УДК 514.76

В. М. Кузаконь

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ РОЗШАРУВАННЯ КРИВИХ НА ПЛОЩИНІ ВІДНОСНО $\mathbb{R}$-КОНФОРМНО-МЕТРИЧНОЇ ГРУПИ

Наведено повний опис алгебри диференціальних інваріантів розшарування кривих на площині відносно $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи.

1. Вступ. Нехай $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ − розшарування кривих на площині. Нагадаємо, що перетворення $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називають конформно-метричним стосовно метрики ρ, якщо

$$\rho(\psi(a), \psi(b)) = g_\psi \rho(a, b) \tag{1}$$

для деякої додатної функції $g_\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ та для довільних точок $a, b \in \mathbb{R}^2$. Якщо ж при перетворенні ψ метрика домножується на додатну константу (тобто у формулі (1) $g_\psi \in \mathbb{R}^+$), то таке перетворення будемо називати $\mathbb{R}$-*конформно-метричним*, а відповідну групу Лі − $\mathbb{R}$-*конформно-метричною*.

Надалі будемо припускати, що ρ − евклідова метрика і будемо розглядати лише $\mathbb{R}$-конформно-метричні перетворення. У цьому випадку $\mathbb{R}$-конформно-метрична група утворюється групою перетворень площини (тобто паралельними перенесеннями та поворотами на площині) та гомотетією. Знайдемо диференціальні інваріанти розшарування кривих φ відносно цієї групи.

В координатах розшарування φ можна задати за допомогою деякої гладкої функції (з класу C^∞) від двох змінних $u = f(x_1, x_2)$ такої, що її диференціал $df \neq 0$. Лінії рівня цієї функції співпадають з кривими розшарування. Тут x_1, x_2 − координати на площині, а u − координата на прямій $\mathbb{R}$. При цьому функція f визначена з точністю до каліброочного перетворення $f \to F(f)$, де $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ − деяка гладка функція.

$\mathbb{R}$-конформно-метрична група площини разом з каліброочним перетворенням прямої породжує псевдогрупу Лі простору $J^0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ з координатами x_1, x_2, u, яку позначатимемо через G_{cm}, а її підняття у простір k-джетів $J^k\mathbb{R}^2$ − через $G_{\mathrm{cm}}^{(k)}$.

База алгебри Лі цієї псевдогрупи складається з таких векторних полів у просторі $\mathbb{R}^3$:

− паралельних переносів в площині $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{2}$$

− поворотів у площині $\mathbb{R}^2$ відносно початку координат

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \tag{3}$$

− гомотетії в площині $\mathbb{R}^2$ з центром у початку координат

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \tag{4}$$

− перепараметризації прямої $\mathbb{R}$

$$h(u)\frac{\partial}{\partial u}\ , \tag{5}$$

(тут $h \in C^{\infty}(\mathbb{R})$), і ця псевдогрупа може бути ототожнена з алгеброю Лі контактних векторних полів з твірними функціями вигляду

$$f(x,u,p) = h(u) + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3(x_1 p_2 - x_2 p_1) + a_4(x_1 p_1 + x_2 p_2)\,, \tag{6}$$

де $a_1, \ldots, a_4$ − константи (див. також [1, 2, 6]).

Нехай M − гладкий многовид, на якому діє деяка псевдогрупа G, і $J^k M$ − простір k-джетів гладких функцій на M. Нагадаємо, що розмірність простору диференціальних інваріантів псевдогрупи G − це корозмірність регулярних орбіт продовження $G^{(k)}$ псевдогрупи Лі G в розшарування $J^k M$.

Наприклад, розмірність простору $J^1\mathbb{R}^2$ 1-джетів дорівнює 5, а розмірність орбіти загального положення псевдогрупи $G_{\text{cm}}^{(1)}$ також дорівнює 5. Тому в такому розшаруванні кривих φ не існує диференціальних інваріантів першого порядку.

Розмірність простору $J^2\mathbb{R}^2$ дорівнює 8, а розмірність орбіти загального положення псевдогрупи $G_{\text{cm}}^{(2)}$ дорівнює 7. Отже, в цьому розшаруванні існує лише один диференціальний інваріант другого порядку.

З огляду на сказане вище відмітимо, що розмірність орбіти загального положення псевдогрупи $G_{\text{cm}}^{(k)}$ в $J^k\mathbb{R}^2$ дорівнює $k+5$, а розмірність простору $J^k\mathbb{R}^2$ дорівнює $C_{k+2}^k + 2$. Тому корозмірність орбіти дорівнює $v(k) = C_{k+2}^k - k - 3$. Це число співпадає з числом функціонально незалежних диференціальних інваріантів псевдогрупи Лі G_{cm}, порядок яких не більший ніж k.

Отже, число $\mu(k)$ інваріантів k-го порядку можна обчислити за формулою

$$\mu(k) = \nu(k) - \nu(k-1) = k\ . \tag{7}$$

Наша мета − описати алгебру диференціальних інваріантів розшарувань кривих на площині відносно $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи. Зауважимо, що ця стаття є продовженням досліджень, розпочатих автором в роботах [3, 4].

2. Диференціальний інваріант 2-го порядку. У роботі [5] автора описано алгебру диференціальних інваріантів розшарування φ відносно рухів площини. Там також показано, що у розшаруванні φ існує рівно два незалежних диференціальних інваріанти другого порядку відносно групи рухів:

$$I_1 = \frac{p_2^2 p_{11} - 2p_1 p_2 p_{12} + p_1^2 p_{22}}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}$$

та

$$I_2 = \frac{(p_1^2 - p_2^2)p_{12} + p_1 p_2 (p_{22} - p_{11})}{(p_1^2 + p_2^2)^{3/2}}$$

− кривизна кривої сім'ї та кривизна ортогональних траєкторій сім'ї кривих відповідно.

Нижче вияснимо, як ведуть себе ці інваріанти стосовно перетворення гомотетії. Відповідне векторне поле має вигляд

$$S = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\,.$$

Зсуви вздовж траєкторій цього векторного поля породжують перетворення площини

$$\gamma : (x_1, x_2) \to (e^t x_1, e^t x_2).$$

Нехай $S^{(k)}$ і $\gamma^{(k)}$ – підняття в простір $J^k\mathbb{R}^2$ векторного поля S та перетворення γ відповідно. Для $k = 2$ отримуємо

$$S^{(2)} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_2} - 2p_{11} \frac{\partial}{\partial p_{11}} - $$
$$- 2p_{12} \frac{\partial}{\partial p_{12}} - 2p_{22} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

і

$$\gamma^{(2)} : (x_1, x_2, u, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}) \to$$
$$\to (e^t x_1,\ e^t x_2, u, e^{-t} p_1, e^{-t} p_2, e^{-2t} p_{11}, e^{-2t} p_{12}, e^{-2t} p_{22}).$$

Тому I_1 та I_2 є відносними інваріантами ваги -1 стосовно до $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи:

$$I_1 \to e^{-t} I_1, \qquad I_2 \to e^{-t} I_2.$$

Отже, їх відношення $I^{\mathrm{cm}} = \dfrac{I_1}{I_2}$ – це абсолютний диференціальний інваріант розшарування відносно групи G_{cm}. Як було зазначено вище, це є єдиний інваріант другого порядку розшарування φ. Його координатне подання має вигляд

$$I^{\mathrm{cm}} = \frac{p_2^2 p_{11} - 2p_1 p_2 p_{12} + p_1^2 p_{22}}{(p_1^2 - p_2^2) p_{12} + p_1 p_2 (p_{22} - p_{11})}.$$

Цей інваріант будемо називати відносною кривиною розшарування φ.

3. Інваріантні диференціювання. Відмітимо, що група Лі G_{cm} є прямою сумою метричної псевдогрупи Лі G_{cm} та одновимірної групи Лі, породженої перетворенням гомотетії.

Нехай розшарування φ задане лініями рівня функції $f = f(x_1, x_2)$. Векторні поля

$$A = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \left(f_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + f_{x_2} \frac{\partial}{x_2} \right)$$

та

$$B = \frac{1}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}} \left(f_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - f_{x_1} \frac{\partial}{x_2} \right)$$

є інваріантними стосовно метричної псевдогрупи Лі G_{cm}. Ці векторні поля представляють собою поле одиничних нормальних і дотичних векторів відповідно до кривих розшарування φ. Зауважимо, що ці векторні поля не є інваріантними відносно $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи, оскільки при перетворенні γ вони домножаються на e^{-t}.

Векторні поля A і B породжують дві операції інваріантного диференціювання на C^∞ ($J^\infty\mathbb{R}^2$), які будемо позначати тими самими буквами:

$$A = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \left(p_1 \frac{d}{dx_1} + p_2 \frac{d}{dx_2} \right)$$

та

$$B = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + p_1^2}} \left(p_2 \frac{d}{dx_1} - p_1 \frac{d}{dx_2} \right).$$

Тут $\frac{d}{dx_1}$ та $\frac{d}{dx_2}$ – оператори повного диференціювання за змінними x_1 та x_2 відповідно. Ці оператори інваріантні відносно метричної групи Лі, але при дії перетворенням $\gamma^{(k)}$ вони домножуються на e^{-t}. Оскільки функції I_1 та I_2 також помножуються на e^{-t}, то диференціювання

$$X = I_1^{-1} A \qquad \text{та} \qquad Y = I_2^{-1} B$$

інваріантні стосовно псевдогрупи G_{cm}.

4. Диференціальні інваріанти 3-го порядку. Функції

$$I_1^{\mathrm{cm}} = \frac{A(I_1)}{B(I_2)}, \qquad I_2^{\mathrm{cm}} = \frac{B(I_1)}{B(I_2)}, \qquad I_3^{\mathrm{cm}} = \frac{A(I_2)}{B(I_2)},$$

є диференціальними інваріантами третього порядку. Оскільки $\mu(3) = 3$, то це єдині диференціальні інваріанти третього порядку псевдогрупи Лі $G_{\mathrm{m}}^{(3)}$. Нижче наведемо координатні подання перших двох інваріантів:

$$\begin{aligned} I_1^{\mathrm{cm}} = {} & ((p_1^2 + p_2^2)(p_2^5(p_{12}p_{112} - p_{11}p_{122}) + p_1^4(p_1p_{22}p_{112} + p_{12}(2p_{12}^2 - p_{11}p_{22} + \\ & + p_{22}^2 - p_1p_{122})) + p_1^3p_2(-2p_{11}p_{22}^2 + p_{22}^3 + p_{11}(-4p_{12}^2 + p_1p_{122}) + \\ & + p_{22}(p_{11}^2 + p_1(-p_{111} + p_{122})) - p_1p_{12}p_{222}) - p_1p_2^3(p_{11}^3 + p_{11}p_{22}^2 - \\ & - p_1p_{12}p_{112} - p_{22}(2p_{11}^2 + 4p_{12}^2 + p_1(-p_{111} + p_{122})) + p_1p_{12}p_{222}) + \\ & + p_2^4(-2p_{12}^3 + p_{12}(p_{11}(-p_{11} + p_{22}) + p_1p_{111}) + p_1(-(p_{11} + p_{22})p_{112} + \\ & + p_{11}p_{222})) + p_1^2p_2^2(3p_{11}^2p_{12} - 3p_{12}p_{22}^2 + p_1(p_{12}(p_{111} - p_{122}) + \\ & + p_{11}(-p_{112} + p_{222}))))(-p_1^2p_{12} + p_2^2p_{12} + p_1p_2(p_{11} - p_{22}))^{-3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2^{cm} = {} & ((p_1^2 + p_2^2)(p_1^3(p_1p_{11} + 4p_2p_{12})p_{22}^2 - p_1^4p_{22}^3 + p_2^5(p_{12}p_{111} - \\ & - p_{11}p_{112}) - p_2^4(p_1p_{12}p_{112} + p_{11}(p_{11}^2 + 2p_{12}^2 - 2p_1p_{122})) - \\ & - p_{22}(p_2^4(-p_{11}^2 + p_1p_{111}) - 2p_1^4p_2p_{112} - 2p_1^2p_2^3p_{112} + p_1^4(2p_{12}^2 + \\ & + p_1p_{122}) + p_1^2p_2^2(6p_{12}^2 + p_1(p_{111} + p_{122}))) + p_1^5p_{12}p_{222} - \\ & - p_1^3p_2(-4p_{12}^3 + p_1p_{12}p_{122} + p_1p_{11}p_{222}) + p_1^2p_2^2(-6p_{12}p_{12}^2 - \\ & - p_1p_{12}p_{112} + 2p_1p_{12}p_{122} + p_1p_{12}p_{222}) - p_1p_2^3(-4p_{12}^3 + \\ & + p_{12}(-4p_{11}^2 + p_1(-p_{111} + p_{122})) + p_1p_{11}(p_{112} + p_{222})))) \times \\ & \times (-p_1^2p_{12} + p_2^2p_{12} + p_1p_2(p_{11} - p_{22}))^{-3}. \end{aligned}$$

5. Структура алгебри диференціальних інваріантів. Функції

$$I_{11}^{\mathrm{cm}} = X(I_1^{\mathrm{cm}}), \qquad I_{12}^{\mathrm{cm}} = X(I_2^{\mathrm{cm}}), \qquad I_{22}^{\mathrm{cm}} = Y(I_2^{\mathrm{cm}})$$

є диференціальними інваріантами четвертого порядку відносно псевдогрупи Лі $G_{\mathrm{m}}^{(4)}$.

Оскільки корозмірність орбіти загального положення псевдогрупи Лі $G_{\mathrm{m}}^{(4)}$ в просторі $J^4\mathbb{R}^2$ дорівнює 4, то між функціональними інваріантами I^{cm}, I_1^{cm}, I_2^{cm}, I_{11}^{cm}, I_{12}^{cm} та I_{22}^{cm} існує лише одне співвідношення.

Порівнюючи розмірності орбіт загального положення псевдогруп $G_{\mathrm{m}}^{(k)}$ і просторів $J^k\mathbb{R}^2$ для $k > 2$, отримуємо таку теорему.

Теорема. *Повна система локальних диференціальних інваріантів розшарування кривих відносно* $\mathbb{R}$*-конформно-метричних перетворень площини породжується функціями* I_1^{cm}, I_2^{cm}, I_3^{cm} *та усіма можливими їхніми добутками відносно диференціювань* X *та* Y.

1. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. – Москва: ВИНИТИ, 1988. – **28**. – 289 с.
2. *Виноградов А. В., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1986. – 336 с.
3. *Кузаконь В. М.* Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 4. – С. 95–99.
4. *Кузаконь В. М.* Диференціальні інваріанти субмерсій многовидів // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1999. – № 364. – С. 295–298.
5. *Кузаконь В. М.* Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, № 3. – С. 201–212.
6. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. – 496 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ РАССЛОЕНИЯ КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО $\mathbb{R}$-КОНФОРМНО-МЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Приведено полное описание алгебры дифференциальных инвариантов расслоения кривых на плоскости относительно $\mathbb{R}$*-конформно-метрической группы.*

CURVES BUNDLES DIFFERENTIAL INVARIANTS ON A PLANE WITH RESPECT TO $\mathbb{R}$-CONFORM-METRIC GROUP

Complete description of an algebra of curves bundles differential invariants on a plane with respect to $\mathbb{R}$*-conform-metric group is presented.*

Одеська нац. акад. харчов. технологій, Одеса

Одержано
12.03.08