8Л

УДК 519.64:517.443:519.254-37

Л.В. Луц
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ, Україна

Оцінка якості деяких квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій

Отримані оцінки повної абсолютної похибки деяких оптимальних за точністю та близьких до них квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій, які дозволяють дати гарантовану оцінку якості наближеного розв'язку задачі інтегрування на певному класі функцій.

Вступ

При розв'язуванні задач цифрової обробки сигналів, таких як спектральний та кореляційний аналіз випадкових процесів, класифікація сигналів, виявлення геометричних ознак зображень, вибір характерних ознак для розпізнавання образів, фільтрація сигналів в реальному масштабі часу та ін., виникає необхідність в обчисленні інтегралів вигляду

$$I(\omega)=\int_0^1 e^{i\omega x} f(x)dx,$$

$$I_1(\omega)=\int_0^1 f(x)\sin\omega x dx,\ I_2(\omega)=\int_0^1 f(x)\cos\omega x dx\,.$$

Дана стаття присвячена обґрунтуванню квадратурних формул обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій для різних класів підінтегральних функцій на основі отримання оцінок їх повної похибки. Це дає можливість дати гарантовану оцінку якості наближеного значення інтеграла, оскільки при такому підході враховуються всі джерела похибок, які впливають на якість розв'язку.

Постановка задачі

Будемо розглядати оптимальні за точністю квадратурні формули обчислення інтегралів вигляду

$$I_1(\omega)=\int_0^1 f(x)\sin\omega x dx \tag{1}$$

в припущенні, що $f(x)\in F$ (F – деякий клас функцій), ω – деяке дійсне число, $|\omega|\geq 2\pi$, та інформація про $f(x)$ задана не більше, ніж в N точках.

Для цих квадратурних формул отримаємо оцінки їх повної похибки.

В якості класів підінтегральних функцій розглядатимемо наступні.

Q_L – клас обмежених на $[0,1]$ функцій, що мають кусково-неперервні перші похідні, обмежені константою L.

C_L – клас визначених на $[0,1]$ функцій, що задовільняють умові Ліпшица $|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|,\ x_1,x_2\in[0,1]$.

$C_{L,N}$ – клас функцій $f(x)\in C_L$ і заданих фіксованими значеннями $\{f_i\}_0^{N-1}$ у вузлах фіксованої сітки $\{x_i\}_0^{N-1}$.

$W_{2,L}$ – клас визначених на $[0,1]$ функцій $f(x)$, таких, що мають абсолютно неперервну першу похідну, причому $|f''(x)|\le L$.

$W_{2,N,L}$ – клас функцій $f(x)\in W_{2,L}$ і заданих фіксованими значеннями функції $\{f_i\}_0^{N-1}$ та її першої похідної $\{f_i'\}_0^{N-1}$ у вузлах фіксованої сітки $\{x_i\}_0^{N-1}$.

Сформулюємо низку умов, які знадобляться в подальшому для спрощення викладок:

умова У1: $[|\omega|/\pi]+1$ нулів функції $\sin\omega x, \cos\omega x$ на $[0,1]$ входять у число вузлів x_i, $i=\overline{1,N}$ квадратурної формули;

умова У2: $\left|\frac{f_i'+f_{i+1}'}{2}\Delta x_i-\Delta f_i\right|=\frac{L}{4}\left|\Delta x_i^2-\frac{\Delta f_i'}{L^2}\right|$.

Клас Q$_L$

Розглянемо квадратурну формулу обчислення інтеграла $I_1(\omega)$ вигляду:

$$R_1(\omega)=\sum_{i=0}^{N-1} f_i\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\sin\omega x dx,\ x_{i-\frac{1}{2}}=\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\ x_{-\frac{1}{2}}=x_0,\ x_{N-\frac{1}{2}}=x_N. \quad (2)$$

Теорема 1. Нехай $f(x)\in Q_L$ задана таблицею значень у вузлах рівномірної сітки $x_i=i\cdot\Delta x, \Delta x=1/N, i=\overline{0,N-1}$, можливі похибки ξ_i задання функції $f(x)$ у вузлах x_i розподілені рівноймовірно на $[0,\Delta]$ та обчислення проводяться на ЕОМ в режимі з плаваючою комою з τ двійковими розрядами у мантис чисел. Тоді квадратурна формула $R_1(\omega)$ наближеного обчислення $I_1(\omega)$ є оптимальною за точністю при $N\ge|\omega|$ та $N=[|\omega|/\pi]+1$ і асимптотично оптимальною за точністю при $N\le|\omega|$, при цьому з ймовірністю 0,96 і з точністю до величин другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ справедлива оцінка повної абсолютної похибки квадратурної формули $R_1(\omega)$ вигляду:

$$E\le E_1+E_2+E_3, \quad (3)$$

де $E_1\le\frac{5\Delta}{\sqrt{3N}}$, (4)

$$E_2\le\begin{cases} L\left[\frac{1}{2\pi N}+\left|\frac{4\cos(\omega(1-1/4N))\sin\omega/4N}{\omega^2}-\frac{\cos\omega}{\omega N}\right|\right], & N\ge|\omega|, \\ \frac{L}{|\omega|}\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{N}\right), & N=\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]+1, \\ \frac{2L}{\omega^2}\left(\left[\frac{|\omega|}{\pi}\right]+1\right), & N<|\omega|, \end{cases} \quad (5)$$

$$E_3 \le 2^{-\tau 1}\left\{N\left(|f_0|+\frac{L}{2}\right)+|\omega|\left(|f_0|+L+|f_{N-1}|\right)+\delta\left(|f_0|+L+|f_{N-1}|\right)+2|f_0|+\frac{7}{2}L+3|f_{N-1}|-\frac{|\omega|+\delta+4}{N}L\right\}, \quad (6)$$

$\tau_1=\tau-\log_2(1{,}06)=\tau-0{,}08406$, $\delta>0$ – константа, що залежить від способу обчислення синусів і косинусів.

Доведення

1) Нехай Δ – максимальна похибка, з якою задана функція $f(x)$ у вузлах x_i, $i=\overline{0,N}$: $\left|f(x_i)-\widetilde{f}(x_i)\right|\le\Delta$. Оцінимо абсолютну неусувну похибку E_1:

$$E_1=\left|\sum_{i=0}^{N-1}\left[f(x_i)-\widetilde{f}(x_i)\right]\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\sin\omega x dx\right|\le\sum_{i=0}^{N-1}\left|f(x_i)-\widetilde{f}(x_i)\right|\left|\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\sin\omega x dx\right|\le N\cdot\Delta\cdot\frac{2\left|\sin\omega\frac{\Delta x}{2}\right|}{|\omega|}.$$

Оскільки $\left|\sin\omega\frac{\Delta x}{2}\right|\le|\omega|\frac{\Delta x}{2}$, то $E_1\le\Delta\cdot N\Delta x=\Delta\cdot(x_N-x_0)=\Delta\cdot(1-0)=\Delta$.

Ймовірнісна оцінка неусувної похибки E_1 доведена в монографії [1].

2) Оцінка абсолютної похибки методу E_2 квадратурної формули $R_1(\omega)$ в класі Q_L доведена в монографії [1] у випадку, коли $N\ge|\omega|$, $N=\frac{|\omega|}{\pi}+1$, та в роботі [2] у випадку, коли $N<|\omega|$.

3) Обчислимо інтеграли $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\sin\omega x dx$ та приведемо формулу $R_1(\omega)$ до вигляду, зручного для обчислення на ЕОМ:

$$R_2(\omega)=\sum_{i=0}^{N-1}f_i\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\sin\omega x dx=\frac{1}{\omega}\left(f_0\cos\omega x_0-f_0\cos\omega x_{\frac{1}{2}}+f_1\cos\omega x_{\frac{1}{2}}-f_1\cos\omega x_{\frac{3}{2}}+\ldots+\right.$$

$$\left.+f_{N-1}\cos\omega x_{N-\frac{3}{2}}-f_{N-1}\cos\omega x_N\right)=\frac{1}{\omega}\left(f_0\cos\omega x_0+\sum_{i=1}^{N-1}\Delta f_i\cos\omega x_{i-\frac{1}{2}}-f_{N-1}\cos\omega x_N\right),\Delta f_i=f_i-f_{i-1}.$$

Скориставшись співвідношеннями Уілкінсона [3] для похибок заокруглення виконання основних арифметичних операцій, а також припустивши, що $fl(\sin\alpha)=\sin\alpha+\delta\theta\varepsilon$, $fl(\cos\alpha)=\cos\alpha+\delta\theta\varepsilon$, де $\delta>0$ – константа, що залежить від способу обчислення синусів і косинусів та не залежить від вхідних даних, $-1\le\theta\le1$, $\varepsilon=2^{-\tau}$, отримаємо

$$fl(R_1(\omega))=R_1(\omega)+\left\{(\delta\theta+(N+2)\cos\omega x_0)f_0\varepsilon_0-2f_0\sin\left(\omega x_0+\frac{\omega x_0\varepsilon_{01}}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega x_0\varepsilon_{01}}{2}\right)+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{N-1}\left[(\delta\theta+(N+4-i)\cos\omega x_i)\Delta f_i\varepsilon_i-2\Delta f_i\sin\left(\omega x_i+\frac{\omega x_i\varepsilon_{i1}}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega x_i\varepsilon_{i1}}{2}\right)\right]-$$

$$\left.-(\delta\theta+3\cos\omega x_N)f_{N-1}\varepsilon_N+2f_{N-1}\sin\left(\omega x_N+\frac{\omega x_N\varepsilon_{N1}}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega x_N\varepsilon_{N1}}{2}\right)\right\},$$

де $|\varepsilon_i|<2^{-\tau_1}$, $|\varepsilon_{i1}|<2^{-\tau_1}$, $i=\overline{0,N}$, $\tau_1=\tau-\log_2(1{,}06)=\tau-0{,}08406$.

Врахувавши, що $|\cos\alpha| \le 1$, $|\sin\alpha| \le 1$ та $|\sin\alpha| \le |\alpha|$, при $|\alpha| \le 1$, отримаємо наступну оцінку похибки заокруглень:

$$E_3 \le 2^{-\tau_1}\left\{\left(\delta + N + 2 + |\omega x_0|\right)|f_0| + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\delta + N + 4 - i + |\omega x_i|\right)|\Delta f_i| + \left(\delta + 3 + |\omega x_N|\right)|f_{N-1}|\right\}.$$

Оскільки $x_i \in [0,1]$, $f(x) \in Q_L$, а отже $x_i \le 1$, $|\Delta f_i| \le L\Delta x$, врешті-решт маємо

$$E_3 \le 2^{-\tau_1}\left\{\left(\delta + N + 2 + |\omega|\right)|f_0| + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\delta + N + 4 - i + |\omega|\right)L|\Delta x_i| + \left(\delta + 3 + |\omega|\right)|f_{N-1}|\right\} \le 2^{-\tau_1} \times$$

$$\times\left\{\left(\delta + N + 2 + |\omega|\right)|f_0| + \sum_{i=1}^{N-1}\left(\delta + N + 4 - i + |\omega|\right)\frac{L}{N} + \left(\delta + 3 + |\omega|\right)|f_{N-1}|\right\} = 2^{-\tau_1}\left\{\left(\delta + N + 2 + \right.\right.$$

$$\left. + |\omega|\right)|f_0| + \left(\delta + \frac{N}{2} + 4 + |\omega|\right)(N-1)\frac{L}{N} + \left(\delta + 3 + |\omega|\right)|f_{N-1}|\Big\} = 2^{-\tau_1}\left\{N\left(|f_0| + \frac{L}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + |\omega|\left(|f_0| + L + |f_{N-1}|\right) + \delta\left(|f_0| + L + |f_{N-1}|\right) + 2|f_0| + \frac{7}{2}L + 3|f_{N-1}| - \frac{|\omega| + \delta + 4}{N}L\right\}.$$

Теорема доведена.

Клас $C_{L,N}$

Розглянемо квадратурну формулу обчислення інтеграла $I_1(\omega)$ вигляду:

$$R_2(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_1^*(x)\sin\omega x dx, \tag{7}$$

$$\text{де } f_1^*(x) = \begin{cases} f_i, & x_i \le x \le \bar{x}_i, \\ f_i + L(x - x_i)sign(\Delta f_i), & \bar{x}_i \le x \le \bar{\bar{x}}_i, \\ f_{i+1}, & \bar{\bar{x}}_i \le x \le x_{i+1}, \\ & x \notin [x_{N-1}, x_N], \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \le x \le x_N, \end{cases} \tag{8}$$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} - \frac{|\Delta f_i|}{2L}, \quad \bar{\bar{x}}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} + \frac{|\Delta f_i|}{2L}. \tag{9}$$

Теорема 2. Нехай $f(x) \in C_{L,N}$, виконується умова У1, можливі похибки задання функції, обмежені умовами $\left|f(x_i) - \tilde{f}(x_i)\right| \le \varepsilon_i$, $i = \overline{0, N}$, та обчислення проводяться на ЕОМ в режимі з плаваючою комою з τ двійковими розрядами у мантис чисел. Тоді квадратурна формула $R_2(\omega)$ наближеного обчислення $I_1(\omega)$ є оптимальною за точністю при $N \ge |\omega|$ та $N = |\omega|/\pi + 1$, при цьому з точністю до величин другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ справедлива оцінка повної абсолютної похибки квадратурної формули $R_2(\omega)$ вигляду:

$$E \le E_1 + E_2 + E_3, \tag{10}$$

де $E_1+E_2=\frac{1}{2|\omega|}\left|\sum_{i=0}^{N-2}sign(\sin\omega x_i)\left[\cos\omega x_i\left(\xi_i^+-\xi_i^-\right)-\cos\omega x_{i+1}\left(\xi_{i+1}^+-\xi_{i+1}^-\right)+\frac{2L}{\omega}\left(\sin\omega\overline{x}_i^{-}+\right.\right.\right.$

$$\left.\left.+\sin\omega\overline{x}_i^{+}-\sin\omega x_i-\sin\omega x_{i+1}\right)\right]+sign(\sin\omega x_{N-1})\left[\cos\omega x_{N-1}\left(\xi_{N-1}^+-\xi_{N-1}^-\right)+\right. \tag{11}$$

$$\left.\left.+\cos\omega x_N\left(\xi_N^++\xi_N^--2L\Delta x_{N-1}\right)+\frac{2L}{\omega}\left(\sin\omega x_N-\sin\omega x_{N-1}\right)\right]\right|,\ N\ge|\omega|,$$

$$E_1+E_2=\frac{L}{2|\omega|}\left|\sum_{i=0}^{\left[\frac{|\omega|}{\pi}-1\right]}sign(\sin\omega x_i)\left[\frac{2}{\omega}\left(\sin\omega\overline{x}_i^{-}+\sin\omega\overline{x}_i^{+}\right)+\Delta\xi_i^--\Delta\xi_i^+\right]-\right.$$

$$\left.-sign(\sin\omega x_{N-1})\frac{2\pi}{|\omega|+\pi}\right|,\ N=[|\omega|/\pi]+1, \tag{12}$$

$$E_3\le2^{-\tau_1}\left[\frac{1+LC}{\omega^2}N^2+\left(\frac{1}{|\omega|}\left(|f_0|+4(1+LC)\right)+\frac{1}{\omega^2}\left((1+LC)(4\delta+11+3C)+3LC\right)\right)N+|f_0|+\right.$$

$$\left.+|f_{N-1}|+\frac{1}{|\omega|}\left(|f_0|(\delta+4)-4(1+LC)+|f_{N-1}|(\delta+3)\right)-\frac{1}{\omega^2}\left((1+LC)(4\delta+12+3C)+3LC\right)\right], \tag{13}$$

$\tau_1=\tau-\log_2(1{,}06)=\tau-0{,}08406$, $\max\limits_i\Delta x_i=\frac{C}{N}$, $\delta>0$ – константа, що залежить від способу обчислення синусів і косинусів.

Доведення

1. Оцінка E_1+E_2 доведена в [4].

2. Обчислимо інтеграли $\int_{x_i}^{x_{i+1}}f_1^*(x)\sin\omega x dx$ та приведемо формулу $R_2(\omega)$ до вигляду, зручного для обчислення на ЕОМ:

$$R_2(\omega)=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f_1^*(x)\sin\omega x dx=\sum_{i=0}^{N-2}\left\{\int_{x_i}^{\overline{x}_i}f_i\sin\omega x dx+\int_{\overline{x}_i}^{\overline{\overline{x}}_i}[f_i+Lsign(\Delta f_i)(x-x_i)]\sin\omega x dx+\right.$$

$$\left.+\int_{\overline{\overline{x}}_i}^{x_{i+1}}f_{i+1}\sin\omega x dx\right\}+\int_{x_{N-1}}^{x_N}f_{N-1}\sin\omega x dx=\frac{1}{\omega}\left\{f_0\cos\omega x_0+\sum_{i=1}^{N-2}\left[\left(sign(\Delta f_i)L\Delta x_i-\Delta f_i\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sin\omega\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+\frac{2}{\omega}\cos\omega\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right]\sin\omega\frac{|\Delta f_i|}{2L}-f_{N-1}\cos\omega x_N\right\}.$$

Скориставшись тими ж міркуваннями, що і при доведенні пункту 3 теореми 1, та врахувавши, що $f(x)\in C_{L,N}$, $x\in[0,1]$, отримаємо таку оцінку похибки заокруглень:

$$E_3\le\frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\left\{|f_0|(\delta+N+1+|\omega x_0|)+\sum_{i=0}^{N-2}\left[L\Delta x_i\left(4\delta+2N+13-2i+2|\omega|\left(2\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+3\frac{\Delta x_i}{2}\right)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{|\omega|}\left(4\delta+2N+10-2i+2|\omega|\left(2\frac{x_i+x_{i+1}}{2}+3\frac{\Delta x_i}{2}\right)\right)\right]+|f_{N-1}|(\delta+3+|\omega x_N|)\right\}.$$

Нехай $\max\limits_i \Delta x_i = \dfrac{C}{N}$. Оскільки $x_i \in [0,1]$, врешті-решт маємо

$$
\begin{aligned}
E_3 \le{}& \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\Bigg\{ |f_0|\big(\delta + N + 4 + |\omega|\big) + \sum_{i=0}^{N-2}\Bigg[L\frac{C}{N}2\left(2\delta + N + \frac{13}{2} - i + |\omega|\left(2 + \frac{3C}{2N}\right)\right) + \\
&+ \frac{2}{|\omega|}\left(2\delta + N + 5 - i + |\omega|\left(2 + \frac{3C}{2N}\right)\right)\Bigg] + |f_{N-1}|\big(\delta + 3 + |\omega|\big)\Bigg\} = \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\Bigg\{ |f_0|\big(\delta + N + 4 + |\omega|\big) + \\
&+ \left[L\frac{C}{N}\left(4\delta + N + 15 + 2|\omega|\left(2 + \frac{3C}{2N}\right)\right) + \frac{1}{|\omega|}\left(4\delta + N + 12 + 2|\omega|\left(2 + \frac{3C}{2N}\right)\right)\right](N-1) + \\
&+ |f_{N-1}|\big(\delta + 3 + |\omega|\big)\Bigg\} \le \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\Bigg\{ \frac{1+LC}{\omega^2}N^2 + \Bigg[\frac{1}{|\omega|}\big(|f_0| + 4(1+LC)\big) + \frac{1}{\omega^2}\big((1+LC)\times \\
&\times (4\delta + 11 + 3C) + 3LC\big)\Bigg]N + |f_0| + |f_{N-1}| + \frac{1}{|\omega|}\big(|f_0|(\delta+4) - 4(1+LC) + |f_{N-1}|(\delta+3)\big) - \\
&- \frac{1}{\omega^2}\big((1+LC)(4\delta + 12 + 3C) + 3LC\big)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Теорема доведена.

Зауваження 1. У випадку рівномірної сітки $C = 1$.

Клас $W_{2,L}$

Розглянемо квадратурну формулу вигляду

$$
R_3(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(x)\sin\omega x dx, \qquad (14)
$$

де $S_3(x)$ – ермітовий кубічний сплайн, $S_3(x_i) = f_i$, $S_3'(x_i) = f_i'$, $i = \overline{0,N}$.

Відомо [5], що $S_3(x)$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ можна записати у вигляді $S_3(x) = \varphi_1(t)f_i + {}$ $+\varphi_2(t)f_{i+1} + \varphi_3(t)hf_i' + \varphi_4(t)hf_{i+1}'$, де $\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t)$, $\varphi_2(t) = t^2\times(3-2t)$, $\varphi_3(t) = t(1-t)^2$, $\varphi_3(t) = -t^2(1-t)$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $t = (x - x_i)/h_i$.

Теорема 3. Нехай $f(x) \in W_{2,L}$ задана таблицею значень $\{f_i\}_0^N$, $\{f_i'\}_0^N$ у вузлах рівномірної сітки $x_i = i\cdot h, h = 1/N, i = \overline{0,N}$, можливі похибки задання функції $f(x)$ у вузлах x_i не перевищують Δ, можливі похибки задання похідної $f'(x)$ у вузлах x_i не перевищують Δ', та обчислення проводяться на ЕОМ в режимі з плаваючою комою з τ двійковими розрядами у мантис чисел. Тоді квадратурна формула $R_3(\omega)$ наближеного обчислення $I_1(\omega)$ є оптимальною за порядком за точністю в класі $W_{2,L}$ при $N \ge |\omega|$, при цьому з точністю до величин другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ справедлива така оцінка повної абсолютної похибки квадратурної формули $R_3(\omega)$

$$
E \le E_1 + E_2 + E_3, \qquad (15)
$$

де $E_1 \le \left(\dfrac{N}{|\omega|}\right)^4 12(4\Delta + \Delta') + \left(\dfrac{N}{|\omega|}\right)^3 12(\Delta + \Delta') + \dfrac{1}{|\omega|}\left(\dfrac{N}{|\omega|}2\Delta' + 2\Delta - \left(\dfrac{N}{|\omega|}\right)^2 6\Delta' - \left(\dfrac{N}{|\omega|}\right)^3 24\Delta\right)$, (16)

$$E_2 \le \frac{L}{16N^2}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sin 2\omega}{4\omega}}\,, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
E_3 \le 2^{-\tau_1}\Bigg\{ & N^5\frac{6L}{\omega^4} + N^4\left(\frac{6L}{|\omega|^3}+\frac{12L}{\omega^4}\left(\delta+20+|\omega|\right)\right) + N^3\left(\frac{L}{|\omega|^3}\left(12\delta+175+12|\omega|\right)+\frac{36L}{\omega^4}\left(\delta+19+|\omega|\right)\right)+ \\
& + N^2\left(\frac{|f_0|}{\omega^2}+\frac{5L}{|\omega|^3}-\frac{12L}{\omega^4}\right) + N\left(|f_0|\left(\frac{1}{|\omega|}+\frac{1}{\omega^2}\left(\delta+8+|\omega|\right)\right)+\frac{|f_N|}{\omega^2}\left(\delta+9+|\omega|\right)+\right. \\
& \left. + \frac{6L}{|\omega|^3}\left(\delta+15+|\omega|\right)\right) + \frac{|f_0|}{|\omega|}\left(\delta+4+|\omega|\right) + \frac{|f_N|}{|\omega|}\left(\delta+5+|\omega|\right)\Bigg\},
\end{aligned} \tag{18}$$

де $\tau_1 = \tau - \log_2(1{,}06) = \tau - 0{,}08406$, $\delta > 0$ – константа, що залежить від способу обчислення синусів і косинусів.

Доведення

1. Обчислимо інтеграли $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(x)\sin\omega x dx$ та приведемо формулу $R_3(\omega)$ до вигляду, зручного для обчислення на ЕОМ:

$$\begin{aligned}
R_3(\omega) = & \sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S_3(x)\sin\omega x dx = \frac{1}{\omega}\Bigg\{\cos\omega x_0\left(f_0+\frac{1}{(\omega h)^2}\left(6(f_0-f_1)+2(2f_0'+f_1')\right)\right)+\frac{\sin\omega x_0}{\omega h}\times \\
& \times\left(-f_0'+\frac{1}{(\omega h)^2}6\left(2(f_0-f_1)+(f_0'-f_1')\right)\right)+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{(\omega h)^2}\Bigg[\cos\omega x_i\left(6(f_{i-1}-f_{i+1})+2(f_{i-1}'+4f_i'+\right. \\
& \left.+f_{i+1}')\right)+\frac{\sin\omega x_i}{\omega h}6\left(2(-f_{i-1}+2f_i-f_{i+1})+(-f_{i-1}'+f_{i+1}')\right)\Bigg]+\cos\omega x_N\left(-f_N+\frac{1}{(\omega h)^2}\times\right. \\
& \left.\times\left(6(f_{N-1}-f_N)+2(f_{N-1}'+2f_N')\right)\right)+\frac{\sin\omega x_N}{\omega h}\left(f_N'+\frac{1}{(\omega h)^2}6\left(2(f_N-f_{N-1})-(f_{N-1}'-f_N')\right)\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_1 = & \left|\frac{1}{\omega}\left\{\cos\omega x_0\left(\left(f_0-\tilde f_0\right)+\frac{1}{(\omega h)^2}\left(6\left(\left(f_0-\tilde f_0\right)-\left(f_1-\tilde f_1\right)\right)+2\left(2\left(f_0'-\tilde f_0'\right)+\left(f_1'-\tilde f_1'\right)\right)\right)\right)+\right.\right. \\
& +\frac{\sin\omega x_0}{\omega h}\left(-\left(f_0'-\tilde f_0'\right)+\frac{1}{(\omega h)^2}6\left(2\left(\left(f_0-\tilde f_0\right)-\left(f_1-\tilde f_1\right)\right)+\left(\left(f_0'-\tilde f_0'\right)-\left(f_1'-\tilde f_1'\right)\right)\right)\right)+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{(\omega h)^2}\times \\
& \Big[\cos\omega x_i\left(6\left(\left(f_{i-1}-\tilde f_{i-1}\right)-\left(f_{i+1}-\tilde f_{i+1}\right)\right)+2\left(\left(f_{i-1}'-\tilde f_{i-1}'\right)+4\left(f_i'-\tilde f_i'\right)+\left(f_{i+1}'-f_{i+1}'\right)\right)\right)+ \\
& +\frac{\sin\omega x_i}{\omega h}6\left(2\left(-\left(f_{i-1}-\tilde f_{i-1}\right)+2\left(f_i-\tilde f_i\right)-\left(f_{i+1}-\tilde f_{i+1}\right)\right)+\left(-\left(f_{i-1}'-\tilde f_{i-1}'\right)+\left(f_{i+1}'-f_{i+1}'\right)\right)\right)\Big]+ \\
& +\cos\omega x_N\left(-\left(f_N-\tilde f_N\right)+\frac{1}{(\omega h)^2}\left(6\left(\left(f_{N-1}-\tilde f_{N-1}\right)-\left(f_N-\tilde f_N\right)\right)+2\left(\left(f_{N-1}'-\tilde f_{N-1}'\right)+2\left(f_N'-\tilde f_N'\right)\right)\right)\right)+ \\
& \left.\left.+\frac{\sin\omega x_N}{\omega h}\left(\left(f_N'-\tilde f_N'\right)+\frac{1}{(\omega h)^2}6\left(2\left(\left(f_N-\tilde f_N\right)-\left(f_{N-1}-\tilde f_{N-1}\right)\right)-\left(\left(f_{N-1}'-\tilde f_{N-1}'\right)-\left(f_N'-\tilde f_N'\right)\right)\right)\right)\right\}\right| \le \\
& \le\left(\frac{N}{|\omega|}\right)^4 12(4\Delta+\Delta')+\left(\frac{N}{|\omega|}\right)^3 12(\Delta+\Delta')+\frac{1}{|\omega|}\left(\frac{N}{|\omega|}2\Delta'+2\Delta-\left(\frac{N}{|\omega|}\right)^2 6\Delta'-\left(\frac{N}{|\omega|}\right)^3 24\Delta\right).
\end{aligned}$$

2. Оцінимо абсолютну похибку методу $E_2 = \left| \int_0^1 (S_3(x) - f(x)) \sin \omega x dx \right|$.

Скориставшись нерівністю Гельдера, отримаємо

$$E_2 \le \sqrt{\int_0^1 (S_3(x) - f(x))^2 dx} \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \omega x dx}.$$

В [5] доведено, що $\sqrt{\int_0^1 (S_3(x) - f(x))^2 dx} = \|S_3(x) - f(x)\|_{L_2[0,1]} \le \frac{L}{16N^2}$.

$$\sqrt{\int_0^1 \sin^2 \omega x dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 2\omega x) dx} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4\omega}\int_0^1 \cos 2\omega x d 2\omega x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4\omega}}.$$

Отже $E_2 \le \frac{L}{16N^2}\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\omega}{4\omega}}$.

3. Скориставшись тими ж міркуваннями, що і при доведенні пункту 3 теореми 1 та врахувавши, що $f(x) \in W_{2,L}$, а отже $x_i \le 1$, $|\Delta f_i| \le Lh$, $f'(x) \le L$, отримаємо наступну оцінку похибки заокруглень:

$$E_3 \le \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\left\{ |f_0|(\delta + N + 4 + |\omega x_0|) + \frac{6LN^2}{\omega^2}(\delta + N + 14 + |\omega|)\left(\frac{1}{N}+1\right) + \frac{N}{|\omega|}\left(|f_0|(\delta + N + 8 + |\omega|) + \frac{12LN^2}{\omega^2}(\delta + N + 18 + |\omega|)\left(\frac{1}{N}+1\right)\right) + \sum_{i=1}^{N-1}\frac{2LN^2}{\omega^2}\left[3(\delta + N + 14 - i + |\omega|)\frac{1}{N} + 6\delta + 6N + 86 - 6i + 6|\omega| + \frac{6N}{|\omega|}\left(\frac{2}{N}(\delta + N + 19 - i + |\omega|) + \delta + N + 18 - i + |\omega|\right)\right] + |f_N|(\delta + 5 + |\omega|) + \frac{6LN^2}{\omega^2}(\delta + 15 + |\omega|)\left(\frac{1}{N}+1\right) + \frac{N}{|\omega|}\left(|f_N|(\delta + 9 + |\omega|) + \frac{12LN^2}{\omega^2}(\delta + 19 + |\omega|)\left(\frac{1}{N}+1\right)\right)\right\} =$$

$$= \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\left\{ N^5\frac{6L}{|\omega|^3} + N^4\left(\frac{6L}{\omega^2} + \frac{12L}{|\omega|^3}(\delta + 20 + |\omega|)\right) + N^3\left(\frac{L}{\omega^2}(12\delta + 175 + 12|\omega|) + \frac{36L}{|\omega|^3}\times (\delta + 19 + |\omega|)\right) + N^2\left(\frac{|f_0|}{|\omega|} + \frac{6L}{\omega^2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) - \frac{12L}{|\omega|^3}\right) + N\left(|f_0|\left(1 + \frac{1}{|\omega|}(\delta + 8 + |\omega|)\right) + \frac{|f_N|}{|\omega|}\times (\delta + 9 + |\omega|) + \frac{6L}{\omega^2}(\delta + 15 + |\omega|)\right) + |f_0|(\delta + 4 + |\omega|) + |f_N|(\delta + 5 + |\omega|)\right\}.$$

Теорема доведена.

Класс $W_{2,N,L}$

Для обчислення інтеграла $I_1(\omega)$ у випадку, коли $f(x) \in W_{2,N,L}$, в монографії [4] побудована квадратурна формула вигляду

$$R_4(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_2^*(x)\sin \omega x dx, \tag{19}$$

$$f_2^*(x)=\begin{cases} f_i+f_i'(x-x_i), & x_i\le x\le \tilde{x}_i,\\ \frac{1}{2}\left[f_i+f_i'(x-x_i)+f_{i+1}+f_{i+1}'(x-x_{i+1})\right]+ & \\ +\frac{L}{4}sign(\Delta f_i')\left[(x-x_i)^2+(x-x_{i+1})^2\right], & \tilde{x}_i\le x\le \tilde{\tilde{x}}_i,\\ f_{i+1}+f_{i+1}'(x-x_{i+1}), & \tilde{\tilde{x}}_i\le x\le x_{i+1},\\ & x\notin[x_{N-1},x_N],\\ f_{N-1}+f_{N-1}'(x-x_{N-1}), & x\in[x_{N-1},x_N],\end{cases} \tag{20}$$

$\tilde{x}_i=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}-\dfrac{|\Delta f_i'|}{2L}$, $\tilde{\tilde{x}}_i=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}+\dfrac{|\Delta f_i'|}{2L}$.

Теорема 4. Нехай $f(x)\in W_{2,N,L}$, виконуються умови У1 та У2, можливі похибки задання функції та її похідної обмежені умовами $\left|f(x_i)-\tilde{f}(x_i)\right|\le\varepsilon_i$, $\left|f'(x_i)-\tilde{f}'(x_i)\right|\le\delta_i$, $i=\overline{0,N}$, та обчислення проводяться на ЕОМ в режимі з плаваючою комою з τ двійковими розрядами у мантис чисел. Тоді квадратурна формула $R_4(\omega)$ наближеного обчислення $I_1(\omega)$ є оптимальною за точністю при $N\ge|\omega|$ та $N=|\omega|/\pi+1$, при цьому з точністю до величин другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ справедлива така оцінка повної абсолютної похибки квадратурної формули $R_4(\omega)$

$$E\le E_1+E_2+E_3, \tag{21}$$

де $E_1+E_2=\sum\limits_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)\sin\omega x dx$, (22)

$$\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)=\begin{cases} \varepsilon_i+\frac{1}{2}\left(\eta_i^+-\eta_i^-\right)(x-x_i)+\frac{L}{2}(x-x_i)^2, & x_i\le x\le \bar{x}_i,\\ \frac{L}{4}\left[(x-x_i)^2-(x-x_{i+1})^2\right]+\frac{1}{2}(\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1})+\frac{1}{4}\left\{\left[\left(1-sign\left(\Delta\tilde{f}_i'\right)\right)\eta_i^+-\right.\right. & \\ \left.-\left(1-sign\left(\Delta\tilde{f}_i'\right)\right)\eta_i^-\right](x-x_i)+\left[\left(1-sign\left(\Delta\tilde{f}_i'\right)\right)\eta_{i+1}^+-\right. & \\ \left.\left.-\left(1-sign\left(\Delta\tilde{f}_i'\right)\right)\eta_{i+1}^-\right](x-x_{i+1})\right\}+\frac{1}{2}sign\left(\Delta\tilde{f}_i'\right)\times & \\ \times\left[\tilde{f}_i+\tilde{f}_i'(x-x_i)-\tilde{f}_{+1i}-\tilde{f}_{i+1}'(x-x_{i+1})\right], & \bar{x}_i\le x\le \bar{\bar{x}}_i,\\ \varepsilon_{i+1}+\frac{1}{2}\left(\eta_{i+1}^+-\eta_{i+1}^-\right)(x-x_{i+1})-\frac{L}{2}(x-x_{i+1})^2, & \bar{\bar{x}}_i\le x\le x_{i+1},\end{cases} \tag{23}$$

$$E_3\le\frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\left(N^2L\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega^2}\right)+N\left(|f_0|+L\left(4|\omega|+\delta+\frac{23}{2}\right)+LC+\frac{L}{\omega^2}(9|\omega|+2\delta+21)\right)+\right.$$

$$+|f_0|(|\omega|+\delta+4)+LC(8|\omega|+2\delta+21)-L(4|\omega|+\delta+13)+\frac{L}{|\omega|}(|\omega|+2\delta+9)- \tag{24}$$

$$-\frac{L}{\omega^2}(8|\omega|+2\delta+22)+|f_{N-1}|(|\omega|+\delta+5)+\frac{1}{N}\left(LC^2\left(2|\omega|+\frac{\delta}{2}+\frac{23}{4}\right)-\right.$$

$\left.\left.-LC(7|\omega|+\delta+15)\right)-LC^2\left(2|\omega|+\frac{\delta}{2}+6\right)\right)$, $\max\limits_i\Delta x_i=\dfrac{C}{N}$, $\delta>0$ – константа, що залежить від способу обчислення синусів і косинусів.

Тут $\bar{x}_i = \min\left(\tilde{x}_i^-, \tilde{x}_i^+\right), \bar{\bar{x}}_i = \max\left(\tilde{x}_i^-, \tilde{x}_i^+\right)$, $\tilde{x}_i^\pm = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \pm \varphi_i$, $\varphi_i = \frac{s_i}{p_i}$, $s_i = \frac{\Delta x_i}{2} \times$ $\times\left[\tilde{f}_i' + \tilde{f}_{i+1}' + \frac{1}{2}\left(\eta_i^+ + \eta_i^- + \eta_{i+1}^+ + \eta_{i+1}^-\right) + \frac{1}{2} sign(\sin \omega x_i)\left(\eta_i^+ - \eta_i^- + \eta_{i+1}^+ - \eta_{i+1}^-\right)\right] - \left(\Delta\tilde{f}_i - \Delta\varepsilon_i\right)$, $p_i = \Delta\tilde{f}_i' + \frac{1}{2}\left(\Delta\eta_i^+ + \Delta\eta_i^-\right)\left(1 + sign(\sin \omega x_i)\right) + L sign(\sin \omega x_i)\Delta x_i$, η_i^+, η_i^- – відповідно максимально і мінімально допустимі розв'язки системи лінійних нерівностей

$$\begin{cases} -\delta_i \le \eta_i \le \delta_i, \quad i = \overline{0, N-1}, \\ -L\Delta x_i - \Delta\tilde{f}_i' \le \eta_{i+1} - \eta_i \le L\Delta x_i - \Delta\tilde{f}_i', \quad i = \overline{0, N-2}. \end{cases}$$

Доведення

1. Оцінка $E_1 + E_2$ доведена в [4].

2. Обчислимо інтеграли $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x)\sin \omega x dx$ та приведемо формулу $R_4(\omega)$ до вигляду, зручного для обчислення на ЕОМ:

$$R_4(\omega) = \sum_{i=0}^{N-1}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f^*(x)\sin \omega x dx = \sum_{i=0}^{N-2}\left\{\int\limits_{x_i}^{\bar{x}_i}\left[f_i + f_i'(x - x_i)\right]\sin \omega x dx + \right.$$

$$+\int\limits_{\bar{x}_i}^{\bar{\bar{x}}_i}\left[\frac{1}{2}\left[f_i + f_i'(x - x_i) + f_{i+1}'(x - x_{i+1}) + f_{i+1}\right] + \frac{L}{4} sign(\Delta f_i')\left[(x - x_i)^2 + (x - x_{i+1})^2\right]\right]\sin \omega x dx +$$

$$\left. + \int\limits_{\bar{\bar{x}}_i}^{x_{i+1}}\left[f_{i+1} + f_{i+1}'(x - x_{i+1})\right]\sin \omega x dx\right\} + \int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}\left[f_{N-1} + f_{N-1}'(x - x_{N-1})\right]\sin \omega x dx =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left\{f_0 \cos \omega x_0 - \frac{f_0'}{\omega}\sin \omega x_0 + \sum_{i=1}^{N-2}\left[\left(\cos \omega\bar{\bar{x}}_i + \cos \omega\bar{x}_i\right)\left(\frac{\Delta f_i}{2} - \frac{\Delta x_i\left(f_i' + f_{i+1}'\right)}{4} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + sign(\Delta f_i')\frac{L(\Delta x_i)^2}{8}\right) + \left(\cos \omega\bar{\bar{x}}_i - \cos \omega\bar{x}_i\right)\left(sign(\Delta f_i')\frac{(\Delta f_i')^2}{8L} + sign(\Delta f_i')\frac{L}{\omega^2}\right)\right] -$$

$$\left. - \left(f_{N-1} + \Delta x_{N-1} f_{N-1}'\right)\cos \omega x_N + \frac{f_{N-1}'}{\omega}\sin \omega x_N\right\}.$$

Скориставшись тими ж міркуваннями, що і при доведенні пункту 3 теореми 1 та врахувавши, що $f(x) \in W_{2,N,L}$, $x_i \le 1$, $|\Delta f_i| \le L|\Delta x_i|$, $f'(x) \le L$, отримаємо наступну оцінку похибки заокруглень:

$$E_3 \le \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\left\{|f_0|\left(\delta + N + 4 + |\omega|\right) + \frac{L}{|\omega|}\left(\delta + N + 5 + |\omega|\right) + \sum_{i=0}^{N-2}\left[L|\Delta x_i|\left(2\delta + 2N + 20 - 2i\right) + \right.\right.$$

$$+ \frac{L(\Delta x_i)^2}{8}\left(2\delta + 2N + 22 - 2i\right) + \frac{L}{2}\left(2\delta + 2N + 22 - 2i\right) + \frac{L}{\omega^2}\left(2\delta + 2N + 18 - 2i\right) + 8|\omega| \times$$

$$\left.\left. \times\left(L|\Delta x_i| + \frac{L(\Delta x_i)^2}{8} + \frac{L}{2} + \frac{L}{\omega^2}\right)\right] + |f_{N-1}|\left(\delta + 5 + |\omega|\right) + L|\Delta x_{N-1}|\left(\delta + 7 + |\omega|\right) + \frac{L}{|\omega|}\left(\delta + 4 + |\omega|\right)\right\}.$$

Нехай $\max\limits_i \Delta x_i = \frac{C}{N}$. Оскільки $x_i \in [0,1]$, врешті-решт маємо

$$E_3 \le \frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\left\{|f_0|\left(\delta + N + 4 + |\omega|\right) + \frac{L}{|\omega|}\left(\delta + N + 5 + |\omega|\right) + \sum_{i=0}^{N-2}\left[L\frac{C}{N}2\left(\delta + N + 10 - i + 4|\omega|\right) + \right.\right.$$

$$+\frac{LC^2}{4N^2}\left(\delta+N+11-i+4|\omega|\right)+L\left(\delta+N+11-i+4|\omega|\right)+\frac{L}{\omega^2}2\left(\delta+N+9-i+4|\omega|\right)\Bigg]+|f_{N-1}|\times$$

$$\times\left(\delta+5+|\omega|\right)+L|\Delta x_{N-1}|\left(\delta+7+|\omega|\right)+\frac{L}{|\omega|}\left(\delta+4+|\omega|\right)\Bigg\}=\frac{2^{-\tau_1}}{|\omega|}\Bigg\{N^2L\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\omega^2}\right)+N\Bigg(|f_0|+$$

$$+L\left(4|\omega|+\delta+\frac{23}{2}\right)+LC+\frac{L}{\omega^2}\left(9|\omega|+2\delta+21\right)\Bigg)+|f_0|\left(|\omega|+\delta+4\right)+LC\left(8|\omega|+2\delta+21\right)-$$

$$-L\left(4|\omega|+\delta+13\right)+\frac{L}{|\omega|}\left(|\omega|+2\delta+9\right)-\frac{L}{\omega^2}\left(8|\omega|+2\delta+22\right)+|f_{N-1}|\left(|\omega|+\delta+5\right)+$$

$$+\frac{1}{N}\left(LC^2\left(2|\omega|+\frac{\delta}{2}+\frac{23}{4}\right)-LC\left(7|\omega|+\delta+15\right)\right)-LC^2\left(2|\omega|+\frac{\delta}{2}+6\right)\Bigg\}.$$

Теорема доведена.

Зауваження 2. В випадку рівномірної сітки $C=1$.

Висновки

Розв’язання більшості задач, в тому числі задач цифрової обробки сигналів, за допомогою сучасної обчислювальної техніки в основному полягає в створенні математичної моделі на основі спостережень досліджуваного явища або процесу, реалізації математичної моделі за допомогою обчислювального алгоритму, що апроксимує вихідну модель і робить її придатною для практичного використання, та розрахунків на ЕОМ. Похибки цієї апроксимації, а також похибки заокруглення реалізації обчислювального алгоритму на ЕОМ та похибки вимірювання або спостереження реалізацій досліджуваного процесу повинні враховуватися при визначенні міри адекватності математичної моделі та процесу.

У статті містяться результати з визначення похибки квадратурних формул наближеного обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій, пов’язаних з розв’язанням багатьох задач цифрової обробки сигналів. Отримані результати можуть бути широко застосованими в тестуванні якості розроблених обчислювальних алгоритмів та враховуватися при формулюванні вимог до точності розв’язку різноманітних задач цифрової обробки сигналів.

Література

1. Задирака В.К. Теория вычисления преобразования Фурье. – Киев: Наук. думка, 1983. – 215 с.
2. Задирака В.К., Мельникова С.С., Луц Л.В. Оптимальные квадратурные и кубатурные формулы вычисления преобразования Фурье финитных функций одного класса (случай сильной осцилляции) // Кибеpенетика и системный анализ. – 2007. – № 5. – С.144-164.
3. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
4. Задирака В.К., Мельникова С.С. Цифровая обработка сигналов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 294 с.
5. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

The complete absolute error estimates of the certain optimal with respect to accuracy quadrature formulas for computation of integrals of quick-oscillating functions are obtained. This results make in possible for guaranteed quality estimation of integration in the function classes being considered problem approximate solution.

Стаття надійшла до редакції 22.07.2008.