УДК 681.516.73

В.М. Синеглазов, Р.Ю. Ткачев

АВТОНОМНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНЫМ ОБЪЕКТОМ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

Предложен метод синтеза замкнутых многомерных систем управления объектом с запаздываниями общего вида. Приводятся выражения для реализуемости многомерного регулятора на базе интегрирующих фильтров и расчет его параметров, обеспечивающих заданные показатели качества.

Введение. Системы с запаздываниями, которые используются при описании разнообразных промышленных объектов управления, включая химические реакторы, машины по производству бумаги [1] — один из важнейших классов систем с распределенными параметрами. Задача управления такими объектами достаточно сложная. Наличие запаздывания в контуре управления ведет к возрастанию фазового сдвига, что может вызвать неустойчивость замкнутой системы даже при небольших коэффициентах усиления регулятора. Запаздывание возникает при охвате объекта управления контуром рециркуляции вещества, по которому выходной сигнал объекта, спустя время θ поступает на его вход. Наличие запаздывания в состоянии создает определенные трудности при построении высококачественной системы управления. В многомерных системах проблема усложняется тем, что к влиянию запаздывания добавляются взаимосвязи по входам и выходам.

Анализ исследований и публикаций. Синтезу систем управления одномерными объектами с запаздыванием посвящено множество работ, в которых рассматриваются вопросы устойчивости, качества и синтеза систем управления объектами, свидетельствующие об актуальности рассматриваемой проблемы [1–4]. Несмотря на это, задаче синтеза оптимальных многомерных замкнутых систем управления с запаздываниями общего вида, т.е. с запаздываниями как в координатах управления, так и состояния, не уделено должного внимания. Это объясняется сложностью решения подобной задачи, даже для критерия качества в виде интегральной квадратичной формы. Наиболее известное решение задачи синтеза регулятора для многомерного объекта с запаздываниями общего вида дано в [3].

Задача синтеза оптимальной системы управления многомерным объектом с несколькими различными запаздываниями заключается в нахождении уравнений регулятора, которые в совокупности с уравнениями объекта

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=\sum_i B_i x(t-\beta_i)+\sum_j M_j x(t-\mu_i),\\ y(t)=\sum_i P_i x(t-\pi_i),\end{gathered} \tag{1}$$

где x — n-мерный вектор состояний; y — l-мерный вектор выхода; u — w-мерный вектор управления; β_i, μ_j, π_i — постоянные запаздывания, образуют устойчивую систему и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^{\infty} [x^{\mathrm{T}}(t)\, Ax(t) + u^{\mathrm{T}}(t)\, Cu(t)]\, dt. \qquad (2)$$

В [3] рассмотрена процедура синтеза с использованием передаточных матриц. Поскольку передаточная матрица объекта содержит элементы чистого запаздывания, то регулятор должен включать элементы опережения, используя будущее значение выходов. Очевидно, что элементы опережения в чистом виде не могут быть реализованы, поэтому при синтезе используется редукция запаздываний уравнения (1) в сходящиеся ряды. В результате процедура синтеза становится громоздкой из-за увеличения порядка системы. Кроме того, заметно влияние изменения уставки по какому-либо одному из выходов объекта на динамику остальных выходов, возникают колебания, обусловленные наличием статических и динамических перекрестных связей между различными входами и выходами, т.е. не обеспечивается автономность системы. Также следует отметить дополнительные трудности решения подобного рода задач, когда вектор состояния объекта не совпадает с вектором выходных координат, связанные с необходимостью решения вспомогательной задачи относительно вектора состояния объекта и последующим переходом к непосредственно интересующим нас выходным координатам объекта. С решением последней непосредственно связан вопрос реализуемости квазиоптимального регулятора.

Постановка задачи. Рассматривается случай, когда доступны измерению только выходные координаты объекта. Объект полагаем вполне управляемым.

Запишем уравнения динамики непосредственно относительно выходных координат объекта (1), что позволит упростить процедуру синтеза оптимальной замкнутой системы, и попытаемся решить оптимальную задачу, оперируя лишь этими координатами:

$$[p^n + l_1 e^{-p\theta_1} p^{n-1} + \ldots + l_j e^{-p\theta_j} p^{n-j} + \ldots + l_n e^{-p\theta_n}]\, y = GU. \qquad (3)$$

Здесь y — вектор координат выхода объекта; U — вектор координат управления объекта; $p = d/dt$ — оператор дифференцирования; θ — время эффекта последействия; l_j — постоянные коэффициенты, определяемые элементами матрицы B_i, G — полиномиальная матрица, элементы которой являются многочленами с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования p, определяемая выражением

$$G = \sum_i P_i\, e^{-\pi_i p} \cdot \Delta \cdot \sum_j M_j\, e^{-\mu_i p}, \qquad (4)$$

Δ — присоединенная матрица по отношению к матрице $\left(pE - \sum_i B_i e^{-\beta_i p} \right)$.

По сути многочлен в левой части выражения (3) является характеристическим уравнением объекта (1) и определяется как $\det\left[pE - \sum_i B_i e^{-\beta_i p} \right]$.

Предположим, что система замыкается через звено, которое описывается уравнением

$$[p^r + \alpha_r p^{r-1} + \ldots + \alpha_1] z = H y, \tag{5}$$

где z — вектор координат выхода звена обратной связи, размерность которого совпадает с размерностью вектора выхода объекта y; H — полиномиальная матрица, элементы которой — многочлены с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования p

$$\begin{gathered} h_{ii} = [d_q p^{q-1} + \chi_s p^{s-1} + \cdots + \chi_1] e^{-\delta_{ii} p}, \\ h_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \; i = 1, 2, \ldots, l, \end{gathered} \tag{6}$$

δ_{ii} — время запаздывания в канале обратной связи, т.е. обратная связь в синтезируемой системе осуществляется инерционно-форсирующим звеном, выбор параметров которого позволяет смоделировать различные типы обратных связей.

Многочлен в левой части выражения (5) — характеристический полином звена обратной связи.

Поскольку для простоты решения мы перешли к вектору координат выхода, то вместо функционала (2) цель управления зададим в виде функционала

$$J = \int\limits_0^\infty (y_{\text{зад}} - z)^{\mathrm{T}} (y_{\text{зад}} - z)\, dt. \tag{7}$$

Функционал (7) представляет собой интегральный критерий вектора среднеквадратичной ошибки, определяющей близость измеряемого вектора замкнутой системы к заданному.

Требуемые показатели качества замкнутой системы управления задаются уравнением следующего вида:

$$[p^\nu + \gamma_1 p^{\nu-1} + \ldots + \gamma_k p^{\nu-k} + \ldots + \gamma_\nu] y = \Gamma y_{\text{зад}}. \tag{8}$$

Здесь $y_{\text{зад}}$ — задающее воздействие системы; Γ — полиномиальная матрица, элементы которой являются многочленами с постоянными коэффициентами относительно оператора дифференцирования p:

$$\Gamma_{ij} = [\gamma_{\nu-\lambda+1} p^{\lambda-1} + \ldots + \gamma_{\nu-1} p + \gamma_\nu] e^{-p\tau_{ij}}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, l, \tag{9}$$

γ и λ — порядок и астатизм синтезируемой системы, по ij-каналу соответственно; γ_k — коэффициенты, задающие распределение корней характеристического уравнения замкнутой системы; τ_{ij} — время чистого запаздывания по ij-каналу, значение которого выбирается согласно (4) и (6).

Задача управления в этом случае сводится к определению такого закона регулирования в форме

$$R_1(p, \tau, \theta)(y_{\text{зад}} - z) = R_2(p, \tau, \theta) U, \tag{10}$$

который, присоединенный к объекту управления (3), с учетом звена обратной связи (5) гарантировал бы минимальное значение функционалу (7).

В выражении (10) $R_1(p,\tau,\theta)$ и $R_2(p,\tau,\theta)$ — многочлены некоторых степеней оператора дифференцирования с коэффициентами, зависящими от фазовых координат объекта и времен запаздываний.

Для обеспечения автономности системы необходимо, чтобы обеспечивалась диагональность произведения полиномиальных матриц $R_1 G$. Матрица R_1 всегда будет диагональной, если полиномиальная матрица Г желаемой замкнутой системы также выбрана диагональной. Диагональность матрицы Г гарантирует частичную компенсацию взаимосвязей объекта. Полная компенсация возможна лишь в случае диагональности матрицы G, при этом будет обеспечена автономность системы в целом. Диагональность матрицы G не всегда соблюдается в силу специфики объекта управления, т.е. взаимосвязей переменных состояния. Поэтому введем дополнительное корректирующее устройство с полиномиальной матрицей G_k, которое обеспечивало бы диагональность произведения полиномиальных матриц $R_1 G_k G$. Компенсатор ищем в виде

$$G_k = \sum_i P_i e^{-\pi_i p} (\Delta)^{-1} \sum_j M_j e^{-\mu_j p}. \tag{11}$$

Данная публикация является обобщением работ [5, 6]

Основные результаты. Замкнутая система (3), (4), (10) и (11) описывается соотношением

$$\begin{gathered}
\{[p^n + l_1 e^{-p\theta_1} p^{n-1} + \ldots + l_j e^{-p\theta_j} p^{n-j} + \ldots + l_n e^{-p\theta_n}]\times \\
\times [p^r + \alpha_r p^{r-1} + \ldots + \alpha_1] R_2 + G G_k H R_1\} y = \\
= G G_k [p^r + \alpha_r p^{r-1} + \ldots + \alpha_1] R_1 y_{\text{зад}}.
\end{gathered} \tag{12}$$

С помощью последовательных разложений полиномиальных матриц G, G_k, H и Г по элементам различных строк и столбцов эти матрицы можно представить в виде многочлена

$$\begin{gathered}
G = p^m + G_1 p^{m-1} + \ldots + G_i p^{m-1} + \ldots + G_m; \\
G_k = p^m + G_{k_1} p^{m-1} + \ldots + G_{k_i} p^{m-1} + \ldots + G_{k_m}; \\
H = H_1 p^{q-1} + \ldots + H_q p^s + H_q X_1 p^{s-1} + \ldots + H_q X_s; \\
\Gamma = \Gamma_1 p^{\lambda-1} + \ldots + \Gamma_{\nu-1} p + \Gamma_\nu,
\end{gathered} \tag{13}$$

коэффициенты которых G_i, G_{k_i}, H_i, X_i, Γ_i представляют собой уже числовые матрицы той же размерности, что и исходные G, G_k, H, Г соответственно. Кроме того, элементы этих числовых матриц на основании уравнений (4), (6), (9) и (11) могут содержать звенья чистого запаздывания.

Сравнивая (8) и (12), учитывая (13) и выполняя математические преобразования, получаем

$$R_1(p,\tau,\theta)=[p^m+G_{k_1}p^{m-1}+\ldots+G_{k_i}p^{m-1}+\ldots+G_{k_m}]\times$$

$$\times[Ep^r+\alpha_r Ep^{r-1}+\ldots+\alpha_1 E]\cdot[\Gamma_1 p^{\lambda-1}+\ldots+\Gamma_{\nu-1}p+\Gamma_\nu]; \qquad (14)$$

$$R_2(p,\tau,\theta)=\{[Ep^\nu+\gamma_1 Ep^{\nu-1}+\ldots+\gamma_k Ep^{\nu-k}+\ldots+\gamma_\nu E]\times$$

$$\times[Ep^r+\alpha_r Ep^{r-1}+\ldots+\alpha_1 E]-[\Gamma_1 p^{\lambda-1}+\ldots+\Gamma_{\nu-1}p+\Gamma_\nu]\times$$

$$\times[H_1 p^{q-1}+\ldots+H_q p^s+H_q X_1 p^{s-1}+\ldots+H_q X_s]\}, \qquad (15)$$

здесь E — единичная матрица n-го порядка.

В уравнения (14), (15) единичная матрица введена для упрощения процедуры вычисления матричных многочленов $R_1(p,\tau,\theta)$ и $R_2(p,\tau,\theta)$.

Анализируя (13), можно отметить, что регулятор (10) будет физически реализуем, если

$$\nu\geq n+\lambda-1, \qquad (16)$$

а также

$$[p^m+G_{k_1}p^{m-1}+\ldots+G_{k_i}p^{m-1}+\ldots+G_{k_m}]\times$$

$$\times[Ep^r+\alpha_r Ep^{r-1}+\ldots+\alpha_1 E]\geq[\Gamma_1 p^{\lambda-1}+\ldots+\Gamma_{\nu-1}p+\Gamma_\nu]\times$$

$$\times[H_1 p^{q-1}+\ldots+H_q p^s+H_q X_1 p^{s-1}+\ldots+H_q X_s]. \qquad (17)$$

По сути неравенства (16) и (17) накладывают ограничения на реализацию регулятора (см. (8)), который обеспечивал бы заданные показатели качества при требуемом астатизме системы управления объектом с запаздываниями.

Реализация регулятора. Раскрывая (15), с учетом, что $s<r$, $q<r$, и подставляя в (10), получаем

$$[W_0 p^{m+r+\lambda-1}+(W_1+G_{k_1})p^{m+r+\lambda-2}+\ldots+(W_{m+r+\lambda-1}+G_{k_{m+r+\lambda-1}})](y_{\text{зад}}-z)=$$

$$=[p^{\nu+r}+Q_1 p^{\nu+r-1}+\ldots+(Q_{\lambda+q-2}-K_{\lambda-2})p^{\lambda-2}+\ldots+(Q_{\nu+r}-K_{\nu+r})]U, \quad (18)$$

где W_i, Q_i, K_i — числовые матрицы, коэффициенты которых зависят от коэффициентов выражений (15), причем элементы матрицы $K_i=\|K_{ij}\|$ содержат звенья чистого запаздывания τ_{ij}.

Регулятор (10) возможно реализовать на базе интегрирующих фильтров

$$\begin{aligned}\dot{v}_i&=v_{i+1},\ i=1,2,\ldots,\nu+r-1;\\ \dot{v}_{\nu+r}&=U^*,\end{aligned} \qquad (19)$$

где $U^* = (y_{зад} - z) - (Q_{\nu+r} - K_{\nu+r})v_1 - \ldots - (Q_{\nu+r-2} - K_{m+\nu+r-2})v_{\lambda+q-1} - \ldots$
$\ldots - Q_1 v_{\nu+r}$; v — вектор координат выхода многомерного регулятора.

В этом случае фазовые координаты фильтра (19) позволяют сформировать управление

$$U = (W_{m+r+\lambda-1} + G_{k_{m+r+\lambda-1}})v_1 + (W_{m+r+\lambda-2} + G_{k_{m+r+\lambda-2}})v_2 + \ldots$$
$$\ldots + (W_1 + G_{k_1})v_{m+r+\lambda-1} + M_0 v_{m+r+\lambda}. \tag{20}$$

Рассмотрим синтез многомерного регулятора на конкретном примере. Пусть уравнения объекта управления заданы в матричной форме

$$\begin{gathered} \dot{x} = B_0 x + B_1 x(t-\beta_1) + M_1 u(t-\mu_1) + M_2 u(t-\mu_2); \\ y = Px, \end{gathered} \tag{21}$$

где $B_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$, $M_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
$\beta_1 = 1$, $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 3$.

Применяя преобразование Лапласа к (21), перейдем к частотному представлению в виде

$$((p+2)^2 - 0{,}5e^{-p})y = \left(\begin{bmatrix} 0{,}4e^{-5p} & 0 \\ 0 & 0{,}5e^{-3p} \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 0{,}8e^{-5p} & 0{,}25e^{-p} \\ 0{,}4e^{-5p} & 1{,}0e^{-3p} \end{bmatrix} \right) u. \tag{22}$$

Предположим, что обратная связь объекта осуществляется через измерительное устройство вида

$$z = Hy, \tag{23}$$

где z — измеряемый выход, $H = \begin{bmatrix} e^{-\delta_{11}p} & 0 \\ 0 & e^{-\delta_{22}p} \end{bmatrix}$, а $\delta_{11} = 3$, $\delta_{22} = 2$.

Обозначения δ_{11} и δ_{22} — запаздывания, сосредоточенные в датчиках первой и второй выходных (т.е. измеряемых) координат.

Для начала определим матричный полином компенсационного устройства, используя формулу (11). В результате имеем

$$G_k = \frac{1}{p^2 + 4p = 4 - 0{,}5e^p} \left(\begin{bmatrix} e^{-5p} & 0 \\ 0 & e^{-3p} \end{bmatrix} p + \begin{bmatrix} 2e^{-5p} & e^{-3p} \\ -0{,}5e^{-6p} & 2e^{-3p} \end{bmatrix} \right). \tag{24}$$

Задавая требуемые характеристики замкнутой системы в виде (8) с учетом условия реализуемости (16) и (17), получаем

$$[p^2 + \gamma_1 p + \gamma_2]y = \begin{bmatrix} \gamma_2 e^{-\tau_{11}p} & 0 \\ 0 & \gamma_2 e^{-\tau_{22}p} \end{bmatrix} y_{зад}, \tag{25}$$

где τ_{11} и τ_{22} — запаздывания, определяемые как $\tau_{ii} = \mu_{ii} + \delta_{ii}$ и равные соответственно $\tau_{11} = 8$ и $\tau_{22} = 5$; $\gamma_1 = 4, \gamma_2 = 4$ — коэффициенты, гарантирующие апериодический переходный процесс по заданию длительностью 3 с по каждому каналу без учета времени запаздывания по этим каналам.

Подставляя (22), (23), (24) и (25) в выражения (14) и (15), определения матричных полиномов регулятора получим с учетом (18) для первого и второго управлений, которые реализуем с помощью интегрирующих фильтров вида

$$\dot{v}_1^1 = v_2^1,$$

$$\dot{v}_2^1 = U_1^*,\ U_1^* = (y_{\text{зад}\,1} - z_1) - 4v_2^1 - 4(1 - e^{-8p})v_1^1,$$

фазовые координаты фильтра позволяют сформировать компенсационное управление для первого выхода объекта $u_1 = 10(2v_1^1 + v_2^1) - 10v_1^2$.

Управление второго регулятора для второго выхода запишем

$$\dot{v}_1^2 = v_2^2,$$

$$\dot{v}_2^2 = U_1^*,\ U_2^* = (y_{\text{зад}\,2} - z_2) - 4v_2^2 - 4(1 - e^{-7p})v_1^2,$$

$$u_2 = 8(2v_1^2 + v_2^2)e^{-2p} - 16e^{-3p}v_1^1.$$

Качество регулирования системы управления в случае автономности иллюстрирует рис. 1, где показано поведение замкнутой системы при изменении задания от $y_{\text{зад}\,1} = 0$, $y_{\text{зад}\,2} = 0$ до $y_{\text{зад}\,1} = 1$, $y_{\text{зад}\,2} = 1$ при одновременном изменении уставок. Как видно из представленных графиков переходных процессов, качество замкнутой системы отвечает заданному, а это подтверждает, что предложенная стратегия обеспечивает автономное управление.

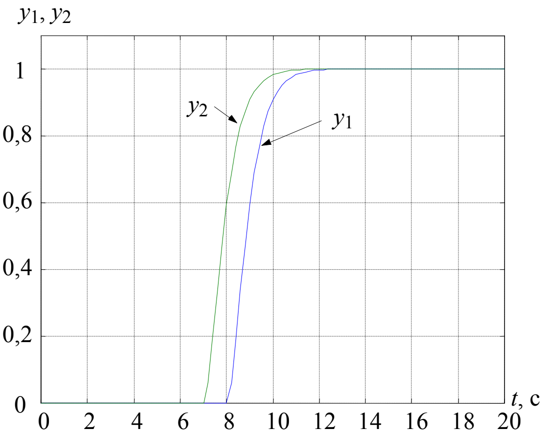

Рис. 1. Графики переходных процессов в системе управления с полной компенсацией взаимосвязей при ступенчатом изменении задающего воздействия $y_{\text{зад}\,1} = 1$, $y_{\text{зад}\,2} = 1$

Заключение. Рассмотренный метод синтеза позволяет компенсировать влияния запаздываний на устойчивость системы, обеспечивает автономность и требуемые показатели качества регулирования по каждому выходу объекта управления. Кроме того, изложенный метод синтеза многомерных систем управления с запаздываниями общего типа обладает: 1) упрощенной процедурой расчета структуры и параметров многомерного регулятора по сравнению с другими известными методами; 2) возможностью синтеза регулятора даже в случае несовпадения вектора состояния объекта с вектором выходных координат; 3) однотипностью в смысле реализуемости на базе интегрирующих фильтров; 4) универсальностью, так как его можно применять при построении многомерных систем управления линейными объектами, как с запаздываниями, так и без запаздываний; 5) возможностью учитывать несколько различных некратных запаздываний по каналам управления и состояния.

1. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием: Пер. с польского. — М.: Машиностроение, 1974. — 328 с.
2. *Кіку А.Г., Білоус Т.І.* Квазіоптимальні регулятори для об'єктів з чистим запізнюванням // Праці Міжнар. конф. з управління «Автоматика-2000». — Львів, 2000. — **2**. — С. 115–120.
3. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. — М.: Наука, 1978. — 416 с.
4. *Паршева Е.А., Терновая Г.Н.* Робастная стабилизация многосвязным объектом с запаздыванием по состоянию // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Техн. науки. — 2006. — № 1. — С. 3–10.
5. *Ткачев Р.Ю.* Аналитическое конструирование регуляторов для объектов с чистым запаздыванием // Наукові праці ДонНТУ. — 2006. — Вип. 12(113). — С. 275–281.
6. *Дрючин В.Г., Ткачев Р.Ю.* Синтез регуляторов на базе интегрирующих фильтров систем управления объектами с запаздыванием в координатах состояния и управления // Сб. науч. Тр. ДонГТУ. — 2007. — Вып. 24. — С. 391–396.

Национальный авиационный университет, Киев
Получено 10.06.2008