УДК 539.3

М. В. Марчук

ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНЕ ПОПЕРЕЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПОДАТЛИВОЇ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНОГО СТИСНЕННЯ ПЛАСТИНИ-СМУГИ

Наведено рівняння уточненої теорії геометрично нелінійного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення пластин. Отримано в замкненому вигляді розв'язок задачі про поперечне деформування жорстко защемленої на торцях пластини-смуги за дії рівномірно розподіленого навантаження. Проведено аналіз впливу параметра податливості до стиснення на її деформативність.

Пружні гнучкі пластини знаходять достатньо широке застосування як навантажені конструктивні елементи споруд, механізмів і різноманітних технічних засобів [1]. Характерною особливістю їхнього деформування є здатність витримувати значні прогини, які співмірні з товщиною. Дослідженню таких пластин на основі співвідношень нелінійної класичної теорії Кармана, а також різноманітних варіантів теорій, що базуються на зсувній моделі С. П. Тимошенка, присвячена значна кількість праць, зокрема [1–4, 6–9]. Перший підхід дозволяє враховувати лише анізотропію пружних властивостей матеріалу пластини в її серединній площині, а другий – ще й податливість до трансверсальних зсувів. Однак більшість сучасних композитних матеріалів значною мірою є податлива до трансверсального стиснення [5]. У пропонованій праці на основі отриманого аналітичного розв'язку задачі геометрично нелінійного згину жорстко защемленої уздовж видовжених сторін композитної пластини-смуги досліджено вплив параметра податливості до трансверсального стиснення на її деформативність.

Постановка задачі. Прямокутну пластину, одна із сторін якої має значно більший розмір від нормальної до неї, прийнято називати пластиною-смугою. Якщо навантаження на таку пластину не залежить від координати вздовж більшої сторони, то тоді через незначний вплив умов закріплення коротких країв функції, через які визначаються характеристики геометрично нелінійного напружено-деформованого стану в площині серединного перерізу (рис. 1), залежить лише від координати x. Для відшукання цих функцій маємо [5]

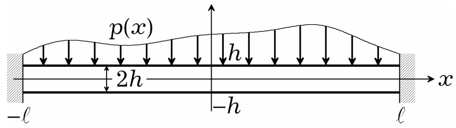

Рис. 1

– рівняння рівноваги:

$$N' = 0, \qquad M' - Q = 0, \qquad \frac{d}{dx}(Nw' + Q) = p(x)\,; \tag{1}$$

– співвідношення пружності:

$$N = \bar{B}\,e_1^0, \qquad M = \bar{D}\,\bar{e}_1^1, \qquad Q = \Lambda\, e_{13}^0\,; \tag{2}$$

– деформаційні співвідношення:

$$e_1^0 = u' + \frac{1}{2}(w')^2, \qquad \bar{e}_1^{\,1} = \frac{e_1^1}{h} = \gamma', \qquad e_{13}^0 = \frac{1}{2}(\gamma + w')\,. \tag{3}$$

Тут використано загальноприйняті позначення для узагальнених зусиль і переміщень: N – погонна величина розтягувального зусилля в серединній площині вздовж координати x; M – погонна величина згинного моменту; Q – погонне перерізувальне зусилля; $p(x)$ – розподілене нормальне навантаження на верхній лицевій поверхні; u – тангенціальне переміщення точок серединної площини вздовж координати x; γ – кут повороту нормального перед деформуванням до серединної площини елемента; w – поперечне переміщення точок серединної площини; $\bar{B} = 2Eh(1+\alpha)/(1-\nu^2)$

– узагальнена жорсткість у напрямку координати x; $\bar{D} = h^2\bar{B}/3$ – узагальнена згинна жорсткість пластини-смуги; $\Lambda = 2k'hG'$ – зсувна жорсткість пластини-смуги; $\alpha = \dfrac{(1+\nu)(\nu')^2}{1-\nu-2\nu\nu'}\dfrac{E}{E'}$; E, ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних до неї площинах; E', ν' – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної; G' – трансверсальний модуль зсуву; $2h$ – товщина пластини-смуги; $k' = 14/15$; штрих над символом функції означає похідну за x.

Граничні умови на видовжених торцях пластини-смуги $x = \pm\ell$ у випадку їх жорсткого защемлення мають вигляд

$$u(\pm\ell) = 0, \qquad \gamma(\pm\ell) = 0, \qquad w(\pm\ell) = 0. \tag{4}$$

Почергова підстановка $(3) \to (2) \to (1)$ приводить до системи трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку кожне, два з яких мають степеневу нелінійність:

$$\frac{d}{dx}\left\{\bar{B}\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]\right\} = 0, \qquad \bar{D}\gamma'' - \Lambda(\gamma + w') = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\bar{B}\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]w' + \Lambda(\gamma + w')\right\} = p(x). \tag{5}$$

Двоточкова задача (5), (4) є математичною моделлю, що описує геометрично нелінійний напружено-деформований стан жорстко защемленої по краях пластини-смуги, матеріал якої податливий до трансверсальних деформацій зсуву та стиснення. Причому податливість до поперечного стиснення у такій моделі деформування враховується неявно через коефіцієнт α, що залежить від трансверсальних характеристик E' та ν', і який входить у вирази для узагальнених жорсткісних характеристик $\bar{B}$ і $\bar{D}$ пластини-смуги.

Відшукання розв'язку двоточкової задачі. З першого з рівнянь рівноваги системи (1) шляхом інтегрування отримаємо

$$N = N_0 = \text{const}, \tag{6}$$

тобто розтягувальне зусилля (а відповідно й розтягувальне напруження $\sigma_0 = N_0/(2h)$ у серединній площині) в пластині для розглядуваного випадку є сталою величиною. З урахуванням (6) із двох останніх рівнянь (5) отримуємо розв'язувальне рівняння на функцію прогину w:

$$w^{IV} - \lambda_1^2 w^{II} = -\frac{p_1}{\bar{D}}, \tag{7}$$

де $\lambda_1^2 = k^2\lambda^2$; $p_1 = k^2 p$; $k^2 = \dfrac{\ae^2}{\ae^2 + \lambda^2}$; $\ae^2 = \dfrac{\Lambda}{\bar{D}}$; $\lambda^2 = \dfrac{N_0}{\bar{D}}$.

Якщо у виразах для k^2 і $\bar{D}$ зробити граничні переходи $\lim\limits_{E/G' \to 0} k^2 = 1$, $\lim\limits_{E/E' \to 0} \bar{D} = D$, то отримаємо розв'язувальне рівняння для випадку класичної теорії Кармана [1, 2].

У випадку рівномірно розподіленого навантаження $p(x) = p = \text{const}$ з урахуванням симетрії граничних умов (4) та залежності

$$\gamma = px/\Lambda + (1 + \lambda^2/\ae^2)w',$$

яка випливає із останнього рівняння системи (5), розв'язок рівняння (7), що задовольняє чотири останні граничні умови з (4), отримуємо у вигляді

$$w = \bar{w}_n h = -\frac{h}{2\varepsilon^2}\left(\frac{p}{\sigma_0}\right)\left[\frac{1}{2}(1-\xi^2) - \frac{k^2}{\lambda_1\ell\,\mathrm{sh}\,\lambda_1\ell}(\mathrm{ch}\,\lambda_1\ell - \mathrm{ch}\,\lambda_1\xi)\right], \qquad (8)$$

де $\varepsilon = h/\ell$ – параметр тонкостінності; $\xi = x/\ell \in [-1,1]$.

Як наслідок рівності (6) з урахуванням того, що в цьому випадку $u(0) = 0$, отримуємо вираз для тангенціального переміщення

$$u = \frac{N_0}{\bar{B}}x - \frac{1}{2}\int_0^x (w')^2\,dx\,. \qquad (9)$$

Після підстановки (9) з урахуванням (8) в одну із двох перших граничних умов (4) і виконання відповідних операцій диференціювання та інтегрування отримаємо залежність між інтенсивністю поперечного навантаження p та розтягувальним напруженням σ_0 у серединній площині:

$$p = 2\varepsilon\sigma_0\sqrt{\frac{2(1-\nu^2)}{(1+\alpha)\Delta}\frac{\sigma_0}{E}}\,, \qquad (10)$$

де $\Delta = \dfrac{1}{3} + \dfrac{k^4}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_1\ell}\dfrac{1/2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1\ell - \lambda_1\ell}{2\lambda_1\ell} - 2\dfrac{k^2}{\mathrm{sh}\,\lambda_1\ell}\dfrac{\lambda_1\ell\,\mathrm{ch}\,\lambda_1\ell - \mathrm{sh}\,\lambda_1\ell}{(\lambda_1\ell)^2}$.

Тобто при відомому навантаженні p для визначення σ_0 маємо досить складне нелінійне алгебраїчне рівняння. Розв'язавши його, можемо за формулою (8) визначити функцію прогину w, а через неї – всі інші характеристики геометрично нелінійного напружено-деформованого стану рівномірно навантаженої жорстко защемленої на торцях пластини-смуги.

Випадок лінійного деформування. Якщо в першому із деформаційних співвідношень (3) знехтувати другим доданком, то при розглянутих двох перших граничних умовах (4) отримаємо

$$u(x) = 0, \qquad N(x) = 0\,,$$

і тоді система рівнянь рівноваги (1) набуде вигляду

$$M' - Q = 0, \qquad Q' = p(x)\,. \qquad (11)$$

Відповідне розв'язувальне рівняння на функцію прогину отримуємо з (11) аналогічним чином до попереднього:

$$w^{IV} = -\frac{p}{D}\,. \qquad (12)$$

Розв'язок (12), що задовольняє решту граничних умов (4), має вигляд

$$w = \bar{w}_\ell h = -\frac{\beta}{24}\left(\frac{p}{E}\right)\frac{1}{\varepsilon^4}(1-\xi^2)(1-\xi^2+12\varepsilon^2/\text{æ}^2)\,, \qquad (13)$$

де $\beta = \dfrac{3}{2}\dfrac{1-\nu^2}{1+\alpha}$; $\text{æ}^2 = \dfrac{3k'(1-\nu^2)}{(1+\alpha)(E/G')}$.

Аналіз числових результатів та висновки. Для прикладу розрахунку деформативності розглянуто пластину-смугу із склопластика з пружними характеристиками $E = E' = 1.32\cdot10^5$ МПа; $G' = 9.0\cdot10^3$ МПа; $\nu = \nu' = 0.37$ та параметром тонкостінності $\varepsilon = 0.1$. На рис. 2 наведено безрозмірний прогин $\bar{w} = w/h$ серединної площини уздовж координати x для чотирьох випадків моделювання деформованого стану. Крива *1* відповідає розподілу $\bar{w}_n$ за формулою (8) при $E/E' = 1$, а крива *2* – те ж саме при $E/E' = 0$. Криві *3*, *4* ілюструють розподіл $\bar{w}_\ell$ за формулою (13) при $E/E' = 1$ та $E/E' = 0$ відповідно. Значення поперечного навантаження вибирали таким, щоб напруження $\sigma_0 = 100$ МПа. Помітний значний вплив

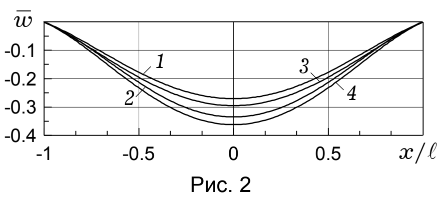

Рис. 2

врахування податливості трансверсальному стисненню на деформативність (величину максимального прогину) як у випадку лінійного, так і геометрично нелінійного деформування.

Врахування податливості до стиснення приводить до збільшення жорсткості пластини в обох випадках. У порівнянні з лінійним без стиснення деформуванням геометрично нелінійне деформування зі стисненням приводить до зменшення максимального прогину при розглянутому навантаженні на 25 %.

У подальшому аналогічні дослідження доцільно провести для інших типів граничних умов і двовимірних областей. Наведений же аналітичний розв'язок може бути тестовим для апробації числових методів розв'язування нелінійних двоточкових граничних задач.

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 420 с.
2. *Григоренко Я. М., Мукоед А. П.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
3. *Каюк Я. Ф.* Геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек. – Киев: Наук. думка, 1987. – 208 с.
4. *Корнишин М. С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – Москва: Наука, 1964. – 192 с.
5. *Марчук М. В., Пакош В. С., Лесик О. Ф.* Уточнені рівняння геометрично нелінійного деформування податливих до трансверсальних зсуву та стиснення композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 134–143.
6. *Муштари Х. М., Галимов К. З.* Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
7. *Семенюк Н. П., Жукова Н. Б.* Об уравнениях нелинейной теории пластин типа Тимошенко при больших перемещениях // Доп. НАН України. – 2002. – № 10. – С. 48–55.
8. *Gunes R., Reddy J. N.* Nonlinear analysis of functionally graded circular plates under different loads and boundary conditions // Int. J. Struct. Stability and Dynamics. – 2008. – **8**, No. 1. – P. 131–159.
9. *Lopez S.* Geometrically nonlinear analysis of plates and cylindrical shells by a predictor – corrector method // Int. J. Comput. Struct. – 2001. – **79**, No. 15. – P. 1405–1415.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЕ ПОПЕРЕЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОДАТЛИВОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОМУ СЖАТИЮ ПЛАСТИНЫ-ПОЛОСЫ

Приведены уравнения уточненной теории геометрически нелинейного деформирования податливых к трансверсальным сдвигу и сжатию пластин. Получено в замкнутом виде решение задачи о поперечном деформировании жестко защемленной на торцах пластины-полосы при действии равномерно распределенной нагрузки. Выполнен анализ влияния параметров податливости к сжатию на ее деформативность.

GEOMETRICALLY NONLINEAR TRANSVERSAL STRAIN OF PLATE-STRIP PLIABLE TO TRANSVERSAL COMPRESSION

An equation of refined theory for geometrically nonlinear strain of plates pliable to transversal shear and compression is presented. The solution of the problem on transversal strain of a plate-strip hold rigidly on the ends under uniformly distributed load is obtained in a closed form. The analysis of influence of parameters of compression pliability on the deformability is made.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.11.08