УДК 539.3

Т. В. Карнаухова

АКТИВНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ НА НИХ НЕИЗВЕСТНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Предложен новый подход к активному демпфированию вынужденных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих пластин при помощи распределенных сенсоров и актуаторов. Механическая нагрузка считается неизвестной. Она определяется по экспериментальным показаниям сенсора. Рассмотрены задачи об активном демпфировании колебаний изотропных вязкоупругих прямоугольных пластин с шарнирно опертыми и жестко защемленными торцами, а также со смешанными граничными условиями. Задачи решаются методом Бубнова – Галеркина. Для всех случаев граничных условий получены формулы для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для демпфирования вынужденных колебаний по первой моде. Исследовано влияние граничных условий, диссипативных свойств материалов, размеров сенсора и актуатора на эффективность активного демпфирования.

Введение. Тонкие изотропные неупругие пластины находят широкое применение во многих областях современной науки и техники: в космической технике, авиа-, автомобиле-, судо-, машиностроении, радиоэлектронике и т. п. Очень часто на них действуют нестационарные и гармонические во времени механические нагрузки. Особенно опасными являются резонансные колебания, когда частота гармонической во времени силы совпадает с собственной частотой колебаний элемента. В связи с этим возникает задача демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонких пластин. Для этой цели широко используются пассивные методы демпфирования, когда в структуру элемента включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями. По вопросам пассивного демпфирования колебаний тонкостенных элементов опубликовано большое количество работ как отечественных, так зарубежных ученых-механиков, обзор которых можно найти в монографиях [6, 7]. В последние годы для указанной цели начали применять активные методы, базирующиеся на включении в структуру пассивного (без пьезоэффекта) тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала, пьезоэлектрических компонент [8–10]. Одни из них выполняют функции сенсора, которые дают информацию о механическом состоянии тела, а другие – функции так называемых актуаторов. Существуют два основных метода активного демпфирования колебаний. При использовании первого из них для демпфирования колебаний применяются пьезоэлектрические включения, выполняющие функции актуатора. Основная задача при этом состоит в расчете той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации резонансной составляющей внешней механической нагрузки. Если величина нагрузки известна, то соответствующим выбором разности потенциалов можно полностью задемпфировать определенную (например, первую) моду. Тогда амплитуда колебаний на этой моде будет равна нулю. При использовании второго метода кроме актуаторов применяются еще и пьезоэлектрические сенсоры. К актуаторам подводится разность потенциалов, пропорциональная показателям сенсора, – току или первой производной по времени от разности потенциалов, снимаемой с сенсоров. Коэффициент пропорциональности носит название коэффициента обратной связи. Тогда изменяются диссипативные характеристики пластины, в результате чего уменьшается амплитуда колебаний. При использовании этого метода уровень колебаний можно существенно уменьшить за счет выбора указанного коэффициента обратной связи. В обоих методах необходимо знать внешнюю нагрузку.

В данной статье предлагается новый подход к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин при помощи совместного использования сенсоров и актуаторов в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Суть его состоит в следующем. По экспериментальным показаниям сенсора – заряду или разности потенциалов – восстанавливается внешняя механическая нагрузка. После этого используется первый из указанных выше подходов, когда к актуатору подводится разность потенциалов, которая рассчитывается по экспериментальным показаниям сенсора. В дальнейшем будем называть его третьим подходом. При использовании этого подхода подводимая к актуатору разность потенциалов для компенсации соответствующей моды колебаний рассчитывается по экспериментальным показателям сенсора – току или разности потенциалов в зависимости от типа электрических граничных условий.

Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную пластину размером $a \times b$, на которую действует давление, изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной. Колебания пластины описываются на основе гипотез Кирхгофа – Лява, дополненных адекватными им гипотезами относительно распределения электрических полевых величин [1–4]. Для простоты ограничимся исследованием демпфирования только изгибных колебаний. Пассивные слои могут быть металлическими, полимерными либо композитными. Будем считать их изотропными. Пьезоактивные слои считаются трансверсально-изотропными и поляризованными по толщине пластины. Если между слоями электроды отсутствуют, то на границе их раздела имеет место идеальный механический и электрический контакт. Диссипативные свойства материалов пассивных и пьезоактивных слоев учитываются на основе концепции комплексных характеристик [5]. Основные соотношения теории пластин с распределенными сенсорами и актуаторами представлены в работах [5, 8, 10]. Приведем те из них, которые используются в дальнейшем. Ограничимся случаем трехслойной пластины, средний слой толщиной h_0 которой изготовлен из пассивного изотропного вязкоупругого материала, а два внешних слоя одинаковой толщины h_1 – из пьезоэлектрических трансверсально-изотропных вязкоупругих материалов с противоположным направлением поляризации. Тогда определяющие уравнения для моментов будут иметь следующий вид [5]:

$$M_1 = D_M(\varkappa_1 + \nu_M \varkappa_2) + M_0\,,$$

$$M_2 = D_M(\varkappa_2 + \nu_M \varkappa_2) + M_0\,,$$

$$H = \frac{1-\nu_M}{2} D_M \varkappa_{12}\,. \qquad (1)$$

Общая толщина пластины $h = h_0 + 2h_1$.

В работе [5] приведены выражения для жесткостных характеристик уравнений состояния (1) для случаев слоистых пьезоэлектрических тонкостенных элементов произвольной структуры. Так, например, если пьезоактивные слои трехслойной пьезопластины имеют одинаковую толщину и одинаковые свойства, за исключением того, что они имеют противоположную поляризацию $\overset{2}{d}_{31} = -\overset{1}{d}_{31}$, то имеют место такие выражения для электромеханических характеристик в определяющих уравнениях (1)

– в присутствии внутренних электродов между пассивным и пьезоактивными слоями, к которым подведены разности потенциалов $\overset{1}{V} = -\overset{2}{V} = \frac{1}{2} V_0$, $\overset{0}{V} = 0$:

$$D_M = \frac{h_0^3}{12}\overset{0}{B}_{11} + \frac{2}{3}\left\{\overset{1}{B}_{11} + \left(1+\overset{1}{\nu}\right)\overset{1}{B}_{11}\, k_p^2\,\frac{1}{2(1-k_p^2)}\left[1 - \frac{3}{4h_1}\left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right]^{-1}\right]\right\} \cdot \left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right],$$

$$\nu_M = \left\{\frac{h_0^3}{12}\overset{0}{B}_{12} + \frac{2}{3}\left\{\overset{1}{B}_{12} + \left(1+\overset{1}{\nu}\right)\overset{1}{B}_{12}\, k_p^2\,\frac{1}{2(1-k_p^2)}\left[1 - \frac{3}{4h_1}\left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^2 - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right]^{-1}\right]\right\} \cdot \left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right]\frac{1}{D_M},$$

$$M_0 = \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}_{31}(h_1+h_0)V_0 \qquad (2)$$

(индекс $\overset{0}{(\cdot)}$ относится к пассивному слою, а индексы $\overset{1}{(\cdot)}, \overset{2}{(\cdot)}$ – к активным слоям);

– в отсутствие внутренних электродов:

$$D_M = \frac{h_0^3}{12}\overset{0}{B}_{11} + \frac{2}{3}\left\{\overset{1}{B}_{11} + \left(1+\overset{1}{\nu}\right)\overset{1}{B}_{11}\, k_p^2\,\frac{1}{2(1-k_p^2)}\left[1 - \frac{3}{4h_1}\left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right]^{-1}\right]\right\} \times$$

$$\times\left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right] \cdot \frac{2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0\overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}},$$

$$\nu_M = \left\{\frac{h_0^3}{12}\overset{0}{B}_{12} + \frac{2}{3}\left\{\overset{1}{B}_{12} + \left(1+\overset{1}{\nu}\right)\overset{1}{B}_{12}\, k_p^2\,\frac{1}{2(1-k_p^2)}\left[1 - \frac{3}{4h_1}\left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^2 - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \left(\frac{h_0}{2}\right)^2\right]^2 \cdot \left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right]^{-1}\right]\right\} \times$$

$$\times\left[\left(\frac{h_0}{2}+h_1\right)^3 - \left(\frac{h_0}{2}\right)^3\right] \cdot \frac{2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0\overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}}\,\frac{1}{D_M},$$

$$M_0 = \frac{\overset{0}{\gamma}_{31}\, h_1(h_0+h_1)\overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0\overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1\overset{0}{\gamma}_{33}}\, V_0\,. \qquad (3)$$

Уравнения изгибных колебаний пластины имеют вид [1, 2, 5]

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - p(x,y,t) - \tilde{\rho}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (4)$$

Здесь $p(x,y,t)$ – поперечная механическая нагрузка, $\tilde{\rho}$ – приведенная плотность.

Величина M_0 играет основную роль при демпфировании резонансных колебаний. Именно за счет соответствующего выбора этой величины и компенсируется механическая нагрузка при использовании первого из указанных выше методов. Она также необходима и при использовании второго и третьего подходов к активному демпфированию резонансных колебаний пластин. Подставляя уравнения состояния (1) в (4), получим уравнение стационарных колебаний пластины с частотой ω относительно w при действии на нее гармонических механической $p(x,y,t)=p_0(x,y)\exp(i\omega t)$ и электрической $V(x,y,t)=V_0(x,y)\exp(i\omega t)$ нагрузок:

$$Lw = p_0(x,y) + \Delta M_0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Здесь для независящих от координат электромеханических свойств материалов

$$Lw = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) - \tilde{\rho}\omega^2 w, \qquad D = D_M, \tag{6}$$

где все жесткостные характеристики − комплексные величины.

К представленному выше уравнению необходимо добавить механические граничные условия.

Задача состоит в расчете той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актутору для компенсации механической нагрузки. В связи с тем, что нагрузка является неизвестной, ее надо восстановить по экспериментальным показаниям сенсора.

2. Метод решения задачи. Предположим, что мода собственных колебаний $f(x,y)$ (например, первая) при некоторых механических граничных условиях известна из аналитических либо численных решений соответствующей задачи на собственные значения. Выбираем решение задачи об активном демпфировании указанной моды в виде

$$w(x,y) = Af(x,y), \tag{7}$$

где A − амплитуда колебаний по соответствующей моде.

Для решения задачи используем вариационные методы либо метод Бубнова − Галеркина. В соответствии с последним подставим (7) в уравнение (5), а полученный результат умножим на функцию формы $f(x,y)$ и проинтегрируем по площади пластины. При таком интегрировании учтем известное из математической физики соотношение

$$\iint\limits_{(S)} f\,\Delta g\,ds = \iint\limits_{(S)} g\,\Delta f\,ds. \tag{8}$$

В результате получим следующее соотношение для определения амплитуды изгибных колебаний:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \tag{9}$$

где

$$\Delta_1 = \iint\limits_{(S_1)} p_0 f\,dS - \int\limits_{(S_1)} M_0\,\Delta f\,dS, \qquad \Delta_2 = \iint\limits_{(S)} f\,L\,f\,dS. \tag{10}$$

Здесь S_1 − площадь сенсора и актуатора, S − площадь пластины.

Из (9), (10) видно, что при независящих от координат жесткостных характеристиках для компенсации внешней механической нагрузки к актуатору необходимо подвести разность потенциалов, определяемую из соотношения

$$V_A = \frac{\iint\limits_{(S)} p_0 f\,dS}{\iint\limits_{(S_1)} f_1\,\Delta f\,dS}, \tag{11}$$

где согласно (2), (3)

$$f_1 = \frac{1}{2}\overset{1}{\gamma}_{31}(h_1 + h_0) \qquad \text{либо} \qquad f_1 = \frac{\overset{0}{\gamma}_{31}\, h_1(h_0 + h_1)\,\overset{0}{\gamma}_{33}}{h_0\,\overset{1}{\gamma}_{33} + 2h_1\,\overset{0}{\gamma}_{33}}$$

в зависимости от присутствия или отсутствия внутренних электродов.

При выполнении соотношения (11) амплитуда изгибных колебаний на рассматриваемой моде будет равна нулю.

При использовании вариационного метода или метода Бубнова – Галеркина необходимо также иметь в виду следующее обстоятельство. На эффективность активного демпфирования колебаний пластин при помощи пьезоэлектрических включений существенное влияние оказывают механические граничные условия, размещение и размеры пьезоактивных включений. Как показано, например, в [5], при шарнирном опирании торцов пластины эффективность демпфирования будет самой высокой при полном покрытии поверхностей пластины пьезоэлектрическими включениями, а при жестком защемлении существуют оптимальные размеры этих включений (пятен). Этот вопрос обсудим ниже при исследовании влияния граничных условий на эффективность активного демпфирования при помощи предлагаемого подхода. Важно также отметить, что вместо пьезоэлектрических пятен можно использовать разрезные электроды.

Соотношение (11) имеет место и в случае зависимости свойств материала от температуры, например, температуры диссипативного разогрева и даже при учете физической нелинейности материалов. Из него следует, что если свойства активного материала не зависят от температуры или от амплитудных значений деформаций, то необходимая для демпфирования основной моды колебаний разность потенциалов не зависит от свойств пассивного материала, так что в таком случае на эту величину не влияет ни температура, ни физическая нелинейность. Это очень важный факт, поскольку он позволяет рассчитывать указанную разность потенциалов по простейшей линейной теории вязкоупругости. Если же свойства пьезоматериала зависят от температуры или от амплитуд деформаций, то из формулы (11) видно, что разность потенциалов может существенно измениться в зависимости от чувствительности γ_{31} к изменению температуры или к амплитуде колебаний.

Основные недостатки подхода, основанного на формуле (11), состоят в том, что ***1***) свободные колебания не демпфируются и ***2***) необходимо знать внешнюю механическую нагрузку. Первый недостаток устраняется диссипативными свойствами материалов. Для устранения второго недостатка предлагается использовать следующий подход. Для определения величины резонансной составляющей этой нагрузки используем показания сенсора, занимающего площадь S_1. Для короткозамкнутых электродов величина заряда определяется выражением

$$Q = -\gamma_{31}(h_0 + h_1)\iint\limits_{(S_1)} (\varkappa_1 + \varkappa_2)\, dx\, dy\,. \tag{12}$$

Для разомкнутых электродов разность потенциалов определяется по формуле

$$V_S = \frac{h_1 Q}{S_1 \gamma_{33}}\,. \tag{13}$$

Для определения показаний сенсора при колебаниях по основной моде необходимо знать площадь S_1 и после подстановки в выражения (12), (13) формулы (7) вычислить интегралы по этой площади. Для основной моды из (12), (13) имеем следующие выражения для показаний сенсора:

$$Q_{11} = \gamma_{31}(h_0 + h_1)A \iint\limits_{(S_1)} \Delta f \, dS \,, \tag{14}$$

$$V_{11S} = \frac{h_1(h_0 + h_1)\gamma_{31}}{S_1\gamma_{33}} A \iint\limits_{(S_1)} \Delta f \, dS \,. \tag{15}$$

Решение задачи о резонансных механических колебаниях пластины по первой моде имеет следующий вид:

$$A = \frac{p_{11}}{\Delta_2}, \tag{16}$$

где $p_{11} = \iint\limits_{(S)} p_0 \, f \, dS$ – резонансная составляющая механической нагрузки.

Подставляя (16) в (14) или (15), получим связь между показаниями сенсора и нагрузкой:

$$p_{11} = \frac{Q_{11}\Delta_2}{\gamma_{31}(h_0 + h_1) \iint\limits_{(S_1)} \Delta f \, dS},$$

$$p_{11} = \frac{V_{11S} S_1 \, \gamma_{33} \, \Delta_2}{\gamma_{31}(h_0 + h_1)h_1 \iint\limits_{(S_1)} \Delta f \, dS}. \tag{17}$$

Подставим теперь найденную из выражения (17) нагрузку в формулу (11) для потенциала, компенсирующего данную нагрузку. В результате получим выражения для этого потенциала

$$V_{11} = \frac{1}{\iint\limits_{(S_1)} f_1 \, \Delta f \, dS} \, \frac{Q\Delta_2}{\gamma_{31}(h_0 + h_1) \iint\limits_{(S_1)} \Delta f \, dS},$$

$$V_{11S} = \frac{1}{\iint\limits_{(S_1)} f_1 \, \Delta f \, dS} \, \frac{V_{11S} S_1 \gamma_{33} \Delta_2}{\gamma_{31}(h_0 + h_1)h_1 \iint\limits_{(S_1)} \Delta f \, dS}. \tag{18}$$

Таким образом, при использовании предлагаемого подхода к актуатору подводится разность потенциалов, определяемая через экспериментальные показания сенсора по формулам (18). При таком подходе необходимо лишь знать форму колебаний, электромеханические свойства материалов пластины и размеры пластины.

При **численном решении** задачи поступаем следующим образом. Решим эталонную задачу о резонансных колебаниях пластины при действии на нее единичной нагрузки $p_{11} = 1\,\text{Па}$. По формулам (12), (13) определим показания сенсора $V_S^{(1)}$ или $Q_S^{(1)}$. Тогда при заданной, но неизвестной нагрузке p_{11} показания сенсора будут равны

$$V_S = p_{11} V_S^{(1)}. \tag{19}$$

Здесь обе величины V_S и $V_S^{(1)}$ известны: первая равна экспериментальному показанию сенсора при неизвестной нагрузке, а вторая равна показанию сенсора при единичной нагрузке.

Из (19) определяем неизвестную нагрузку

$$p_{11} = \frac{V_S}{V_S^{(1)}}. \tag{20}$$

Для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной назрузки, найдем разность потенциалов $V_A^{(1)}$, которую следует подвести к актуатору для компенсации единичной нагрузки $p_0 = 1\,\text{Па}$. Тогда для компенсации нагрузки p_{11} к актуатору необходимо подвести разность потенциалов

$$V_A = p_{11} V_A^{(1)}. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (21), находим

$$V_A = -\frac{\left|V_A^{(1)}\right|}{\left|V_S^{(1)}\right|} V_S .$$

Здесь все величины известны – две из них определяются из решения эталонных задач, а одна равна экспериментальному показателю сенсора.

Для короткозамкнутых электродов все представленные выше рассуждения остаются без изменения. При этом в полученных выше формулах необходимо заменить $V_S^{(1)}$, V_S на $Q_S^{(1)}$, Q_S.

При численном расчете величины $V_A^{(1)}$ решаются две отдельные задачи:

(*1*) находится прогиб w_P пластины в центре при $P_0 = 1\,\text{Па}$, $V_A = 0$;

(*2*) находится прогиб w_E пластины в центре при $P_0 = 0$, $V_A = 1\,\text{В/мм}^2$.

Тогда $V_A^{(1)}$ находится из соотношения

$$V_A^{(1)} = \frac{w_P}{w_E}.$$

Таким образом, в настоящей работе предложен новый подход к реализации активного демпфирования изгибных колебаний вязкоупругих ортотропных пластин в случае, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Она определяется по экспериментальным показаниям сенсора. В предположении, что форма колебаний известна, получены формулы для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки с использованием только экспериментальных показаний сенсора. Из представленных формул (18) видно, что обязательным условием эффективного демпфирования вынужденных резонансных колебаний по предлагаемому методу является наличие вязкости в материале пассивного слоя. При ее отсутствии показания сенсора на резонансе, определяемые по формуле (14), при приближении к резонансной частоте стремятся к бесконечности. При малой вязкости материала управление колебаниями становятся очень чувствительными к ошибкам измерений.

Представим решения задач для конкретных механических граничных условий.

3. Шарнирное опирание торцов пластины. Активное демпфирование шарнирно опертых пластин при помощи первого из указанных выше методов детально рассмотрено в [5], где исследовано влияние расположения пьезовключений и их размеров на эффективность работы сенсоров и актуаторов для различных мод колебаний. Показано, что для первой моды эффективность демпфирования будет самой высокой при полном покрытии пластины сенсорами и актуаторами. Этим случаем ограничимся в дальнейшем. Для этого типа граничных условий первая мода колебаний имеет следующий вид:

$$f(x,y) = \sin k_1 x \sin p_1 y, \qquad k_1 = \frac{\pi}{a}, \qquad p_1 = \frac{\pi}{b}.$$

С использованием указанного выше подхода получим такие выражения для показаний сенсора (заряда или разности потенциалов):

$$Q_{11} = 4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\left(\frac{k_1}{p_1} + \frac{p_1}{k_1}\right)w_{11},$$

$$V_{11S} = \frac{4h_1(h_0 + h_1)\gamma_{31}}{S_1\gamma_{33}}\left(\frac{k_1}{p_1} + \frac{p_1}{k_1}\right)w_{11}.$$

Фигурирующая здесь амплитуда w_{11} находится из решения задачи о вынужденных резонансных механических колебаниях пластины с шарнирным опиранием торцов по первой моде:

$$w_{11} = \frac{p_{11}}{D(k_1^4 + 2k_1^2p_1^2 + p_1^4) - \tilde{\rho}\omega_{11}^2}.$$

При этом первая резонансная частота определяется по формуле

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{D'}{\tilde{\rho}}(k_1^2 + p_1^2)}.$$

Разность потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки, находится по формуле

$$V_{11} = p_{11}\frac{1}{k_1^2 + p_1^2}\overset{1}{\gamma}_{31}(h_0 + h_1), \qquad p_{11} = \frac{4p_0}{k_1p_1}, \qquad V_{11} = \frac{4V_0}{k_1p_1}. \tag{22}$$

Здесь резонансная составляющая нагрузки p_{11} вычислена для неизвестного постоянного давления p_0.

Используя представленные выше результаты, находим связь между показаниями сенсора и нагрузкой

$$p_{11} = \frac{Q_{11}\left[D(k_1^4 + 2k_1^2p_1^2 + p_1^4) - \tilde{\rho}\omega_{11}^2\right]}{4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)},$$

$$p_{11} = \frac{V_{11S}S_1\gamma_{33}\left[D(k_1^4 + 2k_1^2p_1^2 + p_1^4) - \tilde{\rho}\omega_{11}^2\right]}{4\gamma_{31}(h_0 + h_1)\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в формулу (22), получим выражения для разностей потенциалов, которые необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки:

$$V_{11} = \frac{Q_{11}\left[D(\text{æ}_1^4 + 2\text{æ}_1^2p_1^2 + p_1^4) - \rho\omega^2\right]}{4\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)(k_1^2 + p_1^2)},$$

$$V_{11} = \frac{V_{11S}S_1\gamma_{33}\left[D(\text{æ}_1^4 + 2\text{æ}_1^2p_1^2 + p_1^4) - \rho\omega^2\right]}{4\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2\left(\dfrac{k_1}{p_1} + \dfrac{p_1}{k_1}\right)(k_1^2 + p_1^2)}. \tag{24}$$

В этой формуле нагрузка исключена, а подводимая к актуатору разность потенциалов определяется по экспериментальным показаниям сенсора – заряду или разности потенциалов.

При использовании формул (24) амплитуда колебаний по первой моде будет равна нулю.

4. Жесткое защемление торцов пластины. Применим представленные выше общие результаты для исследования активного демпфирования основной моды вынужденных резонансных колебаний вязкоупругой пластины для граничных условий, отвечающих жесткому защемлению торцов пластины.

Рассмотрим прямоугольную изотропную пластину с размерами $2a \times 2b$, на которую действует давление, изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной частоте пластины.

При жестком защемлении торцов пластины граничные условия имеют вид

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \qquad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y \pm b. \tag{25}$$

Предполагается, что на пластину действует равномерно распределенное по ее поверхности неизвестное давление, изменяющееся во времени по гармоническому закону. Выражение для поперечного прогиба представляется в стандартном для этого случая граничных условий виде:

$$w = A\tilde{w}, \qquad \tilde{w} = (x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2.$$

При этом автоматически удовлетворяются механические граничные условия (25).

Будем считать, что для демпфирования резонансных колебаний на пластину нанесено пятно размерами $2c \times 2d$, с центром, расположенным в центре пластины. С использованием представленного выше подхода, выражение для комплексной амплитуды колебаний пластины вычисляется по формуле

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2},$$

где

$$\Delta_1 = \frac{49}{16}a^2b^2p_0 - \frac{735}{256}M_0(a^2 + b^2)\psi(s),$$

$$\psi(s) = s(1 - s)(15 - 10s + 3s^2),$$

$$\Delta_2 = 8a^2b^2\Delta, \qquad \Delta = D\left[7b^4 + 4a^2b^2 + 7a^4 - \frac{1}{9}\tilde{\rho}\omega^2a^4b^4\right]. \tag{26}$$

Здесь $s = (\ell/L)^2$, ℓ, L – диагонали пьезоактивных включений и пластины соответственно. Полагая $\Delta_1 = 0$, из (26) получим выражение для той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации внешней нагрузки:

$$V_A = \frac{32a^2b^2}{15(a^2 + b^2)\psi(s)\gamma_{31}(h_0 + h_1)}q_0. \tag{27}$$

При выполнении соотношения (27) амплитуда вынужденных колебаний по основной моде равна нулю. Как следует из этого соотношения, механические граничные условия оказывают существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний при помощи предлагаемого подхода. Как указано выше, при шарнирном закреплении торцов пластины наиболее эффективным является полное покрытие пластины сенсорами и актуаторами [5]. При жестком защемлении торцов работа актуатора будет наиболее эффективной при достижении функцией $\psi(s)$ максимума. Он достигается при $s_{\max}$, являющемся корнем уравнения

$$12s^3 - 39s^2 + 50s - 15 = 0.$$

Отсюда следует, что указанный выше метод активного демпфирования будет наиболее эффективным при длине диагонали актуатора $\ell = L\sqrt{s_{\max}}$. Из (27) следует также, что при $s \to 0$ и при $s \to 1$ разность потенциалов стремится к бесконечности. Таким образом, при полном покрытии пластины актуатором и при очень малых размерах актуатора управлять колебаниями пластины невозможно. Аналогичные выводы имеют место и для сенсора.

Показания сенсора определяются выражением

$$Q = \frac{16}{15}\gamma_{31}(h_0 + h_1)Aa^3b^3(a^2 + b^2)\psi(s)\,. \tag{28}$$

Величину V_S находим из соотношения (13).

Амплитуду колебаний определяем по формуле

$$A = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}\,. \tag{29}$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\Pi_1 = \frac{49}{64}p_0\,,$$

$$\Pi_2 = \Delta\,.$$

При этом первая резонансная частота

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(63b^4 + 36a^2b^2 + 63a^4)D'}{\tilde{\rho}a^4b^4}}\,.$$

Подставляя (29) в выражение для показаний сенсора (28), получим соотношение для определения механической нагрузки по показаниям сенсора:

$$p_0 = -\frac{120}{49}\frac{Q\Delta}{\gamma_{31}(h_0 + h_1)a^3b^3(a^2 + b^2)\psi(s)}\,. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (27), получим связь между показаниями сенсора и разностью потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной механической нагрузки:

$$V_A = -\frac{256}{49}\frac{Q\Delta}{ab(a^2 + b^2)^2(h_0 + h_1)^2\gamma_{31}^2\psi^2(s)}\,.$$

Аналогичное соотношение получим и при снятии с сенсора разности потенциалов. Для этого необходимо использовать представленное выше соотношение (13).

Как и в случае шарнирного закрепления торцов пластины, вязкость при использовании указанного подхода оказывает существенное влияние на эффективность предлагаемого подхода.

5. Смешанные граничные условия. Рассмотрим теперь случай смешанных граничных условий, когда одни противоположные торцы шарнирно оперты, а другие − жестко защемлены. При этом граничные условия принимают вид

$$w = M_x = 0 \qquad \text{при} \qquad x = 0,\, a\,,$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad \text{при} \qquad y = \pm b\,.$$

Предполагается, что на пластину действует равномерно распределенная по ее поверхности неизвестная механическая нагрузка, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. Выражение для первой моды колебаний выбирается в виде

$$w = A\tilde{w}, \qquad \tilde{w} = (\sin k_1 x)(b^2 - y^2)^2\,.$$

Будем считать, что для демпфирования резонансных колебаний на пластину нанесено пятно размерами $c \times 2d$ с центром, расположенным в центре пластины.

Используя описанный выше подход, получим следующее выражение для комплексной амплитуды колебаний пластины:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\,.$$

Здесь для неизвестной механической нагрузки

$$\Delta_1 = -\frac{p_0}{ak_1} + \frac{1}{ak_1} M_0 \sin\left(k_1 \frac{c}{2}\right)\left[\frac{\pi^2}{a^2} s(15 - 10s^2 + 3s^4) - \right.$$

$$\left. - 60s\left(\frac{1}{b^2}\right)(1 - s^2)\right],$$

$$\Delta_2 = 2\left[3D - \frac{4}{7} Db^2k_1^2 + \frac{2}{21} b^4(Dk_1^4 - \tilde{\rho}\omega^2)\right].$$

Полагая $\Delta_1 = 0$, получим выражение для той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации внешней нагрузки:

$$V_A = \frac{2p_0b^2}{(h_0 + h_1)\gamma_{31} \sin\left(k_1 \frac{c}{2}\right)\psi(s)}, \tag{31}$$

где

$$\psi(s) = \frac{\pi^2 b^2}{a^2} s(15 - 10s^2 + 3s^4) + 60s(1 - s^2), \tag{32}$$

а $s = (d/b)$.

При выполнении соотношений (31), (32) амплитуда вынужденных колебаний по основной моде равна нулю и пластина может совершать только свободные колебания.

Как следует из формул (31), (32), механические граничные условия оказывают существенное влияние на эффективность активного демпфирования колебаний. При смешанных граничных условиях активное демпфирование будет наиболее эффективным при $c = a$ и при одновременном достижении функцией $\psi(s)$ максимума. Он достигается при $s_{\max}$, являющемся корнем уравнения

$$s^4 - 2\left(1 + \frac{6a^2}{b^2\pi^2}\right)s^2 + \left(1 + \frac{4a^2}{b^2\pi^2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что указанный выше метод активного демпфирования будет наиболее эффективным при $d = bs_{\max}$. Из (31), (32) следует также, что при $s \to 0$ и при $s \to s_k$, где s_k – корень уравнения

$$\frac{\pi^2 b^2}{a^2}(15 - 10s^2 + 3s^4) + 60(1 - s^2) = 0,$$

разность потенциалов стремится к бесконечности. Таким образом, при покрытии пластины актуатором размером $d = b$ и при очень малых размерах актуатора управлять колебаниями пластины невозможно.

Выражения для показаний сенсора через амплитуду колебаний вычисляются по формуле

$$Q = -\frac{2}{15}\gamma_{31}(h_0 + h_1)Ab^3\psi(s).$$

Из этого выражения видно, что размеры сенсора, при которых его работа наиболее эффективна, определяются по представленным выше формулам для актуатора.

Для определения нагрузки p_0 воспользуемся выражением для амплитуды колебаний пластины на частоте, близкой к основной резонансной частоте:

$$A = \frac{\Pi_1}{\Pi_2}.$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\Pi_1 = \frac{p_0}{6\pi b^5},$$

$$\Pi_2 = D - \frac{2}{21} D k_1^2 b^2 + \frac{2}{63} b^4 (D k_1^4 - \tilde{\rho}\omega^2).$$

При этом первая резонансная частота

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \sqrt{D' \left(\frac{63}{2} - 6 b^2 k_1^2 + b^4 k_1^4 \right)}.$$

Связь между показаниями сенсора и разностью потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной внешней нагрузки, имеет вид

$$V_A = -\frac{15}{2} \frac{6\pi b^4 \Pi_2 Q}{(h_0 + h_1)^2 \gamma_{31}^2 \psi^2(s)}.$$

Аналогичное соотношение получим и при снятии с сенсора разности потенциалов. Для этого необходимо использовать представленное выше соотношение (13).

6. Заключение. В статье предложен новый подход к исследованию активного демпфирования вынужденных резонансных колебаний изотропных вязкоупругих пластин при помощи пьезоэлектрических включений для случая, когда внешняя механическая нагрузка неизвестна. Для решения задачи используется метод Бубнова – Галеркина. Получены формулы для восстановления механической нагрузки по экспериментальным показаниям сенсора – заряду либо разности потенциалов. После определения нагрузки для демпфирования колебаний к актуатору подводится разность потенциалов, которая компенсирует действие внешней нагрузки. При этом амплитуда колебаний по соответствующей моде становится равной нулю. В формулу для указанной разности потенциалов входят экспериментальные показания сенсора. Общая методика расчета указанной разности потенциалов применена для случаев шарнирного опирания торцов пластины, жесткого их защемления и для случая смешанных граничных условий, когда на одной паре противоположных торцов задано шарнирное опирание, а на другой – жесткое защемление. Исследовано влияние типа механических граничных условий на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования с их помощью. Так, при шарнирном опирании торцов работа актуторов и сенсоров для основной моды колебаний является наиболее эффективной при полном покрытии поверхности пластины сенсорами и актуаторами. При жестком защемлении торцов пластины эффективность работы сенсоров и актуаторов наибольшая при выборе сенсоров и актуаторов в виде некоторого пятна. Представлены формулы для расчета размеров этого пятна. При смешанных граничных условиях указанная эффективность будет самой высокой при выборе сенсоров и актуаторов в виде полосы, параллельной жестко защемленным торцам. Получены формулы для расчета размеров этой полосы. Исследовано влияние граничных условий, диссипации, размеров сенсоров и актуаторов на эффективность активного демпфирования колебаний при использовании предложенного подхода.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1967. – 266 с.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
3. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // В кн.: Успехи механики: В 6 т. / Под ред. А. Н. Гузя. – Т. 1. – Киев: АСК., 2005. – С. 107–130.

4. *Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.)
5. *Карнаухов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. інж.-технолог. ін-т, 2005. – 426 с.
6. *Матвеев В. В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
7. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – Москва: Мир, 1988. – 448 с.
8. *Gabbert U., Tzou H. S.* Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 2001. – 384 p.
9. *Tani J., Takagi T., Qiu J.* Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, No. 8. – P. 505–521.
10. *Tzou H. S., Bergman L. A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.

АКТИВНЕ ДЕМПФУВАННЯ ВИМУШЕНИХ РЕЗОНАНСНИХ ЗГИННИХ КОЛИВАНЬ ІЗОТРОПНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ПЛАСТИН ПРИ НЕВІДОМОМУ МЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Запропоновано новий підхід до дослідження активного демпфування вимушених резонансних коливань в'язкопружних ізотропних пластин за допомогою розподілених сенсорів та актуаторів для випадку, коли механічне навантаження невідоме. Воно визначаєтьcя з експериментальних показників сенсора. Розглянуто задачі про активне демпфування коливань ізотропних в'язкопружних прямокутних пластин з шарнірно обпертими і жорстко защемленими торцями, а також зі змішаними граничними умовами. Задачі розв'язано методом Бубнова – Гальоркіна. Для всіх випадків граничних умов одержано формули для різниці потенціалів, яку потрібно підвести до актуатора для демпфування вимушених резонансних коливань по першій моді. Досліджено вплив механічних граничних умов, дисипативних властивостей матеріалів, розмірів сенсора та актуатора на ефективність активного демпфування коливань пластин.

ACTIVE DAMPING OF FORCED RESONANT BENDING VIBRATIONS OF ISOTROPIC VISCOELASTIC PLATES UNDER UNKNOWN MECHANICAL LOADING

A new approach to an active damping of forced resonant bending vibrations of viscoelastic isotropic plates by the distributed piezoelectric sensors and actuators is proposed. It is supposed that a mechanical load is unknown. It is found by an experimental dates of a sensor. The problems of the active damping vibrations of an isotropic viscoelastic rectangular plate with a simply supported, built-in supported edges and with mixed boundary conditions are considered. The problems are sovted by a Bubnov – Galerkin method. For all cases of boundary conditions the formulas for a potential difference to dampe the forced vibrations of plates on the first modes are obtained. Influence of mechanical boundary conditions, dissipative material properties, the dimensions of the sensors and actuators on the effectiveness of active damping of vibrations is investigated.

Нац. техн. ун-т Украины «КПИ», Киев

Получено
01.09.08