УДК 539.3: 519.6

Л. І. Винницька, Н. Я. Савула

ДЕЯКІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ КОРНА В ЛІНІЙНІЙ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Отримано нерівність типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка. Для безмоментної теорії оболонок розглянуто частковий випадок нерівності типу Корна, коли геометрія серединної поверхні визначається декартовими координатами на площині.

У дослідженні варіаційних задач класичної теорії пружності важливу роль відіграє нерівність Корна, яка застосовується для доведення додатної визначеності відповідних операторів. При обґрунтуванні коректності варіаційних задач, які виникають в теорії оболонок, використовують так звані нерівності типу Корна, які доводять еліптичність білінійної форми, а у випадку симетричного оператора − його додатну визначеність. Значний внесок в обґрунтування лінійних і нелінійних теорій оболонок зробив Ф. Сьярле та його учні, основні результати досліджень подано у праці [5]. Стаття [6] містить виведення нерівності типу Корна для моделі Кірхгова − Лява як наслідок нерівності Корна в просторі.

Широке прикладне застосування мають моделі безмоментної теорії і теорії оболонок типу Тимошенка, для дослідження яких часто застосовують числові методи. Тому важливим завданням є обґрунтування коректності відповідних варіаційних задач. У цій роботі доведено нерівності типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка та для часткового випадку безмоментної теорії оболонок, які можуть бути використані у доведенні додатної визначеності операторів крайових задач.

Криволінійна система координат на поверхні Нехай $s \subset \mathbb{R}^2$ − деяка область на площині, а $S \subset \mathbb{R}^3$ − поверхня, яка є образом s при відображенні $\boldsymbol{\theta}$. Через (ξ_1, ξ_2) позначимо координати довільної точки з області s. Тоді відображення $\boldsymbol{\theta}$ подамо у вигляді

$$\boldsymbol{\theta} : (\xi_1, \xi_2) \in \bar{s} \subset \mathbb{R}^2 \to \boldsymbol{\theta}(\xi_1, \xi_2) \in \bar{S} \subset \mathbb{R}^3 . \qquad (1)$$

Тут $\bar{s}$ та $\bar{S}$ позначають замикання s і S відповідно. Відображення $\boldsymbol{\theta}$ є радіусом-вектором поверхні S, яка віднесена до криволінійної системи координат, ξ_1- та ξ_2-лінії є координатними лініями на поверхні.

Введемо позначення для похідних від $\boldsymbol{\theta}$ за ξ_1 і ξ_2:

$$\boldsymbol{\theta}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \xi_\alpha} .$$

Ці вектори є дотичними до координатних ліній і визначають площину, дотичну до поверхні S у довільній точці $\boldsymbol{\theta}(\xi_1, \xi_2)$. Будемо вважати, що вектори $\boldsymbol{\theta}_1$ та $\boldsymbol{\theta}_2$ є лінійно незалежними. Означимо одиничний вектор нормалі до дотичної площини формулою

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\boldsymbol{\theta}_1 \times \boldsymbol{\theta}_2}{|\boldsymbol{\theta}_1 \times \boldsymbol{\theta}_2|} .$$

Позначимо через A_α коефіцієнти Ляме, а через k_α − головні кривини поверхні. Введемо одиничні вектори

$$\mathbf{a}_\alpha = \frac{\boldsymbol{\theta}_\alpha}{A_\alpha} .$$

Під локальною базою, що визначена в деякій точці поверхні S, будемо розуміти трійку одиничних векторів $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Надалі вважаємо, що поверхню віднесено до ліній кривини. Тоді трійка $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ є триортогональною.

Криволінійна система координат у просторі. Нехай задано відображення

$$\mathbf{\Theta} : (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbf{\Theta}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \subset \mathbb{R}^3 .$$

Використовуючи відображення (1), подамо $\mathbf{\Theta}$ у вигляді

$$\mathbf{\Theta} = \boldsymbol{\theta}(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \mathbf{a}_3(\xi_1, \xi_2) ,$$

де $\boldsymbol{\theta}(\xi_1, \xi_2)$ − радіус-вектор деякої поверхні, яку будемо називати серединною, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3(\xi_1, \xi_2)$ − вектор нормалі до серединної поверхні.

Визначимо трійку векторів

$$\mathbf{\Theta}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{\Theta}}{\partial \xi_\alpha} = \boldsymbol{\theta}_\alpha + \xi_3 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \mathbf{\Theta}_3 = \mathbf{a}_3 ,$$

яка є триортогональною, якщо серединну поверхню віднести до ліній кривини. Коефіцієнти Ляме H_i визначаються співвідношеннями

$$H_\alpha = A_\alpha (1 + k_\alpha \xi_3), \qquad H_3 = 1 .$$

Введемо одиничні вектори

$$\mathbf{g}_i = \frac{\mathbf{\Theta}_i}{H_i} .$$

Відомо, що між $\mathbf{a}_i$ та $\mathbf{g}_i$ виконуються співвідношення

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{g}_i . \tag{2}$$

Нерівність типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка. Для зручності вважаємо, що латинські індекси набувають значень з множини $\{1,2,3\}$, а грецькі − з множини $\{1,2\}$. Латинськими літерами позначаємо переміщення та деформації в класичній теорії пружності, а грецькими − в теорії оболонок.

Нерівність Корна в просторі, яку застосовують при дослідженні варіаційних задач теорії пружності, у довільній системі координат при відповідному виборі відображення $\mathbf{\Theta}$ і співвідношень, що визначають деформації, встановлена у твердженні такої теореми [6].

Теорема 1. *Нехай* Ω *− деяка область в* $\mathbb{R}^3$ *з границею* Γ, Γ_0 *− вимірна підмножина* Γ *з мірою, відмінною від нуля. Означимо простір*

$$U(\Omega) = \{ \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) : u_i \in W_2^{(1)}(\Omega), \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \} .$$

Нехай $\mathbf{\Theta}$ *є* C^2*-дифеоморфізм з* $\bar{\Omega}$ *на її відображення* $\mathbf{\Theta}(\bar{\Omega})$. *Тоді існує стала* $\mu = \mu(\Omega, \Gamma_0, \mathbf{\Theta}) > 0$ *така, що*

$$\left(\sum_i \| e_{ii}(\mathbf{u}) \|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j,i \neq j} \| e_{ij}(\mathbf{u}) \|^2_{L_2(\Omega)} \right) \geq \mu \sum_i \| u_i \|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \qquad \forall \, \mathbf{u} \in U(\Omega) ,$$

де $e_{ij}(\mathbf{u})$ *− компоненти тензора деформацій.*

Покажемо, що нерівність типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка [3] можна отримати як наслідок нерівності Корна в просторі. При цьому скористаємось такою теоремою [4].

Теорема 2 (про обернене відображення). *Неперервне бієктивне відображення з одного банахового простору на інший має неперервне обернене відображення.*

Доведення нерівності типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка здійснимо в декілька етапів. Спочатку побудуємо відображення з множини переміщень і кутів повороту теорії оболонок Тимошенка в множину переміщень теорії пружності. Задамо норми в області визначення та області значень і доведемо, що такий оператор є неперервним. Покажемо, що при відповідному виборі області значень побудоване відображення є бієктивним. Скориставшись теоремою про обернене відображення, отримаємо нерівність типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка з нерівності Корна в просторі.

Будемо вважати, що $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ є базовими векторами для серединної поверхні оболонки, а $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ – базовими векторами в просторі, для яких виконується рівність (2), причому $\xi_3 \in [-h/2, h/2]$, де h – товщина оболонки.

Лема 1. *Нехай задано відображення* $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Theta}$. *Будь-якому вектору*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\xi_1, \xi_2) = (v_1, v_2, v_3, \gamma_1, \gamma_2)$$

з простору

$$V(S) = \{\mathbf{v} : v_i, \gamma_\alpha \in W_2^{(1)}(S),\ \mathbf{v} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

поставимо у відповідність вектор

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u_1, u_2, u_3),$$

який визначається співвідношенням

$$\sum_i u_i \mathbf{g}_i = \sum_\alpha (v_\alpha + \xi_3 \gamma_\alpha)\, \mathbf{a}_\alpha + v_3 \mathbf{a}_3. \tag{3}$$

Тоді

1°) $\mathbf{u} \in \tilde{U}(\Omega) = \{\mathbf{u} : u_i \in W_2^{(1)}(\Omega),\ \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_0 \times [-h/2, h/2]\}$;

2°) співвідношення (3) *визначає лінійне відображення*

$$\mathbf{F} : \mathbf{v} \in V(S) \to \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \in U(\Omega);$$

3°) вирази для деформацій мають вигляд

$$e_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \xi_3 \chi_{\alpha\alpha}, \qquad e_{33} = \varepsilon_{33} = 0,$$

$$e_{12} = \varepsilon_{12} + \xi_3 \tau_{12}, \qquad e_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3},$$

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A_\alpha}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi_\alpha} + \frac{u_\beta}{A_\alpha A_\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi_\beta} + k_\alpha v_3,$$

$$\chi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A_\alpha}\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\gamma_\beta}{A_\alpha A_\beta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \xi_\beta}, \qquad \alpha \neq \beta,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\frac{v_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(\frac{v_2}{A_2}\right), \qquad \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha + \frac{1}{A_\alpha}\frac{\partial v_3}{\partial \xi_\alpha} - k_\alpha v_\alpha,$$

$$\tau_{12} = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial \xi_1} + k_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}\right) + \frac{1}{A_2}\left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi_2} + k_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2}\right) -$$

$$- \frac{1}{A_1 A_2}\left((\gamma_1 + k_2 v_1)\frac{\partial A_1}{\partial \xi_2} + (\gamma_2 + k_1 v_2)\frac{\partial A_2}{\partial \xi_1}\right).$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\mathbf{g}_i = \mathbf{a}_i$, то

$$u_\alpha = v_\alpha + \xi_3 \gamma_\alpha,$$

$$u_3 = v_3. \tag{4}$$

Отже, $u_i \in W_2^{(1)}(\Omega)$, $\mathbf{u} = 0$ на $\Gamma_0 \times [-h/2, h/2]$.

Відображення $\mathbf{F}$ є лінійним, тому що $V(S), \tilde{U}(\Omega)$ – лінійні простори та виконується

$$\mathbf{F}(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_1) = \alpha \mathbf{F}(\mathbf{v}_1) + \beta \mathbf{F}(\mathbf{v}_2), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Вектор $\mathbf{u}$ подамо як суму векторів, заданих на поверхні:

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{v}} + \xi_3 \tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \qquad \tilde{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3), \qquad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\gamma_1, \gamma_2, 0).$$

Тоді вирази для деформацій отримуємо при диференціюванні векторів, заданих на поверхні, із застосуванням формул Ґаусса – Вейнгартена та з урахуванням триортогональності базових векторів. ◊

Лема 2. *У просторах* $V(S)$ *та* $\tilde{U}(\Omega)$ *означимо норми*

$$\|\mathbf{v}\|_{V(S)} = \left\{ \sum_i \|v_i\|^2_{W_2^{(1)}(S)} + \sum_\alpha \|\gamma_\alpha\|^2_{W_2^{(1)}(S)} \right\}^{1/2}, \tag{5}$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\tilde{U}(\Omega)} = \left\{ \sum_i \|u_i\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Тоді лінійне відображення $\mathbf{F} : V(S) \to \tilde{U}(\Omega)$ *є неперервним.*

Д о в е д е н н я. Простори $V(S)$ та $\tilde{U}(\Omega)$ є метричними з метриками, визначеними нормами (5) і (6). Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Покажемо, що $\exists\, \delta > 0$ таке, що $\forall\, \mathbf{v}^1, \forall\, \mathbf{v}^2$ з простору $V(S)$ таких, що $\left\|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\right\|_{V(S)} < \delta$ виконується $\left\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right\|_{\tilde{U}(\Omega)} < \varepsilon$ для відповідних $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$. Для цього скористаємось поданням (4) та очевидною нерівністю

$$(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2).$$

Тоді отримуємо

$$\left\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\right\|^2_{\tilde{U}(\Omega)} = \sum_\alpha \left\|(v_\alpha^1 - v_\alpha^2) + \xi_3(\gamma_\alpha^1 - \gamma_\alpha^2)\right\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} + \left\|v_3^1 - v_3^2\right\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \le$$

$$\le \tilde{\varepsilon} \left\|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\right\|^2_{V(S)} < \varepsilon^2, \qquad \tilde{\varepsilon} = \min\left\{2h, h\left(1 + \frac{h^2}{6}\right)\right\},$$

Отже, $\delta = \varepsilon / \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$. Відображення $\mathbf{F}$ є неперервним за означенням. ◊

Лема 3. *Відображення* $\mathbf{F} : V(S) \to U(\Omega)$, *де*

$$U(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \tilde{U}(\Omega) : \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_3} = \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2), \frac{\partial u_3}{\partial \xi_3} = 0 \right\},$$

є бієктивним.

Д о в е д е н н я. *Ін'єктивність*. Нехай $\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^2$. Покажемо, що для відповідних $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2$ виконується рівність $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2$. Зі співвідношень (4) маємо

$$0 = u_3^1 - u_3^2 = v_3^1 - v_3^2 \;\Rightarrow\; v_3^1 = v_3^2,$$

$$0 = u_\alpha^1 - u_\alpha^2 = (v_\alpha^1 - v_\alpha^2) + \xi_3(\gamma_\alpha^1 - \gamma_\alpha^2) \;\Rightarrow\; (v_\alpha^1 - v_\alpha^2) = \xi_3(\gamma_\alpha^2 - \gamma_\alpha^1).$$

Оскільки функції $(v_\alpha^1 - v_\alpha^2)$ та $(\gamma_\alpha^2 - \gamma_\alpha^1)$ залежать тільки від ξ_1, ξ_2, а ξ_3 набуває довільних значень, то остання рівність виконується лише у випадку, коли

$$(v_\alpha^1 - v_\alpha^2) = 0 \;\Rightarrow\; v_\alpha^1 = v_\alpha^2,$$

$$(\gamma_\alpha^2 - \gamma_\alpha^1) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma_\alpha^1 = \gamma_\alpha^2.$$

Сюр'єктивність. Покажемо, що

$$\forall\, \mathbf{u} \in U(\Omega) \qquad \exists\, \mathbf{v} \in V(S) : \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}.$$

Оскільки $\dfrac{\partial u_3}{\partial \xi_3} = 0$ і враховуючи вигляд відображення $\mathbf{F}$ отримуємо, що $v_3 = u_3$.

Скористаємось тим, що $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_3} = \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2)$. Тоді v_α, γ_α можна подати у вигляді

$$\gamma_\alpha = \varphi_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_3}, \qquad v_\alpha = u_\alpha - \xi_3 \varphi_\alpha,$$

причому $v_\alpha = v_\alpha(\xi_1, \xi_2)$, оскільки $\dfrac{\partial}{\partial \xi_3}(u_\alpha - \xi_3 \varphi_\alpha) = 0$. ◊

Теорема 3. *Нерівність типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка є наслідком нерівності Корна в просторі та лем* 1, 2, 3.

Д о в е д е н н я. Відображення $\mathbf{F} : V(S) \to U(\Omega)$ є неперервним і бієктивним, простори $V(S)$, $U(\Omega)$ – банахові, бо $W_2^{(1)}$ – гільбертів простір, а, отже, $\tilde{U}(\Omega)$, $V(\Omega)$ – також гільбертові простори, $U(\Omega)$ – замкнений підпростір простору $\tilde{U}(\Omega)$. Тоді, згідно з теоремою про обернене відображення, $\mathbf{F}^{-1}$ є неперервним, а, отже, і обмеженим. За означенням обмеженості існує стала $C_1 > 0$ така, що

$$\| \mathbf{v} \|_{V(S)} \le \sqrt{C_1}\, \| \mathbf{u} \|_{U(\Omega)} = \sqrt{C_1}\, \| \mathbf{u} \|_{W_2^{(1)}(\Omega)}.$$

Використовуючи нерівність Корна в просторі, отримуємо

$$\left\{ \sum_i \| v_i \|^2_{W_2^{(1)}(S)} + \sum_\alpha \| \gamma_\alpha \|^2_{W_2^{(1)}(S)} \right\} \le$$

$$\le \frac{C_1}{\mu} \left\{ \sum_{i,j} \| e_{ij}(\mathbf{u}) \|^2_{L_2(\Omega)} \right\} \qquad \forall\ \mathbf{u} \in U(\Omega). \qquad ◊$$

Частковий випадок нерівності типу Корна для безмоментної теорії оболонок. Нехай $k_\alpha = 0$. Серединну поверхню S оболонки віднесемо до декартової системи координат ($A_\alpha = 1$). Нехай Γ – границя серединної поверхні. Тоді рівняння рівноваги для безмоментної оболонки [1] набудуть вигляду

$$-\frac{\partial T_{11}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial T_{12}}{\partial \xi_2} = f_1,$$

$$-\frac{\partial T_{12}}{\partial \xi_1} - \frac{\partial T_{22}}{\partial \xi_2} = f_2 \qquad \forall (\xi_1, \xi_2) \in S. \tag{7}$$

Зусилля визначаються співвідношеннями

$$T_{\alpha\alpha} = \frac{Eh}{1 - \nu^2}(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \nu \varepsilon_{\beta\beta}), \qquad T_{\alpha\beta} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad \alpha \ne \beta, \tag{8}$$

де E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки.

Вирази для деформацій мають вигляд

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial \xi_\alpha}, \qquad \alpha \ne \beta. \tag{9}$$

Будемо вважати, що

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = 0 \qquad \text{на} \qquad \Gamma. \tag{10}$$

Запишемо систему рівнянь (7) в операторному вигляді:

$$A\mathbf{v} = \mathbf{f}, \qquad \mathbf{f} = (f_1, f_2).$$

Враховуючи граничну умову (10), а також подання (8), (9), для скалярного добутку $(A\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$ в просторі L_2, де $\tilde{\mathbf{v}}$ – довільна функція з області визначення оператора A, отримуємо такий вираз:

$$(A\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int\limits_S \left(T_{11}\tilde{\varepsilon}_{11} + T_{22}\tilde{\varepsilon}_{22} + T_{12}\tilde{\varepsilon}_{12}\right) dS =$$

$$= \frac{Eh}{1-\nu^2} \int\limits_S \left(\varepsilon_{11}\tilde{\varepsilon}_{11} + \varepsilon_{22}\tilde{\varepsilon}_{22} + \nu(\tilde{\varepsilon}_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\tilde{\varepsilon}_{22}) + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}\tilde{\varepsilon}_{12}\right) dS .$$

Скористаємось очевидною нерівністю

$$2ab \ge -a^2 - b^2 .$$

Тоді для виразу $(A\mathbf{v}, \mathbf{v})$ отримуємо

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \frac{Eh}{4(1+\nu)} \int\limits_S \left({\varepsilon_{11}}^2 + {\varepsilon_{22}}^2 + 2{\varepsilon_{12}}^2\right) dS . \tag{11}$$

Відомо, що для довільного вектора переміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u_1, u_2)$ з області визначення оператора плоскої задачі теорії пружності та відповідних деформацій $e_{\alpha\beta}$ виконується нерівність Корна [2]

$$\left(\sum_\alpha \left\| e_{\alpha\alpha} \right\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{\alpha,\beta,\alpha\ne\beta} \left\| e_{\alpha\beta} \right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) \ge \mu \sum_\alpha \left\| u_\alpha \right\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} , \tag{12}$$

де $e_{11} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, $e_{22} = \dfrac{\partial u_2}{\partial y}$, $e_{12} = e_{21} = \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x}$, $\mu = \mathrm{const}$, $\mu > 0$.

Оскільки вирази для деформацій $e_{\alpha\beta}$ та $\varepsilon_{\alpha\beta}$ співпадають, то використаємо нерівність (12) для оцінки співвідношення (11):

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge \frac{Eh}{4(1+\nu)} \int\limits_S \left({\varepsilon_{11}}^2 + {\varepsilon_{22}}^2 + 2{\varepsilon_{12}}^2\right) dS \ge$$

$$\ge \frac{Eh\mu}{4(1+\nu)} \int\limits_S \left(v_1^2 + v_2^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)^2\right) dS = \frac{Eh\mu}{4(1+\nu)} \left(\sum_\alpha \left\| v_\alpha \right\|^2_{W_2^{(1)}(S)}\right).$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 4. *Нехай* S *– серединна поверхня оболонки товщини* h, Γ *– границя серединної поверхні. Нехай* $k_\alpha = 0$, $A_\alpha = 1$, *рівняння рівноваги мають вигляд* (7), *виконується гранична умова* (10) *та співвідношення* (8), (9). *Тоді має місце нерівність*

$$\left(\sum_\alpha \left\| \varepsilon_{\alpha\alpha} \right\|^2_{L_2(S)} + \sum_{\alpha,\beta,\alpha\ne\beta} \left\| \varepsilon_{\alpha\beta} \right\|^2_{L_2(S)}\right) \ge \mu \sum_\alpha \left\| v_\alpha \right\|^2_{W_2^{(1)}(S)} .$$

Висновки. Отримано нерівність типу Корна для теорії оболонок типу Тимошенка як наслідок нерівності Корна в просторі, записаної в криволінійній системі координат. Для безмоментної теорії оболонок розглянуто частковий випадок, коли серединна поверхня є областю на площині, геометрія якої визначається в декартовій системі координат. Тоді нерівність типу Корна для безмоментної теорії оболонок отримується як наслідок нерівності Корна на площині. Ці результати доводять також еліптичність відповідних білінійних форм і дають змогу обґрунтувати коректність варіаційних задач.

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1953. – 544 с.
2. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. – Москва – Ленинград: Гостехиздат, 1952. – 216 с.
3. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львов: Изд-во при Львов. гос. ун-те, 1978. – 159 с.
4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1: Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1977. – 357 с.
5. *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. – Vol. III: Theory of Shells. – Amsterdam: North-Holland, 2000. – 666 p. – (Series «Studies in Mathematics and its Applications».)
6. *Ciarlet P. G., Mardare S.* On Korn's inequalities in curvilinear coordinates // Math. Models Appl. Sci. – 2001. – **11.** – P. 1379–1391.

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОРНА В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Получено неравенство типа Корна для теории оболочек Тимошенко. Для безмоментной теории рассмотрен частный случай неравенства типа Корна, когда геометрия срединной поверхности определяется декартовыми координатами на плоскости.

SOME INEQUALITIES OF KORN'S TYPE IN LINEAR SHELL THEORY

The inequality of Korn's type is obtained in Timoshenko shell theory. A particular case of the inequality of Korn's type is obtained in membrane shell theory, when geometry of the middle surface is defined by plane Cartesian coordinates.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів

Одержано
11.06.08