УДК 512.552.12

С. І. Білявська

УЗАГАЛЬНЕНИЙ СТАБІЛЬНИЙ РАНГ КІЛЕЦЬ

Вводиться поняття узагальненого стабільного рангу кілець. Обчислено узагальнений стабільний ранг кільця матриць над кільцем елементарних дільників і кільця матриць над одинично регулярним кільцем. Доводиться, що над кільцем з елементарною редукцією матриць довільна квадратна матриця порядку n є сумою двох матриць з групи $GE_n(R)$.

Стабільний ранг кілець є одним з важливих інваріантів теорії кілець. Це поняття прийшло в теорію кілець з *K*-теорії і виявилось надзвичайно корисним при розв'язанні ряду відкритих проблем теорії кілець, особливо в питаннях про можливу діагональну редукцію матриць [1, 2]. У той же час, з'являється ряд узагальнених понять стабільного рангу [3, 4]. В цій роботі пропонується одне з таких узагальнень, а саме: вводиться поняття узагальненого стабільного рангу. Також показано, що кільце матриць над кільцем елементарних дільників має узагальнений стабільний ранг $(2,2)$, а кільце матриць над одинично регулярним кільцем − $(2,1)$.

М. Генріксен показав [5], що над кільцем елементарних дільників довільна квадратна матриця є сумою двох оборотних матриць.

У цій роботі показано, що над кільцем з елементарною редукцією матриць довільна квадратна матриця є сумою двох матриць, які належать групі елементарних матриць.

Введемо необхідні означення. Під кільцем будемо розуміти асоціативне кільце з $1 \neq 0$. Через $U(R)$ позначимо групу оборотних елементів кільця R, а через $GE_n(R)$ − її підгрупу породжену елементарними матрицями.

Нагадаємо, що кільце R є кільцем елементарних дільників (за Генріксеном), якщо для довільної квадратної матриці A порядку n над кільцем R існують матриці $P, Q \in GL_n(R)$, такі що матриця PAQ − діагональна. Якщо ж довільна матриця A зводиться до діагонального вигляду перетвореннями з $GE_n(R)$, то таке кільце R називають кільцем з елементарною редукцією матриць.

Розглянемо детальніше поняття стабільного рангу. Рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R називають унімодулярним, якщо $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$. Кільце R має стабільний ранг n (у позначеннях $ст.р.(R) = n$), якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ довжини $n+1$ існують такі елементи $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним [7].

Надалі через $U_m(R)$ позначатимемо

$$U_m(R) = \{x = u_1 + u_2 + \ldots + u_m \mid u_i \in U(R),\ i = 1,2,\ldots,m\}.$$

Будемо говорити, що кільце R має узагальнений стабільний ранг (m,n) (у позначеннях $уз.ст.р.(R) = (m,n)$), якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ довжини $n+1$ існують такі елементи $b_i \in U_m(R)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, що рядок $(a_1 + a_{n+1}b_1, a_2 + a_{n+1}b_2, \ldots, a_n + a_{n+1}b_n)$ є унімодулярним.

Обчислимо узагальнений стабільний ранг деяких класів кілець.

Теорема 1. *Кільце матриць над кільцем елементарних дільників має узагальнений стабільний ранг* (2, 2).

Д о в е д е н н я. Оскільки кільце елементарних дільників має стабільний ранг 2 [1, 2], то згідно з [6] стабільний ранг кільця матриць над кільцем елементарних дільників дорівнює 2. Згідно з [5] довільна матриця над кільцем елементарних дільників є сумою двох оборотних матриць. А тому таке кільце має узагальнений стабільний ранг (2, 2). ◊

Теорема 2. *Кільце матриць над одинично регулярним кільцем має узагальнений стабільний ранг* (2, 1).

Д о в е д е н н я. Згідно з [8] одинично регулярне кільце R є кільцем елементарних дільників (за Генріксеном). На підставі [8] стабільний ранг одинично регулярного кільця дорівнює 1. Згідно з [6] стабільний ранг кільця матриць над одинично регулярним кільцем дорівнює 1. З [5] маємо, що довільна матриця над одинично регулярним кільцем є сумою двох оборотних матриць, а отже, узагальнений стабільний ранг кільця матриць над одинично регулярним кільцем дорівнює $(2,1)$. ◊

Виявляється, що має місце більш загальна властивість:

Теорема 3. *Якщо R є кільцем узагальненого стабільного рангу $(n,1)$, то довільний елемент з R є сумою $n+1$ оборотних елементів.*

Д о в е д е н н я. Нехай a − довільний ненульовий і необоротний елемент із R. Тоді $aR+(-1)R=R$. Згідно з обмеженнями, накладеними на кільце R, маємо n оборотних елементів $u_1,u_2,\dots,u_n \in U(R)$ таких, що $a-(u_1+ + u_2+\dots+u_n)=u_{n+1} \in U(R)$. Звідси отримуємо, що $a=u_1+u_2+\dots+u_n+u_{n+1}$. Теорему доведено. ◊

Виявляється, що у випадку кілець з елементарною редукцією матриць, ці результати можна уточнити:

Теорема 4. *Нехай R − кільце з елементарною редукцією матриць. Тоді довільна квадратна матриця A порядку n над R є сумою двох оборотних матриць, які належать групі $GE_n(R)$.*

Д о в е д е н н я. Нехай A − квадратна матриця над R порядку n. Оскільки R − кільце з елементарною редукцією матриць, то існують такі оборотні матриці $P, Q \in GE_n(R)$, що

$$PAQ=\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n).$$

Зауважимо, що серед елементів ε_i можуть бути й нулі, причому елементи ε_i необов'язково мають властивість подільності, тобто R є кільцем елементарних дільників (за Генріксеном). Можемо записати

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{Vmatrix} = \underbrace{\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{Vmatrix}}_{S} + \dots$$

$$+\underbrace{\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \varepsilon_n \end{Vmatrix}}_{T} = S+T.$$

Причому матриці S, T належать групі $GE_n(R)$, оскільки

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 1 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix} \ldots$$

$$\ldots \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{n-1} & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_n \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси отримуємо $A = P^{-1}SQ^{-1} + P^{-1}TQ^{-1}$, де $P^{-1}, Q^{-1}, S, T \in GE_n(R)$. ◊

1. *Забавський Б. В.* Кільця, над якими довільна матриця допускає діагональну редукцію елементарними перетвореннями // Мат. студії. – 1997. – **8**, № 2. – С. 134–135.
2. *Степанов А. В.* Идеальный стабильный ранг колец // Вести Ленингр. ун-та. – 1986. – № 3. – С. 45–51.
3. *Chen H.* Generalized stable exchange rings // Sout Asian. Bull. Math. – 2000. – **24**. – P. 19–24.
4. *Henriksen M.* On a class of regular rings that are elementary divisior rings // Arch. Math. – 1973. – **24**, No. 2. – P. 133–141.
5. *Henriksen M.* Two classes of rings generated by their units // J. Algebra. – 1974. – **31**. – P. 182–193.
6. *Vaserstein L. N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Func. Anal. Appl. – 1971. – **5**. – P. 102–110.
7. *Zabavsky B. V.* Digonalization of matrices over ring with finite stable rank // Вісн. Львів. ун-ту. – 2003. – **61**. – С. 206–211.
8. *Zabavsky B. V.* Diagonalizability theorem for matrices over rings with finite stable range // Algebra and Discrete. Math. – 2005. – No. 1 – P. 134–148.

ОБОБЩЕННЫЙ СТАБИЛЬНЫЙ РАНГ КОЛЕЦ

Вводится понятие обобщенного стабильного ранга колец. Вычислены обобщенный стабильный ранг кольца матриц над кольцом элементарных делителей и кольца матриц над единично регулярным кольцом. Доказано, что над кольцом с элементарной редукцией матриц произвольная квадратная матрица порядка n является сумой двух матриц из группы $GE_n(R)$.

GENERALIZED STABLE RANK OF RINGS

It is introduced the notion of generalized stable rank of rings. Also calculated generalized stable rank of matrice ring over an elementary divisor ring and matrice ring over unit regular ring. It is proved that over ring with elementary reduce of matrices every square n-th order matrice is a sum of two matrices, which belong to group $GE_n(R)$.

Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,

Одержано
13.11.08