательности, мы получали массив средних значений полных фаз, который использовался для реконструкции изображения вместе с массивом модулей, накопленных параллельно с накоплением фаз.

Поскольку математическое ожидание атмосферного искажения фазы равно нулю, этого же можно ожидать и для искажения фазы фурье-компонента изображения. Тогда усреднение должно давать значение фазы, более близкое к истинному значению, чем отдельные значения в последовательности. Именно это и имело место в эксперименте при небольших значениях  $q$ . Однако при больших его значениях попытки накопления фаз терпели неудачу. Граница между «небольшими» и «большими» значениями лежала в области  $2\pi$ . Это согласуется с теоретическими соображениями, изложенными выше. Ухудшение результата при увеличении происходило постепенно. Тщательное исследование происходящего при накоплении сигнала для случая  $q = 2$  открыло следующую картину. При накоплении фазы время от времени возникают сбои, приводящие к неправильному результату накопления. Они бывают двоякого рода. Первый тип сбоев связан с нарушением отслеживания полной фазы, когда из-за слишком большого интервала между кадрами фаза успевает измениться настолько, что процедура отслеживания перестает справляться со своей задачей. С такими сбоями можно бороться путём увеличения частоты кадров при съёмке.

Второй тип сбоев имеет более тонкий и коварный характер. Такие сбои имеют место, когда траектория фурье-компонента проходит вблизи нуля. Тогда она может обойти нуль как слева, так и справа. Результирующие значения полной фазы (после прохождения мимо нуля) при этом отличаются на  $2\pi$ . Нам удалось заметить две траектории

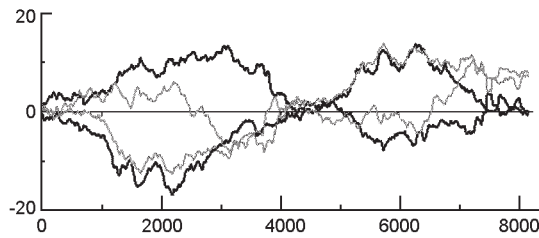


Рис. 2. Изменение отслеженной фазы при условии, что исходная изменялась по замкнутому контуру: чёрные линии — случаи, когда фаза вернулась к исходной, серые линии — когда фаза изменилась на  $2\pi k$

для близких пространственных частот обходили нуль с разных сторон. Если эти фурье-компоненты первоначально имели мало отличающиеся фазы, то после прохождения нуля их полные фазы отличались на величину, близкую к  $2\pi$ . Если это происходило в середине последовательности, средние значения полной фазы получались существенно разными, хотя должны были мало отличаться.

Рис. 2 иллюстрирует подобную ситуацию. На нём приведены графики изменения отслеженной полной фазы для четырёх фурье-компонентов при условии, что исходная фаза этих фурье-компонентов изменялась по замкнутому контуру. Таким образом, в конце отслеживания фаза должна была вернуться к тому же значению, с которого отслеживание начиналось. Для фазы двух фурье-компонентов это справедливо (чёрные графики на рис. 2), но фаза двух других фурье-компонентов к концу отслеживания претерпели изменение на  $2\pi n$  (серые графики на рис. 2).

При небольших  $q$  такие явления маловероятны. Искажение нескольких фурье-компонентов не окажет большого влияния на реконструированное изображение. Однако с увеличением  $q$  эта вероятность увеличивается. Когда этим искажением затронута значительная часть фурье-образа, реконструкция изображения терпит неудачу.

Вряд ли против этого явления можно найти способ борьбы, потому что оно имеет слишком глубокие корни. В его основе лежит тот факт, что понятие полной фазы фурье-компонента и её усреднения в общем случае не имеет строгого смысла и применимо к данной задаче лишь условно, в определённых границах.

Тем не менее при  $q < 2$  нам удавалось успешно реконструировать изображение — конечно, с постепенным ухудшением результата при увеличении  $q$ . Возник вопрос о работоспособности в подобной ситуации других методов. Поэтому была предпринята серия экспериментов с методом Нокса и Томпсона, описанная ниже.

## МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ РАЗНОСТЕЙ ФАЗ

Первоначально этот метод был рассчитан на реализацию с помощью когерентно-оптической техники. Поэтому вместо прямого вычисления логарифма фурье-компонента в нём производилось умножение каждого фурье-компонента на комплексно сопряжённое значение компонента фурье-образа, сдвинутого на один элемент по вертикали

или по горизонтали. Затем вычислялись массивы разностей фаз соседних фурье-компонентов по вертикали и горизонтали. При таком способе вычисления все разности лежали в интервале  $[-\pi, +\pi]$ .

Поля этих разностей усреднялись по последовательности кадров. После этого вычислялись фазы путём суммирования разностей. Суммирование производилось вдоль горизонтальных строк массива, а в качестве начальных значений брался результат суммирования разностей вдоль нулевого вертикального столбца. Полученное таким образом поле фаз использовалось для формирования изображения.

Анализ метода показывает, что по своей математической сущности он весьма близок к методу накопления полных фаз. Поэтому можно было ожидать, что и по эффективности эти методы будут отличаться мало. К числу отличий между ними относится то обстоятельство, что метод Нокса и Томпсона должен одинаково хорошо работать как для коррелированной, так и для некоррелированной последовательности кадров, что имеет значение при наблюдении слабых объектов, в изображениях которых сильно выражена квантовая структура, требующая увеличения времени экспозиции.

Более детальный анализ метода накопления разностей фаз, равно как и экспериментальное исследование, показывает, что трудности, связанные со свойством области значений фаз фурье-компонентов, не удаётся обойти и в методе Нокса и Томпсона. Однако рамки статьи не позволяют подробно остановиться на этом вопросе.

## СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Как и можно было ожидать из теоретических соображений, при малых  $q$  оба метода дают примерно одинаковые результаты. При увеличении  $q$  по мере приближения к границе области применимости эффективность обоих методов постепенно снижается и теряется полностью в области значений  $q > 2$ . Однако в отсутствие шума регистрации эффективность метода усреднения разностей фаз снижается несколько медленнее, чем нашего. Есть небольшая область значений  $q$ , для которых метод Нокса и Томпсона ещё даёт какой-то результат, в то время как метод накопления полных фаз уже перестаёт работать.

Однако картина существенно изменяется, когда в игру вступает шум регистрации. Примерно до  $\sigma = 0.003$  (в условиях эксперимента) метод Нокса и Томпсона сохраняет своё преимущество, но при больших значениях он теряет эффективность с увеличением быстрее, чем метод накопления полных фаз.

Рис. 3 иллюстрирует эту картину. Уже при  $q = 1$  метод усреднения разностей фаз, имея некоторое преимущество при  $\sigma = 0.001$ , существенно проигрывает при  $\sigma = 0.01$ . При  $q = 2$  метод Нокса и Томпсона, сохраняя своё преимущество в случае  $\sigma = 0.001$ , фактически перестаёт работать при  $\sigma = 0.01$ . В то же время метод накопления полных фаз сохраняет часть своих возможностей даже при  $q = 5$ .

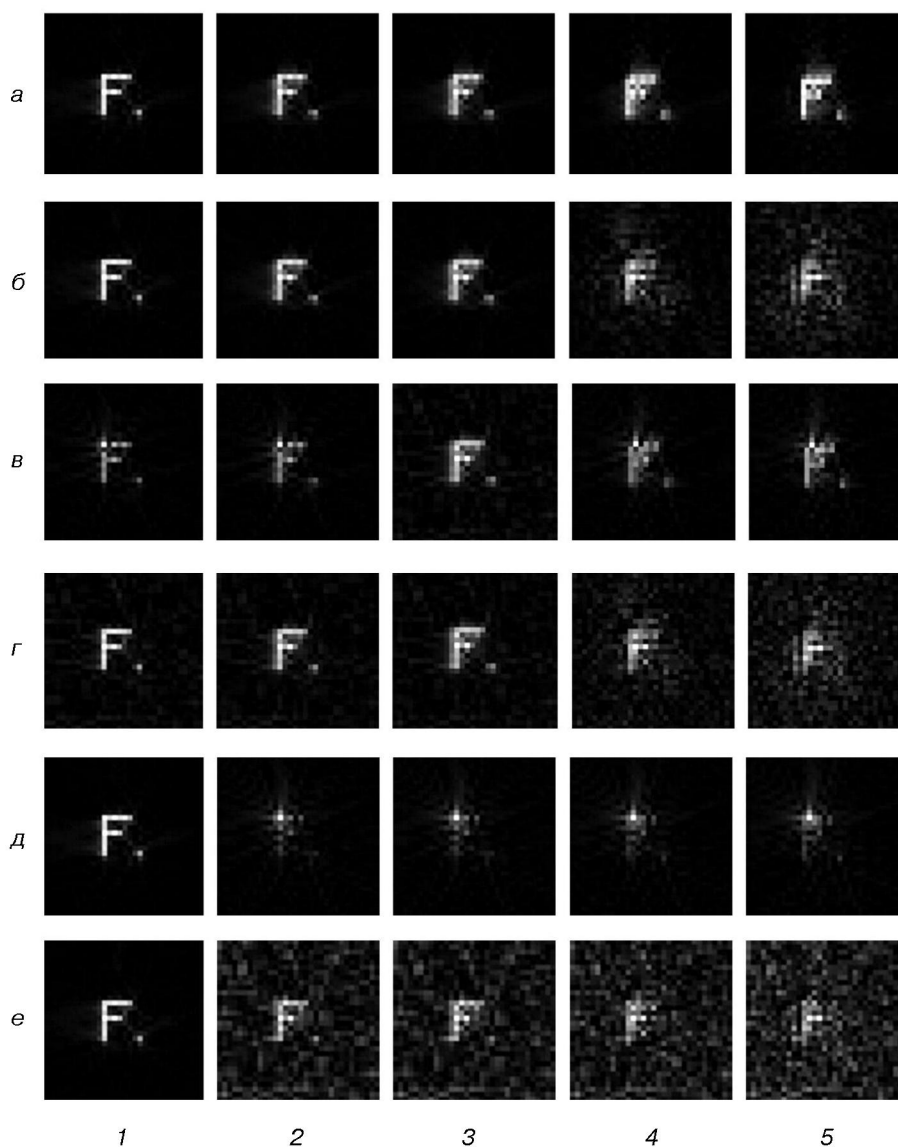


Рис. 3. Реконструкция неискажённого изображения объекта по серии из 1000 короткоэкспозиционных изображений с применением накопления разностей фаз (метод Нокса и Томпсона) (*а, в, д*) и накопления полной фазы (*б, з, е*) при различных параметрах атмосферы ( $D/l=2$ ;  $1 - q=1$ ;  $2 - q=2.5$ ;  $3 - q=3$ ;  $4 - q=5$ ;  $5 - q=2$ ) и величине шума регистрации (*а, б* — ОСШ=1000; *в, з* — ОСШ = 300; *д, е* — ОСШ = 100)

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе выводов, которые следует сделать из результатов данной работы, должно лежать понимание того, что с помощью самой совершенной обработки из последовательности изображений можно извлечь только ту информацию, которая в ней содержится. Неудачи, которыми иногда заканчиваются попытки реконструировать изображение, могут быть обусловлены как несовершенством метода рекон-

струкции, так и недостатком необходимой информации в исходной последовательности. Роль последнего фактора неуклонно увеличивается с увеличением  $q$ . В конце этого пути мы имеем дело с рубежом, который уже нельзя преодолеть путём усовершенствования метода реконструкции. Тогда на смену приходит другая задача: понять происхождение этого рубежа и выяснить возможность обходных путей. Первой части этой задачи и посвящена данная работа, результаты которой, на наш взгляд, разъясняют, в чём состоит этот рубеж и откуда он возникает. Второй части этой задачи — поиску обходных путей — будут посвящены наши следующие работы.

1. Бакут П. А., Куклин Е. Н., Ряхин А. Д. и др. Сравнительный анализ методов восстановления фазы пространственного спектра астрономического объекта по серии искажённых атмосферой короткоэкспозиционных изображений // Оптика и спектроскопия.—1985.—**58**, № 6.—С. 1314—1317.
2. Вальд А. Статистические решающие функции // Позиционные игры. — М.: Наука, 1967.—С. 300—522.
3. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. — М.: Мир, 1974.—491 с.
4. Корниенко Ю. В. Статистический подход к фильтрации и информативность изображения // Радиофизика и электроника.—2005.—**10**, спецвыпуск.—С. 652—676.
5. Корниенко Ю. В. Проблема углового разрешения при наблюдении астрономических объектов сквозь атмосферу // 200 лет астрономии в Харьковском университете / Под ред. проф. Ю. Г. Шкуратова. — Харьков: ХНУ, 2008.—С. 353—379.
6. Корниенко Ю. В. Обработка изображений в ИРЭ НАНУ // Радиофизика и электроника.—2008.—**13**, спецвыпуск.—С. 423—445.
7. Корниенко Ю. В., Скуратовский С. И. О реконструкции неискажённого изображения объекта по серии его изображений, искажённых средой со случайными неоднородностями показателя преломления // Доп. НАН Украины.—2010.—№ 2.—С. 83—89.
8. Корниенко Ю. В., Скуратовский С. И. Накопление фаз фурье-компонент при наблюдении сквозь турбулентную атмосферу // Кинематика и физика небес. тел.—2011.—**27**, № 6.—С. 52—63.
9. Корниенко Ю. В., Уваров В. Н. Накопление сигнала при наблюдении астрономического объекта сквозь турбулентную атмосферу // Докл. АН УССР. Сер. А.—1987.—№ 4.—С. 60—63.
10. Содин Л. Г. О возможности достижения дифракционного предела разрешения при работе телескопа в турбулентной атмосфере // Письма в астрон. журн.—1976.—**2**.—С. 554—558.
11. Турчин В. Ф., Козлов В. П., Малкевич М. С. Использование методов математической статистики для решения некорректных задач // Успехи физ. наук.—1970.—**202**, вып. 3.—С. 345—386.
12. Glindemann A., Lane R. G., Dainty J. C. Bispectral parameter estimation using least-squares // ESO Conf. on high-resolution imaging by interferometry II. 1991. N 6, pt. 1.—P. 243.
13. Knox K. T., Thompson B. J. Recovery of images from atmospherically degraded short exposure images // Astrophys. J.—1974.—**193**.—P. L45—L48.
14. Labeyrie A. Attainment of diffraction limited resolution in large telescopes by fourier

- analysing speckle patterns in star images // *Astron. and Astrophys.*—1970.—**6**, N 1.—P. 85—87.
15. *Lohmann A. W.* A new algorithm for signal and image recovery from triple correlations // *Optic.*—1986.—**72**, N 4.—P. 171—172.
16. *Roddier F.* Redundant versus nonredundant beam recombination in an aperture synthesis with coherent optical arrays // *J. Opt. Soc. Amer. Ser. A.*—1987.—**4**, N 8.—P. 1396—1401.
17. *Swan H. W.* Phase averaging of image ensembles by using cepstral gradients // *J. Opt. Soc. Amer.*—1983.—**73**, N 11.—P. 1488—1492.
18. *Tyler D. W., Schulze K. J.* Fast phase spectrum estimation using the parallel part-bispectrum algorithm // *Publs Astron. Soc. Pacif.*—2004.—**116**.—P. 65—76.

Поступила в редакцию 15.02.11