УДК 681.3

П.Л. ГИРУЦ, И.В. МАКСИМЕЙ, Е.И. СУКАЧ, О.И. ЕСЬКОВА

ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ РЕГИОНА

Abstract: *It is considered the task of the research of the probabilistic transport floods of region. There are formulated the peculiarities of the formalization of traffic network with the multitude of entrances and ways out for building of simulation model, with the purpose of searching maximal flood. It is informed about composition and assigning of the procedures of simulation model the algorithm of Ford-Falkerson and method Monte-Karlo.*
Key words: *simulation modelling, probabilistic transport floods, the search of maximal flood, the algorithm of Ford-Falkerson, method Monte-Karlo.*

Анотація: *Ставиться задача дослідження ймовірних транспортных потоків регіону. Формулюються особливості формалізації транспортної мережі з множиною входів і виходів для побудови імітаційної моделі, яка має ціль знайти максимальний потік. Повідомляється про склад і призначення процедур імітаційної моделі, яка об'єднує алгоритм Форда-Фалкерсона і метод Монте-Карло.*
Ключові слова: *імітаційне моделювання, ймовірні транспортні потоки, пошук максимального потоку, алгоритм Форда-Фалкерсона, метод Монте-Карло.*

Аннотация: *Ставится задача исследования вероятностных транспортных потоков региона. Формулируются особенности формализации транспортной сети со множеством входов и выходов для построения имитационной модели с целью поиска максимального потока. Сообщается о составе и назначении процедур имитационной модели, объединяющей алгоритм Форда-Фалкерсона и метод Монте-Карло.*
Ключевые слова: *имитационное моделирование, вероятностные транспортные потоки, поиск максимального потока, алгоритм Форда-Фалкерсона, метод Монте-Карло.*

1. Введение

Объектом исследования является h-ый вариант системы транспортных потоков региона, имеющей графовую структуру G_h, определяемую матрицами

$$C_h = \left\|c_{ij}\right\|;\ L_h = \left\|l_{ij}\right\|;\ X^0 = \left\|x_{ij}^0\right\|;\ Q_h = \left\|q_{ij}\right\|, \tag{1}$$

где c_{ij} – пропускные способности ветвей графа G_h, соединяющих узлы i и j; l_{ij} – расстояния между узлами; x_{ij}^0 – начальный поток по ветви ij (скорость движения транспортных средств); q_{ij} – стоимость единицы пути движения транспортного средства по ветви ij. Существует множество входов в сеть $Z = (z = \overline{1,m})$, где m – общее количество входов и выходов из сети $Y = (y = \overline{1,n})$, где *n*- общее количество выходов из сети. Максимальный поток между узлами φ_{zy} распределяется по ветвям сети $X_{zy}^k = \left\|x_{ijzy}^k\right\|$, где k – номер итерации алгоритма Форда-Фалкерсона [1] при определении максимального значения потока φ_{zy}. В сети, кроме транзитных потоков, существуют местные транспортные потоки внутри региона, которые назовём “противопотоками”. Естественно, они снижают пропускные способности ветвей графа G_h. Предполагается, что величина пропускных способностей “противопотока” определяется функцией распределения $H_{ij}(\upsilon)$. Поэтому пропускные способности ветвей ij графа G_h из-за “противопотоков” представляют собой случайную величину, определяемую с помощью функций распределения $F_{ij}(\tilde{c}) = c_{ij} - H_{ij}(\upsilon)$.

Наличие “противопотоков” внутри G_h обусловливает вероятностный характер пропускных способностей на многих ветвях графа G_h. Кроме того, в сети существует множество входов и выходов. Необходимо отметить, что для случая, когда элементы матрицы пропускных способностей C_h являются детерминированными величинами, известны алгоритмы решения задачи о максимальном потоке [2]. Но вероятностный характер пропускных способностей ветвей графа G_h не позволяет решить эту задачу с помощью данных алгоритмов и обусловливает актуальность использования имитационной модели, основанной на сочетании процедуры Монте-Карло и теоремы Форда-Фалкерсона.

Таким образом, ставятся задачи определения на имитационной модели (ИМ) множества значений максимальных потоков $\{\varphi_{zy}\}$, а также поиска узких мест в сети G_h, устранение которых позволит достичь максимальных потоков во всех четырёх направлениях: с запада (*WE*) на восток (*OS*) и обратно, а также с севера (*NO*) на юг (*ZD*) и обратно.

2. Формализация объекта моделирования

Определим показатель затрат движения транспортных средств вдоль ветви ij графа G_h:

$$f_{ij} = \delta_1 \cdot \ell_{ij} + \delta_2 \cdot \left(\frac{\ell_{ij}}{\overline{x_{ij}}} \right)^* + \delta_3 \cdot (q_{3ij} \cdot \overline{x_{ij}})^* , \tag{2}$$

где $0 \le \delta_1 \le 1, \;\; 0 \le \delta_2 \le 1, \;\; 0 \le \delta_3 \le 1$ – весовые коэффициенты важности трёх составляющих затрат соответственно (расстояния, времени движения, стоимости движения); $\sum_{k=1}^{3} \delta_k = 1$.

Звёздочка у составляющих выражения (2) означает нормированные значения соответствующих затрат, изменяющихся на интервале [0,1]. Нормировка осуществляется максимальным значением соответствующих затрат во всех ветвях ij графа G_h. Поскольку при движении транспортных средств по сети G_h необходимо стремиться к минимизации этих затрат, то в качестве показателя “выгоды” максимального потока берётся усреднённая характеристика затрат, которая вычисляется по матрице распределений максимального потока по всем ветвям ij графа G_h:

$$\Phi_{zy} = \sum_i \sum_j f_{ij}^* \; . \tag{3}$$

Этот обобщённый показатель определяет величину затрат транспортных средств в сети G_h при максимальном потоке φ_{zy}. Как видим, с одной стороны φ_{zy} необходимо максимизировать, а с другой стороны Φ_{zy} должно быть минимальным. Эти два противоречивых критерия определяют область компромисса при заданном векторе важности $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ для исследователя, которую необходимо определить на ИМ.

Воспользуемся принципом суперпозиции: исследуем распределение потоков в одном из направлений, а затем рассмотрим подобное распределение с помощью матрицы, в которой строками являются номера-входы $\{\overline{\overline{Z}}\}$ в графе G_h, а столбцами – номера- выходы $\{\overline{\overline{Y}}\}$ из сети. Это означает, что φ_{zy} и Φ_{zy} есть соответственно величина потока и величина его интегральной “выгоды“ между входом $\overline{\overline{Z}}$ и выходом $\overline{\overline{Y}}$ из графа G_h, описываемого зависимостью (3). Величину потока $\overline{X^k_{zy}} = \left\|\overline{x^k_{ij}}\right\|$ и его минимальное значение $\overline{\varphi_{zy}}$ находим как результат применения процедуры Монте-Карло и последующего их усреднения по выборке объема N. С помощью ИМ эта задача решается следующим образом. На *l*-ой итерации применения процедуры Монте-Карло вероятностная задача превращается в классическую. При этом определяются компоненты матрицы пропускных способностей путём вычисления $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - \upsilon_{ijl}$, где υ_{ijl} определяется по функции распределения $H_{ij}(\upsilon)$ путём нахождения единичного жребия третьего типа [1].

В качестве начального потока выбирается матрица $X^0 = \left\|x^0_{ij}\right\|$. Используется матрица пропускных способностей $C_{hl} = \left\|c_{ijl}\right\|$, и с помощью алгоритма Форда-Фалкерсона определяется на *k*-ой итерации само распределение потока по сети $X^k_{zyl} = \left\|x^k_{ijzyl}\right\|$ и его значение φ_{zyl}. При использовании (2) и (3) и X^k_{zyl} определяется обобщённый показатель “выгоды” этого потока Φ_{zyl}. Значения φ_{zyl} и Φ_{zyl} запоминаются в базе данных модели (БДМ). Модифицируется номер итерации процедуры Монте-Карло $(l = l + 1)$, и все расчёты повторяются сначала. По завершении N итераций этих расчётов в БДМ модели сформированы следующие выборки: для каждого элемента матрицы распределений потока имеется своя выборка $\{x_{ijzyl}\}, l = \overline{1, N}$; значения максимального потока $\{\varphi_{zyl}\}, l = \overline{1, N}$; интегральные показатели “выгоды” потока $\{\Phi_{zyl}\}, l = \overline{1, N}$.

По этим выборкам объема N формируются средние значения, выборочные дисперсии и точности вычисления этих характеристик с помощью процедуры Монте-Карло по известным функциям:

$$\overline{X^k_{zy}} = \left\|\overline{x^k_{ijzy}}\right\|;\ \overline{\varphi_{zy}};\ \overline{\Phi_{zy}}. \tag{4}$$

Применив эту процедуру для вычисления всех максимальных потоков при всех сочетаниях входов (Z) и выходов (Y), получим матрицы $\left\|\overline{\varphi_{zy}}\right\|$ и $\left\|\overline{\Phi_{zy}}\right\|$. Поскольку все матрицы $\overline{X^k_{zy}}$ из (4) распределены на одном и том же графе G_h, то их можно покомпонентно сложить:

$$\overline{X^k_{0zy}} = \left\|\sum_{zy} \overline{x^k_{ijzy}}\right\| \tag{5}$$

и получить значение распределения по G_h интегрального максимального потока. Для поиска узких мест в G_h проведём покомпонентное вычитание из этой матрицы матрицы пропускных способностей C_h:

$$\Delta\overline{X}_h = \left\| C_{ij} - \sum_{zy} \overline{x_{ijzy}^k} \right\|. \qquad (6)$$

В тех местах, где элемент данной матрицы будет иметь отрицательное значение, находятся “узкие места” в C_h. На величину этой разности пропускные способности C_{ij} должны быть увеличены для того, чтобы граф G_h обеспечивал максимальные потоки транзитных маршрутов в одном из направлений из всех точек Z во все точки Y.

Аналогичным образом можно использовать ИМ для нахождения в G_h “узких мест”, определения максимальных потоков и оценки их интегральной “выгоды” для остальных направлений в сети.

3. Имитационная модель вероятностных транспортных потоков региона

На основе формализации транспортной сети G_h была реализована имитационная модель, в которой объединены алгоритм Форда-Фалкерсона, процедура Монте-Карло и использованы принципы суперпозиции независимых транспортных потоков в одном и том же графе G_h. Имитационная модель реализуется на основе процессного способа имитации [3], и при этом используются средства поддержки имитационного эксперимента [4]. Поэтому модель представляет собой объединение десяти процедур, каждая из которых реализует один из шагов технологии использования ИМ для решения поставленной задачи исследования вероятностных транспортных потоков региона.

Рассмотрим динамику реализации десяти шагов технологии решения поставленной задачи. **На шаге 1** с помощью процедуры *PR.ZAPIT* осуществляется ввод исходной информации в БДМ. В качестве начальной информации *PR.ZAPIT* вводит информацию, представленную зависимостью (1). При этом в ходе “запитки” ИМ G_h вводится множество входов $\{Zr\}$ и выходов $\{Yr\}$ для каждого из r направлений: $r=1$, запад-восток (*WE→OS*); $r=2$, восток-запад (*OS→WE*); $r=3$ север-юг (*NO→ZD*); $r=4$ юг-север (*ZD→NO*). Вводится также матрица, элементами которой являются функции распределения “противопотоков” $H=\|H_{ij}\|$ внутри графовой структуры G_h. **На шаге 2** с помощью процедуры *PR.FOPROP* производится корректировка матрицы пропускных способностей C_h, используя при этом матрицу H для определения пропускных способностей у тех ветвей графа G_h, для которых имеет место сочетание транзитных потоков, имеющих постоянные пропускные способности $\overline{\overline{C_{ij}}}$ с вероятностными пропускными способностями “противопотоков”, задаваемыми матрицей распределений $H_{ij\,j}$. **На шаге 3** с помощью процедуры

PR.FORFAL по алгоритму Форда-Фалкерсона для очередной *l*-ой реализации процедуры Монте-Карло определяется значение максимального потока φ_{zyl} и его распределение по ветвям транспортной сети $X_{zyl}^{k} = \left\| x_{ijzyl}^{k} \right\|$. Эти статистики запоминаются в БДМ в качестве элементов выборок статистик имитации. Затем **на шаге 4** с помощью процедуры *PR.MONTEC* реализуется самый внутренний цикл из N реализаций, который начинается с повторения шага 3, но уже с *(l+1)*-ой реализацией. По завершении N реализаций на шаге 4 *PR.MONTEC* считывает из БДМ выборки статистик, по которым она вычисляет средние значения и выборочные дисперсии. В итоге эта процедура формирует оценки средних значений статистик реализации максимального потока $\overline{\varphi_{xy}}$ и $\overline{X_{zy}^{k}} = \left\| \overline{x_{ijxy}^{k}} \right\|$, которые также запоминаются в БДМ. **На шаге 5** с помощью процедуры *PR.INTVIG*, используя матрицу $\overline{X_{zy}^{k}}$, с помощью формул (2) и (3) определяется интегральный показатель “выгоды“ максимального потока Φ_{zy}, который также запоминается в БДМ. **На шаге 6**, реализуемом процедурой *PR.FOMATR* во внешнем цикле, который равен количеству потоков в каждом из направлений, целью является формирование следующих матриц. Во-первых, формируются две матрицы максимальных потоков и “выгоды“ этих потоков $\left\| \varphi_{xy} \right\|$ и $\left\| \Phi_{xy} \right\|$. Во-вторых, поскольку все потоки существуют внутри одной и той же сети G_h, на шаге 7 формируется матрица интегральных потоков $\overline{X_{zy}^{h}} = \left\| \sum_{zy} \overline{x_{ijzy}^{k}} \right\|$, которые появляются при наличии нескольких максимальных потоков от узлов на входах $\{Z\}$ до узлов на выходах $\{Y\}$ из сети. **На шаге 8** с помощью процедуры *PR.UZKMES* производится покомпонентное вычитание двух матриц $\left\| C_{ij} - \sum_{zy} \overline{x_{ijzy}^{k}} \right\| = \Delta X_{zy}^{h}$. В итоге те величины этих разностей, которые являются отрицательными, они и будут “узкими местами” в G_h. Поскольку сами абсолютные значения этих разностей трудно оценить, то процедура *PR.UZKMEST* формирует матрицу относительных превышений, компонентами которой являются

$$\Delta\widetilde{X}_{zy}^{h} = \frac{c_{ij} - \sum_{xy} \overline{x_{ijxy}^{k}}}{c_{ij}} \cdot 100\% .$$

При этом принимаются во внимание те элементы этой матрицы, которые имеют отрицательное значение $\left\| \Delta\widetilde{X}_{zy}^{h} \right\| \le 0$, поскольку именно они и будут “узкими местами” в графе G_h для обеспечения максимальных потоков от всех узлов входа $\{Z\}$ ко всем узлам выхода $\{Y\}$ из G_h. **На шаге 9** процедурой *PR.SMNAP* начинается самый важный цикл моделирования графа G_h во всех четырёх направлениях. Результаты, полученные на шаге 8, запоминаются в БДМ, рабочие массивы модели обнуляются, и весь процесс имитации вероятностного G_h повторяется, но каждый раз для следующего направления. Это означает, что в каждом цикле вычисляются статистики по направлениям: *WE→OS*; *OS→WE*; *NO→ZD*; *ZD→NO*.

В итоге выполнения всех шагов имитации в БДМ находятся статистики в виде упомянутых матриц по четырём направлениям транзитных потоков региональной транспортной сети. Поэтому **на шаге 10** с помощью процедуры *PR.PESMEN* исследователь принимает одно из возможных решений, используя при этом известные критерии принятия решений. При этом он по каждому направлению имеет в своём распоряжении две матрицы $\left\|\overline{\varphi_{zy}}\right\|$ и $\left\|\overline{\Phi_{zy}}\right\|$. В итоге исследователь по первой матрице выбирает вариант, максимизирующий общий поток в сети, а по второй матрице он оценивает затраты на реализацию этого максимального потока.

4. Выводы

С помощью предлагаемой имитационной модели вероятностных транспортных потоков региона исследователи могут решить следующие задачи проектного моделирования:

– оценка различия существующей пропускной способности сети и суммарных затрат транспортных средств на их передвижение по сети от найденных значений максимального потока и минимальных затрат на их передвижение по сети при существующих характеристиках сети C_h, L_h, Q_h;

– определение узких мест в сети G_h, устранение которых позволит увеличить величину потока X^k при минимальном значении функционала (3);

– оценка ухудшения значений φ_{zyl} и Φ_{zyl} при появлении чрезвычайной ситуации, которая приводит к тому, что пропускная способность некоторых ветвей региона окажется нулевой.

Таким образом, реализация алгоритма имитации вероятностных транспортных потоков на основе процедуры Монте-Карло позволяет решать задачи проектного моделирования при наличии “противопотоков” местного характера в транспортной сети регионов и обосновать величину ущерба от появления чрезвычайных ситуаций в регионе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жогаль С.И., Максимей И.В. Задачи и модели исследования операций: Учебное пособие. – Гомель: БелГУТ, 1999. – Ч.1: Аналитические модели исследования операций. – 109 с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Учебное пособие.– Киев: Издательский дом «Слово», 2002. – 320 с.
3. Максимей И.В. Имитационное моделирование на ЭВМ. – Москва: Радио и связь, 1983. – 232 с.
4. Максимей И.В., Сукач Е.И. Средства технологической поддержки имитационного эксперимента: Учебное пособие. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2002. – 107 с.