

### ВПЛИВ ПОДАТЛИВОСТІ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ НА ВЛАСНІ ЧАСТОТИ ВИДОВЖЕНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПАНЕЛІ

Розглянуто співвідношення уточненої теорії динамічного деформування циліндричних оболонок, яка враховує явно податливість матеріалу до трансверсального зсуву та неявно – до стиснення. На цій основі отримано систему розв'язувальних рівнянь, яка описує малі вільні коливання видовжених циліндричних панелей. Знайдено аналітичний вираз для спектра власних частот і досліджено вплив параметрів зсуву та стиснення на їх значення.

Композитні циліндричні панелі знаходять широке застосування в конструкціях і технічних засобах різноманітного цільового призначення [1]. Найбільш характерною особливістю деформування тонкостінних оболонок із композитів поряд із анізотропією пружних властивостей є податливість до трансверсальних зсуву та стиснення [2, 3, 4]. Наявні в літературі дослідження проводились або із застосуванням числових методів [5], або лише з урахуванням податливості до трансверсального зсуву [6]. Пропонована ж робота присвячена побудові аналітичного розв'язку задачі про малі поперечні власні коливання видовженої композитної циліндричної панелі.

**Постановка задачі.** Розглянемо видовжену композитну циліндричну панель товщини  $2h$  з радіусом серединної поверхні  $R$  і кутом розхилу  $2\varphi_0$  (рис. 1). Динамічний напружено-деформований стан вказаного тонкостінного елемента за відсутності масових та поверхневих зусиль описується співвідношеннями, що включають [3]

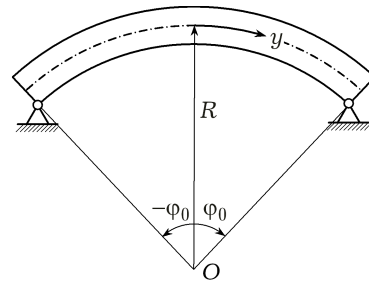


Рис. 1

– рівняння руху (рівноваги):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{R} Q &= 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{1}{R} N &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial M}{\partial y} - Q &= \frac{2}{3} \rho h^3 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

– співвідношення пружності:

$$N = \bar{B} \varepsilon_1^0, \quad M = \bar{D} \varepsilon_1^1, \quad Q = \Lambda \varepsilon_{13}^0, \quad (2)$$

– деформаційні співвідношення:

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{R}, \quad \varepsilon_1^1 = \frac{\partial \gamma}{\partial y}, \quad \varepsilon_{13}^0 = \gamma + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{u}{R}. \quad (3)$$

У рівностях (1)–(3) прийнято позначення:  $y = R\varphi$ ,  $\varphi$  – кутова координата на серединній поверхні панелі;  $N$  – розтягувальне (стискувальне) зусилля вздовж кутової координати;  $M$  – згинний момент;  $Q$  – перерізувальне зусилля;  $u$  – переміщення точок серединної поверхні вздовж тангенціальної координати  $y$  (рис. 1);  $\gamma$  – кут повороту нормального до серединної поверхні елемента перед деформуванням;  $w$  – переміщення точок серединної поверхні вздовж радіальної координати;  $\bar{B} = 2Eh(1 + \alpha)/(1 - \nu^2)$  – узагальнена жорсткість панелі на розтяг;  $\bar{D} = h^2 \bar{B}/3$  – узагальнена згин-

на жорсткість панелі;  $\Lambda = 2k'hG'$  – зсувна жорсткість панелі;  $\alpha = \frac{(1+\nu)(\nu')^2 E}{1-\nu-2\nu\nu' E'}$ ;  $E, \nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона в серединній та еквідистантних до неї поверхнях;  $E', \nu'$  – ті ж величини в площинах, перпендикулярних до серединної поверхні;  $G'$  – трансверсальний модуль зсуву;  $\rho$  – густина матеріалу панелі;  $k' = 14/15$ .

Граничні умови на видовжених торцях панелі  $y = \pm b_0 = \pm R\varphi_0$  у випадку їх шарнірного закріплення на нижній лицевій поверхні (рис. 1) мають вигляд

$$N(\pm b_0) = 0, \quad M(\pm b_0) = 0, \quad w(\pm b_0) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (1) разом із співвідношеннями (2), (3) і граничними умовами (4) складають математичну модель, що описує процес малих вільних коливань розглянутої видовженої циліндричної панелі. Податливість матеріалу панелі до поперечного стиснення в цій моделі враховується наявністю у виразах для жорсткісних характеристик коефіцієнта  $\alpha$ , що залежить від трансверсальних пружних сталей  $E'$  та  $\nu'$ .

**2. Побудова розв'язку задачі.** Почергова підстановка (3)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (1) та нехтування інерцією повороту  $\gamma$  [4] приводить до системи рівнянь руху в узагальнених переміщеннях

$$\bar{B}\left(u'' + \frac{w'}{R}\right) + \frac{\Lambda}{R}\left(\gamma + w' - \frac{u}{R}\right) = 2\rho h\ddot{u}, \quad (5)$$

$$\Lambda\left(\gamma' + w'' - \frac{u'}{R}\right) - \frac{\bar{B}}{R}\left(u' + \frac{w}{R}\right) = 2\rho\ddot{w}, \quad (6)$$

$$\bar{D}\gamma'' - \Lambda\left(\gamma + w' - \frac{u}{R}\right) = 0. \quad (7)$$

Тут і надалі штрихом позначено похідну за  $y$ , а крапкою – за  $t$ .

З рівняння (7) отримуємо вираз для тангенціального переміщення  $u$ :

$$u = R\left(\gamma + w' - \frac{\gamma''}{\alpha^2}\right), \quad (8)$$

де  $\alpha^2 = \Lambda/\bar{D}$ .

Підстановка рівності (8) у рівняння (5) і (6) дозволяє отримати систему розв'язувальних рівнянь задачі про малі власні коливання розглянутої панелі:

$$\begin{aligned} \gamma^{IV} + \frac{1}{R^2}\gamma^{II} &= \frac{3}{c_1^2 h^2}\left(2\ddot{w} - \ddot{\gamma} - \frac{\ddot{\gamma}^{II}}{\alpha^2}\right), \\ \gamma^{IV} - \frac{1}{R^2}\gamma^{II} - \frac{6}{h^2}\left(\gamma^{II} - \frac{\gamma^{IV}}{\alpha^2} + w^{III} + \frac{1}{R}w\right) &= \frac{3}{c_1^2 h^2}\left(\frac{\ddot{\gamma}^{II}}{\alpha^2} - \ddot{\gamma}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

У рівняннях (9)  $c_1 = \sqrt{2h\rho/\bar{B}}$  – швидкість поширення хвиль уздовж кільцевої координати.

Для задоволення двох останніх граничних умов з (4) розв'язок системи рівнянь (9) шукаємо у вигляді

$$w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos \lambda_n y\right) e^{i\omega t}, \quad \gamma = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sin \lambda_n y\right) e^{i\omega t}, \quad (10)$$

де  $\lambda_n = \frac{k_n}{R}$ ,  $k_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\varphi_0}$ ,  $\omega$  – шукана частота коливань.

Оскільки з урахуванням виразу для  $N$  та рівності (8) маємо

$$N = \bar{B} \left[ R \left( \gamma' + w'' - \frac{\gamma'''}{x^2} \right) + \frac{w}{R} \right],$$

то перша рівність із (4) задовольняється автоматично. Для інших типів граничних умов необхідно використовувати більш складні розклади для функцій  $w$  та  $\gamma$  за координатою  $y$ , як і у випадку задач про мале поперечне деформування.

Після підстановки (10) в (9) та прирівнювання до нуля визначника для кожної незалежної підсистеми для визначення величини  $\mu_n = \omega_n/c_1$  отримуємо бікватратне рівняння

$$\mu_n^4 - \frac{1+k_n^2}{R^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2 k_n^2}{3} \frac{1}{1 + \varepsilon^2 k_n^2 \cdot \bar{x}^{-2}} \right] \mu_n^2 + \frac{\varepsilon^2 k_n^2}{3} \frac{1}{R^4} \frac{(k_n^2 - 1)^2}{1 + \varepsilon^2 k_n^2 \cdot \bar{x}^{-2}} = 0.$$

Тут  $\bar{x}^2 = h^2 x^2$ .

Звідси для спектра безрозмірних частот  $\bar{\omega}_n = \omega_n h \sqrt{\rho/E}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , отримуємо вираз

$$\bar{\omega}_n = \varepsilon \frac{a_n}{\sqrt{1 - \nu^2}}, \quad (11)$$

де

$$a_n^2 = \frac{1+k_n^2}{2} \left[ 1 + \alpha + \eta_n^2 + \sqrt{(1+\alpha)^2 + \eta_n^4 + (1+\alpha)\eta_n^2 \bar{k}_n} \right],$$

$$\eta_n^2 = k_n^2 \varepsilon^2 \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+\alpha} + \frac{\beta_n^2}{\delta^2} \right)^{-1}, \quad \beta_n^2 = k_n^2 \varepsilon^2 \frac{E}{G'} \frac{1}{k'},$$

$$\delta^2 = 3(1 - \nu^2), \quad \bar{k}_n = 2 \left( 6 \frac{1}{k_n^2} - \frac{1}{k_n^4} - 1 \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{k_n^2} \right)^{-2}.$$

**3. Аналіз числових результатів та висновки.** За формулою (11) проведено визначення спектра безрозмірних частот власних коливань видовженої циліндричної панелі з кутом розхилу  $2\varphi_0 = \pi/2$ . На рис. 2 і рис. 3 (відповідно при  $E/E' = 0$  і  $E/E' = 1$ ) наведено залежності безрозмірних частот  $\bar{\omega}_n$  для  $n = 0, 1, 2$ . Для всіх цих випадків розрахунки проводились при  $h/R = 0.1$  та  $\nu = 0.375$ .

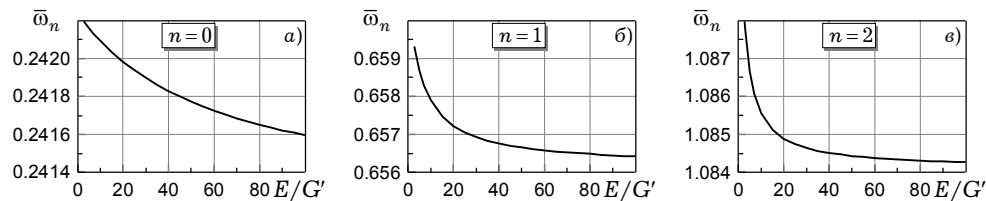


Рис. 2

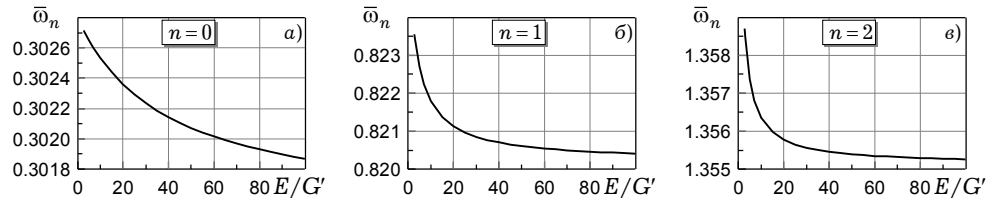


Рис. 3

Відмічається підвищення жорсткості панелі, а відповідно і збільшення значень власних частот при  $E'/E = 1$  порівняно з випадком  $E'/E = 0$ . Зменшення зсувної жорсткості, тобто збільшення параметра  $E/G'$ , навпаки, приводить до зменшення жорсткості панелі та відповідно до зниження значень власних частот коливань.

У подальшому відповідні дослідження доцільно проводити для інших класів оболонок, де можна отримати аналітичні розв'язки, які становлять певний практичний інтерес і можуть бути тестовими для апробації числових методів.

1. Вольмир А. С., Куранов Б. А., Турбаивский А. Т. Статика и динамика сложных структур. – Москва: Машиностроение, 1989. – 248 с.
2. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 8. – С. 3–31.
3. Марчук М. В. Нелінійне деформування і коливання податливих трансверсальним деформаціям зсуву та стиснення пластин і оболонок // Машинознавство. – 2005. – № 10. – С. 9–14.
4. Осадчук В. А., Марчук М. В. Математична модель динамічного деформування податливих до зсуву та стиску композитних пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 43–50.
5. Haldar S. Free vibration of composite skewed cylindrical shell and panel by finite element method // J. Sound and Vibr. – 2008. – **311**. – P. 9–19.
6. Kurpa L. V., Timchenko G. N. Studying the free vibrations of multilayer plates with a complex planform // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, No 1. – P. 103–109.

#### **ВЛИЯНИЕ ПОДАТЛИВОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫМ СДВИГУ И СЖАТИЮ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ УДЛИНЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ**

*Рассмотрены соотношения уточненной теории динамического деформирования цилиндрических оболочек, которая учитывает явно податливость материала трансверсальным сдвигу и неявно – сжатию. На этом основании получена система разрешающих уравнений, которая описывает малые свободные колебания удлиненных цилиндрических панелей. Найдено аналитическое выражение для спектра собственных частот и исследовано влияние параметров сдвига и сжатия на их значения.*

#### **INFLUENCE OF TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION PLIABILITY ON FUNDAMENTAL FREQUENCY OF ELONGATED CYLINDRICAL PANEL**

*The relation of refined theory for dynamic strain of cylindrical shells, considering explicitly the material pliability to transversal shear and implicitly – to compression, is examined. On this basis a system of equations solved describing small free vibrations of elongated cylindrical panels is obtained. Analytical expression for spectrum of fundamental frequencies is found and the influence of shear and compression parameters on their values is studied.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
12.11.08