

Е. В. Алтухов, Н. М. Нескородев, Р. Н. Нескородев

## ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ТОРЦАХ ТИПА ДИАФРАГМЫ

*Рассматривается трехмерная задача упругого равновесия ортотропных пластин. Плоские грани пластины покрыты диафрагмой. Для данного класса задач получены однородные решения. Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной пластины с эллиптическим отверстием, на боковой поверхности которой заданы внешние усилия.*

**Введение.** В работах [5, 6, 11] систематизированы и изложены результаты научных исследований, относящиеся к проблемам решения краевых задач трехмерной теории упругости ортотропного тела. Структурный метод построения точного аналитического решения трехмерных уравнений упругого равновесия ортотропных плит в прямоугольных координатах предложен в статье [11]. Применению последовательного подхода для построения фундаментальных решений уравнений теории упругости ортотропного тела посвящена работа [3]. Метод начальных функций [4] применяется для решения пространственных задач теории упругости анизотропного тела. Решения экспоненциального типа и результаты исследования установившихся колебаний анизотропных пластин излагаются в работе [7]. Характерным для указанных выше методов является аппроксимация искомых величин тригонометрическими функциями.

Для решения широкого класса трехмерных задач статики и динамики упругих трансверсально-изотропных тел эффективным является метод однородных решений [1, 7, 8]. Здесь построены однородные решения уравнений равновесия ортотропных пластин, на плоских гранях которых нормальная составляющая тензора напряжений и касательные перемещения равны нулю (смешанные граничные условия типа диафрагмы).

**Постановка задачи и построение однородных решений.** Рассмотрим ортотропную пластину толщиной  $2h$ , отнесенную к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . На плоских гранях пластины (торцах) заданы однородные граничные условия смешанного типа

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad u_i(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Уравнения равновесия в перемещениях и обобщенного закона Гука в данном случае имеют вид [9]

$$\begin{aligned} (L_{11} + A_{55}\partial_3^2)u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}\partial_3u_3 &= 0, \\ L_{21}u_1 + (L_{22} + A_{44}\partial_3^2)u_2 + L_{23}\partial_3u_3 &= 0, \\ L_{31}\partial_3u_1 + L_{32}\partial_3u_2 + (L_{33} + A_{33}\partial_3^2)u_3 &= 0, \\ \sigma_i &= A_{i1}\partial_1u_1 + A_{i2}\partial_2u_2 + A_{i3}\partial_3u_3, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sigma_4 &= A_{44}(\partial_3u_2 + \partial_2u_3), \quad \sigma_5 = A_{55}(\partial_3u_1 + \partial_1u_3), \\ \sigma_6 &= A_{66}(\partial_1u_2 + \partial_2u_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2, & L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + A_{22}\partial_2^2, & L_{33} &= A_{55}\partial_1^2 + A_{44}\partial_2^2, \\ L_{12} &= \alpha_{12}\partial_1\partial_2, & L_{13} &= \alpha_{13}\partial_1, & L_{23} &= \alpha_{23}\partial_2, \\ L_{21} &= L_{12}, & L_{31} &= L_{13}, & L_{32} &= L_{23}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, & A_{ij} &- \text{модули упругости,} \\ \alpha_{12} &= A_{12} + A_{66}, & \alpha_{13} &= A_{13} + A_{55}, & \alpha_{23} &= A_{23} + A_{44}, \\ \sigma_1 &= \sigma_{11}, & \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \sigma_3 &= \sigma_{33}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \sigma_5 &= \sigma_{13}, & \sigma_6 &= \sigma_{12}. \end{aligned}$$

Следуя А. И. Лурье [10], решения системы (2), удовлетворяющие граничным условиям (1), будем называть однородными. Для построения однородных решений в случае задачи Б (кососимметрическая деформация относительно срединной плоскости  $x_3 = 0$ ) представим компоненты вектора перемещений в виде

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin(\delta_k x_3), & i &= 1, 2, \\ u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos(\delta_k x_3), & \delta_k &= k\pi h^{-1}. \end{aligned}$$

При этом граничные условия (1) будут удовлетворены, а уравнения (2) примут вид

$$L_{33}u_{30} = 0, \quad k = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^3 D_{in}^{(k)} u_{nk} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k \geq 1. \quad (5)$$

Здесь  $D_{in}^{(k)}$  – дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} D_{11}^{(k)} &= A_{55} - \lambda_k^2 L_{11}, & D_{12}^{(k)} &= -\lambda_k^2 L_{12}, & D_{13}^{(k)} &= \lambda_k L_{13}, \\ D_{21}^{(k)} &= -\lambda_k^2 L_{21}, & D_{22}^{(k)} &= A_{44} - \lambda_k^2 L_{22}, & D_{23}^{(k)} &= \lambda_k L_{23}, \\ D_{31}^{(k)} &= \lambda_k L_{31}, & D_{32}^{(k)} &= \lambda_k L_{32}, & D_{33}^{(k)} &= \lambda_k^2 L_{33} - A_{33}, & \lambda_k &= \frac{1}{\delta_k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение системы уравнений (4) находим в виде

$$u_{30} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{A_{44}\mu_3} \varphi_3(z_3) \right]. \quad (7)$$

Здесь  $\varphi_3(z_3)$  – произвольная аналитическая функция обобщенной комплексной переменной  $z_3 = x_1 + \mu_3 x_2$ ;  $\mu_3$  – корень характеристического уравнения  $A_{55} + A_{44}\mu^2 = 0$ .

Выражения (3) для напряжений в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{40} &= 2 \operatorname{Re} \varphi_3'(z_3), & \sigma_{50} &= -2 \operatorname{Re} [\mu_3 \varphi_3'(z_3)], & \varphi_3'(z_3) &= \frac{d\varphi_3}{dz_3}, \\ \sigma_{10} &= \sigma_{20} = \sigma_{30} = \sigma_{60} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Представления (7) и (8) могут быть использованы при решении задач типа антиплоской деформации для пластины с полостями, когда внешние усилия являются постоянными величинами по переменной  $x_3$ . С этой целью рассмотрим напряженно-деформированное состояние бесконечной пластины, ослабленной  $n$  полостями, боковые поверхности  $L_r$  ( $r = 1, \dots, n$ ) которых представляют собой цилиндры с образующими, нормальными плоским граням. Указанная пластина деформируется постоянными по переменной  $x_3$  внешними усилиями, приложенными по боковым поверхностям полостей. Кроме того, внешние усилия  $\sigma_5^\infty = t_5$ ,  $\sigma_4^\infty = t_4$  могут быть заданы на бесконечности. Граничные условия для определения комплексной функ-

ции  $\varphi_j(z_j)$  на поверхности  $r$ -й полости в этом случае принимают вид

$$\sigma_{50}n_{1r} + \sigma_{40}n_{2r} = -n_{1r}t_5 - n_{2r}t_4 + N_r(s), \quad (9)$$

где  $N_r(s)$  – касательная составляющая внешних усилий, приложенных к боковой поверхности;  $n_{1r} = \cos(n_r, x_1)$ ,  $n_{2r} = \cos(n_r, x_2)$ ,  $n_r$  – нормаль к контуру  $L_r$ .

Граничные условия (9) можно проинтегрировать, принимая во внимание, что при параметрическом задании контура

$$\begin{aligned} n_{1r} = \cos(n_r, x_1) &= \frac{dx_2}{ds}, & n_{2r} = \cos(n_r, x_2) &= -\frac{dx_1}{ds}, \\ ds &= \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из выражений (8) с учетом (10) следует

$$2 \operatorname{Re} \varphi_3(z_3) = -\int_0^s N_r(s) ds + t_5 x_2 - t_4 x_1 + c_3. \quad (11)$$

Для решения системы уравнений (5) воспользуемся методом малого параметра. В качестве такового принята величина  $\lambda_k = h/(k\pi)$ . Разрешающие уравнения при этом зависят от вида разложений искомых функций по параметру  $\lambda_k$ . Представим функции  $u_{nk}$  рядами по параметру  $\lambda_k$  в форме

$$u_{nk} = \frac{\varphi_{nk}}{\lambda_k} + \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_k^p u_{nkp}. \quad (12)$$

Подставим представления (12) в уравнения (5). В результате получим уравнения равновесия в виде разложений в ряды по параметру  $\lambda_k$ :

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1} A_{55} \varphi_{1k} + A_{55} u_{1k0} + L_{13} \varphi_{3k} + \lambda_k [A_{55} u_{1k1} - L_{11} \varphi_{1k} - L_{12} \varphi_{2k} + L_{13} u_{3k0}] + \\ + \sum_{p=2}^{\infty} \lambda_k^p [A_{55} u_{1kp} - L_{11} u_{1k,p-2} - L_{12} u_{2k,p-2} + L_{13} u_{3k,p-1}] = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1} A_{44} \varphi_{2k} + A_{44} u_{2k0} + L_{23} \varphi_{3k} + \lambda_k [A_{44} u_{2k1} - L_{21} \varphi_{1k} - L_{22} \varphi_{2k} + L_{23} u_{3k0}] + \\ + \sum_{p=2}^{\infty} \lambda_k^p [A_{44} u_{2kp} - L_{21} u_{1k,p-2} - L_{22} u_{2k,p-2} + L_{23} u_{3k,p-1}] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1} A_{33} \varphi_{3k} + A_{33} u_{3k0} - L_{31} \varphi_{1k} - L_{32} \varphi_{2k} + \lambda_k [A_{33} u_{3k1} - L_{31} u_{1k0} - L_{32} u_{2k0} - \\ - L_{33} \varphi_{3k}] + \sum_{p=2}^{\infty} \lambda_k^p [A_{33} u_{3kp} - L_{31} u_{1k,p-1} - L_{32} u_{2k,p-1} - L_{33} u_{3k,p-2}] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

При решении системы уравнений (13)–(15) рассмотрим следующие варианты.

**Вариант 1.** Полагаем  $\varphi_{1k} = \partial_2 \varphi$ ,  $\varphi_{2k} = -\partial_1 \varphi$ ,  $\varphi_{3k} = 0$ . Тогда уравнения (13)–(15) примут вид

$$\begin{aligned} u_{1k0} = u_{2k0} = u_{3k1} = 0, & \quad u_{3k0} = (\alpha_{13} - \alpha_{23}) \frac{1}{A_{33}} \partial_1 \partial_2 \varphi, \\ A_{55} \partial_2 \varphi + \lambda_k^2 [A_{55} u_{1k1} - (B_{11} \partial_1^2 + A_{66} \partial_2^2) \partial_2 \varphi] &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$A_{44} \partial_1 \varphi - \lambda_k^2 [A_{44} u_{2k1} + (A_{66} \partial_1^2 + B_{22} \partial_2^2) \partial_1 \varphi] = 0, \quad (17)$$

$$u_{1kp} = (L_{11} u_{1k,p-2} + L_{12} u_{2k,p-2} - L_{13} u_{3k,p-1}) \frac{1}{A_{55}}, \quad (18)$$

$$u_{2kp} = (L_{21}u_{1k,p-2} + L_{22}u_{2k,p-2} - L_{23}u_{3k,p-1}) \frac{1}{A_{44}}, \quad (19)$$

$$u_{3kp} = (L_{31}u_{1k,p-1} + L_{32}u_{2k,p-1} + L_{33}u_{3k,p-2}) \frac{1}{A_{33}}, \quad p \geq 2, \quad (20)$$

где  $B_{11} = A_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{13}(\alpha_{13} - \alpha_{23}) \frac{1}{A_{33}}$ ,  $B_{22} = A_{22} - \alpha_{12} + \alpha_{23}(\alpha_{13} - \alpha_{23}) \frac{1}{A_{33}}$ .

Для случая изотропного материала величины  $B_{11} = B_{22} = A_{66}$ . Тогда уравнения (16) и (17) для определения функции  $\varphi$  совпадают, если положить  $u_{1k1} = u_{2k1} = 0$ . Для ортотропного материала уравнения (16) и (17) будут разными. Поэтому рассмотрим два случая нахождения разрешающих уравнений для функции  $\varphi$ .

1°. Пусть функция  $u_{1k1} = 0$ . Тогда из (16) следует

$$\varphi_1 - \lambda_k^2 \alpha_1 (\partial_2^2 + \mu_1 \bar{\mu}_1 \partial_1^2) \varphi_1 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{A_{66}}{A_{55}}, \quad \mu_1 \bar{\mu}_1 = \frac{B_{11}}{A_{66}}. \quad (21)$$

Уравнение (17) также примет вид (21), если

$$u_{2k1} = \left[ \left( \frac{B_{11}}{A_{55}} - \frac{A_{66}}{A_{44}} \right) \partial_1^2 + \left( \frac{A_{66}}{A_{55}} - \frac{B_{22}}{A_{44}} \right) \partial_2^2 \right] \partial_1 \varphi_1. \quad (22)$$

2°. Полагая функцию  $u_{2k1} = 0$ , из уравнения (17) получим

$$\varphi_2 - \lambda_k^2 \alpha_2 (\partial_2^2 + \mu_2 \bar{\mu}_2 \partial_1^2) \varphi_2 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{B_{22}}{A_{44}}, \quad \mu_2 \bar{\mu}_2 = \frac{A_{66}}{B_{22}}. \quad (23)$$

Уравнение (16) также примет вид (23), если

$$u_{1k1} = \left[ \left( \frac{B_{11}}{A_{55}} - \frac{A_{66}}{A_{44}} \right) \partial_1^2 + \left( \frac{A_{66}}{A_{55}} - \frac{B_{22}}{A_{44}} \right) \partial_2^2 \right] \partial_2 \varphi_2. \quad (24)$$

Заметим, что для изотропного материала уравнения (21) и (23) совпадают, а функции (22) и (24) равны нулю.

**Вариант 2.** Пусть  $\varphi_{1k} = \varphi_{2k} = 0$ ,  $\varphi_{3k} = \varphi_3$ ,  $u_{1k0} = \partial_1 \varphi_3$ ,  $u_{2k0} = \partial_2 \varphi_3$ . Тогда уравнения (13)–(15) приводятся к виду

$$(\alpha_{13} + A_{55}) \partial_1 \varphi_3 + \lambda_k^2 [A_{55} u_{1k2} - (A_{11} \partial_1^2 + (\alpha_{12} + A_{66}) \partial_2^2) \partial_1 \varphi_3] = 0, \quad (25)$$

$$(\alpha_{23} + A_{44}) \partial_2 \varphi_3 + (\alpha_{23} + A_{44}) \partial_2 \varphi_3 + \lambda_k^2 [A_{44} u_{2k2} - ((\alpha_{12} + A_{66}) \partial_1^2 + A_{22} \partial_2^2) \partial_2 \varphi_3] = 0, \quad (26)$$

$$\varphi_3 - \lambda_k^2 \alpha_3 (\partial_2^2 + \mu_3 \bar{\mu}_3 \partial_1^2) \varphi_3 = 0, \quad (27)$$

где

$$u_{1k1} = u_{2k1} = u_{3k0} = u_{3k1} = 0,$$

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_{23} + A_{44}}{A_{33}}, \quad \mu_3 \bar{\mu}_3 = \frac{\alpha_{13} + A_{55}}{\alpha_{23} + A_{44}},$$

$$u_{1kp} = (L_{11}u_{1k,p-2} + L_{12}u_{2k,p-2} - L_{13}u_{3k,p-1}) \frac{1}{A_{55}},$$

$$u_{2kp} = (L_{21}u_{1k,p-2} + L_{22}u_{2k,p-2} - L_{23}u_{3k,p-1}) \frac{1}{A_{44}},$$

$$u_{3kp} = (L_{31}u_{1k,p-1} + L_{32}u_{2k,p-1} + L_{33}u_{3k,p-2}) \frac{1}{A_{33}}, \quad p \geq 3.$$

Уравнения (25) и (26) приводятся к уравнению (27), если

$$u_{1k2} = \left[ \left( A_{11} - (\alpha_{13} + A_{55})^2 \frac{1}{A_{33}} \right) \partial_1^2 + \left( \alpha_{12} + A_{66} - (\alpha_{13} + A_{55})(\alpha_{23} + A_{44}) \frac{1}{A_{33}} \right) \partial_2^2 \right] \partial_1 \varphi_3,$$

$$u_{2k2} = \left[ \left( \alpha_{12} + A_{66} - (\alpha_{13} + A_{55})(\alpha_{23} + A_{44}) \frac{1}{A_{33}} \right) \partial_1^2 + \left( A_{22} - (\alpha_{23} + A_{44})^2 \frac{1}{A_{33}} \right) \partial_2^2 \right] \partial_2 \varphi_3.$$

Таким образом, задача свелась к интегрированию обобщенных метагармонических уравнений (21), (23) и (27). Эти уравнения имеют одинаковую структуру

$$[1 - \lambda^2 \alpha (\partial_2^2 + \mu \bar{\mu} \partial_1^2)] F = 0. \tag{28}$$

Общее решение уравнения (28) представляется в виде суперпозиции функций Бесселя мнимого аргумента:

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^n}{n!} + \frac{\bar{z}^n}{n!} \right) \rho^{-n/2} [C_{1n} I_n(2q\sqrt{\rho}) + C_{2n} K_n(2q\sqrt{\rho})],$$

где  $z = x_1 + \mu x_2$ ,  $\rho = z\bar{z}$ ,  $q^2 = \frac{1}{\lambda^2 \alpha (\mu - \bar{\mu})^2}$ .

**Численные исследования.** Рассмотрим бесконечную пластину произвольной толщины  $2h$ , ослабленную эллиптической полостью, контур  $L$  которой задан уравнениями в параметрической форме

$$x_1 = a \cos \theta, \quad x_2 = b \sin \theta,$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Пластина деформируется постоянными по переменной  $x_3$  внешними усилиями, которые описаны выше. Для определения напряженно-деформированного состояния пластины вблизи полости возможны два способа определения функции  $\varphi_3(z_3)$ : с использованием граничных условий (9) или (11). При проведении численных исследований граничные условия выбирались в форме (11), когда на контуре задавалась величина  $N_r(s) = Pf(\theta)$ . Подынтегральная функция представлялась на контуре в виде ряда по степеням величины  $\sigma = \exp(i\theta)$ :

$$F(\theta) = f(\theta) \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \sigma^{-k} + \bar{a}_k \sigma^k),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N F(\theta_p), \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N F(\theta_p) \exp(i\theta_p k) \quad (N \geq 2n + 1).$$

Здесь равноотстоящие узлы  $\theta_p$  расположены на отрезке  $(0, 2\pi]$ :

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N \leq 2\pi.$$

Интеграл, входящий в правую часть условий (11), примет вид

$$-\int_0^s N_r(s) ds = -P \int_0^\theta F(\theta) d\theta = -P \left[ a_0 \theta + i \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{k} \sigma^{-k} - \frac{\bar{a}_k}{k} \sigma^k \right) \right].$$

Функция  $\varphi_3(z_3)$  определена в области  $S_3$ , которая получается из основной области  $S$  аффинными преобразованиями [9]

$$x_{13} = x_1 + \alpha_3 x_2, \quad x_{23} = \beta_3 x_2, \quad \mu_3 = \alpha_3 + i\beta_3.$$

При этом эллиптическому контуру  $L$  в области  $S_3$  соответствует эллиптический контур  $L_3$ , уравнение которого запишется так:

$$t_3 = x_1 + \mu_3 x_2 = R_3 \sigma + \frac{1}{\sigma} m_3, \tag{29}$$

$$R_3 = \frac{1}{2}(a - i\mu_3 b), \quad m_3 = \frac{1}{2}(a + i\mu_3 b), \quad \sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Функция, отображающая внешность единичного круга на внешность эллиптического контура в области  $S_3$ , на основании уравнения (29) примет вид

$$z_3 = R_3 \zeta_3 + \frac{m_3}{\zeta_3}, \quad \zeta_3 = r_3 \sigma, \quad r_3 \geq 1. \tag{30}$$

Представим функцию  $\varphi_3(z_3)$  в виде ряда

$$\varphi_3(z_3) = \alpha \ln \zeta_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta_3^k}, \tag{31}$$

где переменная  $\zeta_3$  связана с  $z_3$  зависимостями (30).

Учитывая, что на контуре  $r_3 = 1$ , а переменная  $\zeta_3 = \sigma$ , методом рядов из условий (11) получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения функции (31). Из этой системы найдем

$$i\alpha - i\bar{\alpha} = -Pa_0, \tag{32}$$

$$\alpha_k = -Pia_k \frac{1}{k}, \quad k \geq 1.$$

Для определения коэффициента  $\alpha$  к уравнению (32) добавим условие однозначности перемещений

$$\frac{\alpha}{A_{44}\mu_3} - \frac{\bar{\alpha}}{A_{44}\bar{\mu}_3} = 0.$$

На рис. 1 изображены графики распределения напряжений  $\frac{\sigma_{z\theta}}{P} = (\sigma_{40} \cos(n, x_1) - \sigma_{50} \cos(n, x_2)) \frac{1}{P}$  около круговой полости, для случая, когда  $N(s) = p = \text{const}$  для значений параметра  $\mu_3 = i\beta_3 = 0.2i, 0.8i, i, 1.25i, 5i$ . Напряжения являются знакопеременными и при стремлении параметра  $\beta_3$  к значению, равному единице с обеих сторон, они стремятся к нулю.

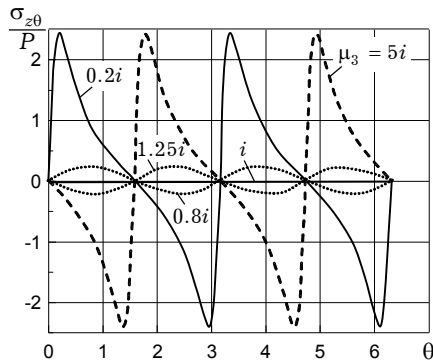


Рис. 1

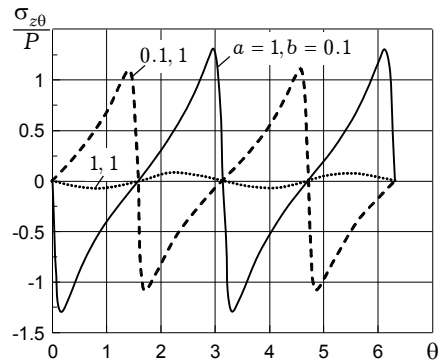


Рис. 2

На рис. 2 приведены графики для тех же напряжений  $\frac{\sigma_{z0}}{P}$ , что и на рис. 1, около эллиптических  $((a, b) = (0.1, 1)$  и  $(a, b) = (1, 0.1)$ ) и кругового  $((a, b) = (1, 1))$  контуров. При этом считалось, что пластина изготовлена из стеклопластика со следующими техническими постоянными [2]:

$$\frac{E_x}{E} = 4.76, \quad \frac{E_y}{E} = 2.07, \quad \frac{E_z}{E} = 1.45, \quad \frac{G_{xy}}{E} = 0.531, \quad \frac{G_{yz}}{E} = 0.434, \quad \frac{G_{zx}}{E} = 0.501, \\ \mu_{xy} = 0.149, \quad \mu_{yz} = 0.325, \quad \mu_{zx} = 0.099, \quad \beta_3 = 1.0744, \quad E = 10^4 \text{ МПа.}$$

Анализ результатов расчета показывает, что модули напряжений возрастают при отклонении параметра  $\beta_3$  от единицы как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения. Рост абсолютных значений напряжений наблюдается также и при отклонении контура от кругового.

1. Алтухов Е. В. Статические трехмерные задачи для трансверсально-изотропных пластин // Механика композитов: В 12 т.; Т. 7: Концентрация напряжений / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – Киев: ПТОО «А.С.К.», 1998. – С. 114–137.
2. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 247 с.
3. Бурак Я. И., Сухорольский М. А. Последовательный подход к построению обобщенных решений краевых задач теории упругости для ортотропного тела // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 68–74.
4. Галлилеев С. Н., Матросов А. В. Метод начальных функций в расчете слоистых плит // Прикл. механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 64–71.
5. Космодамианский А. С. Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 4. – С. 21–48.
6. Космодамианский А. С. Пространственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: Обзор // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 12. – С. 3–21.
7. Космодамианский А. С., Сторожев В. И. Динамические задачи теории упругости анизотропных сред. – Киев: Наук. думка, 1985. – 176 с.
8. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. – Киев: Наук. думка, 1978. – 240 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 415 с.
10. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
11. Немши Ю. Н. Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) // Прикл. механика. – 2000. – 36, № 2. – С. 3–38.

#### ОДНОРІДНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ РІВНОВАГИ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН З ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ НА ТОРЦЯХ ТИПУ ДІАФРАГМИ

*Розглядається тривимірна задача пружної рівноваги ортотропних пластин. Плоскі грані пластини покриті діафрагмою. Для цього класу задач одержано однорідні розв'язки. Проведено чисельні дослідження напруженого стану нескінченної пластини з еліптичним отвором, на бічній поверхні якої задано зовнішні зусилля.*

#### HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF THE EQUILIBRIUM OF ORTHOTROPIC PLATES WITH BOUNDARY CONDITIONS AT END FACES SUCH AS THE DIAPHRAGM

*The three-dimensional problem of an elastic equilibrium of orthotropic plates is considered. Flat edges of a plate are covered with a diaphragm. For the given class of problems homogeneous solutions are obtained. Numerical researches of an strain state of an infinite plate with an elliptic hole on which lateral surface exterior effort are set are carried out.*