УДК 004.942

Я. В. Одарич
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Процедура перечисления гиперкомплексных числовых систем методом линейных преобразований

Раскрыта суть алгоритма по перечислению гиперкомплексных числовых систем методом линейных преобразований. Показаны примеры в числовых системах второго и третьего порядка.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, линейное преобразование, неканоническая числовая система.*

Развитие современной науки и техники диктует все новые требования к представлению и обработке данных. Поэтому в настоящее время наблюдается тенденция к использованию числовых систем, которые позволяют работать с более высокими размерностями для представления данных [1].

Известно множество задач, для решения которых используются сложные гиперкомплексные числовые системы (ГЧС) [2]. Их применение усложняет вычисления, поэтому для минимизации арифметических операций используют изоморфные переходы в более простые системы, например, диагональную. Тем не менее, традиционно рассматриваемых канонических гиперкомплексных числовых систем, изоморфных диагональным, не так уж и много. Поэтому возникает необходимость поиска неканонических числовых систем, которые можно использовать для представления информации.

Прежде всего, определим понятия канонической и неканонической числовых систем. Каноническая гиперкомплексная числовая система — это система, в ячейках таблицы умножения которой существует не более одного структурного элемента [3]. Примерами канонических ГЧС могут быть комплексные или квадриплексные числа [4]. Неканоническая гиперкомплексная числовая система — это система, которая, в свою очередь, имеет более одного структурного элемента хотя бы в одной ячейке таблицы умножения. Такой ГЧС являются, например, триплексные числа.

Таким образом, получаем задачу по перечислению гиперкомплексных числовых систем — канонических и неканонических, изоморфных диагональной. При этом необходимо, чтобы для полученых систем выполнялось правило единицы.

R_1	0	…	0
0	R_2	…	0
…	…	…	…
0	0	…	R_n

E_1	E_2	…	E_n
E_2	$a_{22}*E_1+b_{22}*E_2+...+k_{22}*E_n$	…	$a_{n2}*E_1+b_{n2}*E_2+...+k_{n2}*E_n$
…	…	…	…
E_n	$a_{2n}*E_1+b_{2n}*E_2+...+k_{2n}*E_n$	…	$a_{nn}*E_1+b_{nn}*E_2+...+k_{nn}*E_n$

Для этого используем перечисление гиперкомплексных числовых систем методом линейных преобразований. Суть алгоритма состоит в переборе коэффициентов при переменных в системе уравнений, с помощью которой осуществляется переход из искомой системы в диагональную, и затем получения правил умножения для полученной изоморфной системы.

Система уравнений для изоморфного перехода выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}R_1 = A_1 * E_1 + B_1 * E_2 + ... + K_1 * E_n,\\ R_2 = A_2 * E_1 + B_2 * E_2 + ... + K_2 * E_n,\\ ...\\ R_n = A_n * E_1 + B_n * E_2 + ... + K_n * E_n,\end{gathered}$$

где A_i, B_i, K_i — вещественные коэффициенты.

Коэффициенты A_i, B_i, K_i при переменных перебираются в заранее заданном диапазоне с заданным шагом. Для увеличения количества полученных результатов можно расширять диапазон и уменьшать шаг. Для данного исследования использовался диапазон –2…2 и шаг 0,5.

Находим систему уравнений для обратного преобразования (E_i):

$$\begin{gathered}E_1 = a_1 * R_1 + b_1 * R_2 + ... + k_1 * R_n = F_1(R_1,...,R_n),\\ E_2 = a_2 * R_1 + b_2 * R_2 + ... + k_2 * R_n = F_2(R_1,...,R_n),\\ \dots\\ E_n = a_n * R_1 + b_n * R_2 + ... + k_n * R_n = F_n(R_1,...,R_n),\end{gathered}$$

где $a_i, b_i,..., k_i$ — вещественные коэффициенты.

Далее производим умножения уравнений последней полученной системы, и таким образом находим, чему равны умножения вида $E_i * E_j$. Поскольку данный алгоритм учитывает только коммутативные системы, то $E_i * E_j = E_j * E_i$:

$$E_1 * E_1 = f_{11}(R_1,...,R_n) = a_{11} * F_1(R_1,...,R_n) + b_{11} * F_1(R_1,...,R_n) + ...$$
$$+ k_{11} * F_n(R_1,...,R_n) = a_{11} * E_1 + b_{11} * E_2 + ... + k_{11} * E_n,$$
$$E_1 * E_2 = f_{12}(R_1,...,R_n) = a_{22} * F_2(R_1,...,R_n) + b_{22} * F_2(R_1,...,R_n) + ...$$
$$+ k_{22} * F_2(R_1,...,R_n) = a_{22} * E_1 + b_{22} * E_2 + ... + k_{22} * E_n,$$
$$...$$
$$E_n * E_n = f_{nn}(R_1,...,R_n) = a_{nn} * F_n(R_1,...,R_n) + b_{nn} * F_n(R_1,...,R_n) + ...$$
$$+ k_{nn} * F_n(R_1,...,R_n) = a_{nn} * E_1 + b_{nn} * E_2 + ... + k_{nn} * E_n.$$

Таким образом, получаем таблицу умножения для интересующей нас гиперкомплексной числовой системы. Производим дополнительные проверки.

Во-первых, проверяем, соответствуют ли единичные элементы диагональной и исследуемой системы друг другу — $E_1 * R_1 + R_2 + ... + R_n * E_j$.

Далее, отсеиваем системы, у которых не выполняется правило единичного элемента. То есть, проверяем равенство: $E_1 * E_n = E_n$.

Также, для удобства модулярных вычислений, добавляем дополнительную проверку на целый коэффициент при элементах в таблице умножения.

Рассмотрим работу алгоритма на примере. Дана диагональная числовая система:

R_1	0
0	R_2

Перебираем системы уравнений 2-го порядка:

$$R_1 = a_1 * E_1 + b_1 * E_2,$$
$$R_2 = a_2 * E_1 + b_2 * E_2.$$

Пусть $a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 0{,}5$; $b_1 = 0{,}5$; $b_2 = -0{,}5$.

Формируем одну из систем уравнений:

$$R_1 = 0{,}5 * E_1 + 0{,}5 * E_2,$$
$$R_2 = 0{,}5 * E_1 - 0{,}5 * E_2.$$

Решение системы будет соответственно:

$$E_1 = R_1 + R_2,$$
$$E_2 = R_1 - R_2.$$

Поскольку поиск включает проверку на единичные элементы, то проверяем равенство $E_1 = R_1 + R_2$. В данном примере равенство выполняется.

Затем находим умножения $E_{i,j}$:

$$E_1 * E_1 = R_1 + R_2 = E_1,$$
$$E_1 * E_2 = R_1 - R_2 = E_2,$$
$$E_2 * E_2 = R_1 + R_2 = E_1.$$

Получаем систему с таблицей умножения:

E_1	E_2
E_2	E_1

Таблица удовлетворяет требованиям соблюдения правила единицы.

Рассмотрим более сложный пример. Возьмем диагональную систему порядка 3 и найдем неканоническую гиперкомплексную числовую систему, изоморфную ей:

R_1	0	0
0	R_2	0
0	0	R_3

Перебираем коэффициенты для системы линейных уравнений. Рассмотрим одну из полученных систем:

$$R_1 = -E_1 - 0{,}5 * E_2 + 0{,}5 * E_3,$$
$$R_2 = E_1 - E_3,$$
$$R_3 = E_1 + 0{,}5 * E_2 + 0{,}5 * E_3.$$

Решение выглядит следующим образом:

$$E_1 = R_1 + R_2 + R_3,$$
$$E_2 = -3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3,$$
$$E_3 = R_1 + R_3.$$

Найдем умножения для $E_i * E_j$ и подставляем в уравнения решения предыдущей системы:

$$E_1 * E_1 = (R_1 + R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3) = R_1 + R_2 + R_3 = E_1,$$
$$E_1 * E_2 = (R_1 + R_2 + R_3)(-3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3) = -3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3 = E_1,$$
$$E_2 * E_2 = (-3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3)(-3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3) = 9 * R_1 + 4 * R_2 + R_3 =$$
$$= -4 * (R_1 + R_2 + R_3) - 4 * (-3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3) + (R_1 + R_3) = -4 * E_1 - 4 * E_2 + E_3,$$
$$E_2 * E_3 = (-3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3)(R_1 + R_3) = -3 * R_1 - R_3 =$$
$$= 2 * (R_1 + R_2 + R_3) + (-3 * R_1 - 2 * R_2 - R_3) - 2 * (R_1 - R_3) = 2 * E_1 + E_2 - 2 * E_3,$$
$$E_3 * E_3 = (R_1 + R_3)(R_1 + R_3) = R_1 + R_3 = E_3.$$

Таким образом, получаем таблицу умножения для неканонической гиперкомплексной числовой системы порядка 3, изоморфной диагональной:

E_1	E_2	E_3
E_2	$-4*E_1$ $-4*E_2+E_3$	$2*E_1+E_2$ $-2*E_3$
E_3	$2*E_1+E_2$ $-2*E_3$	E_3

Одной из областей применения полученных неканонических гиперкомплексных числовых систем является синтез цифровых фильтров, а именно вычисление передаточной функции [5]. Данные представляются в неканонической гиперкомплексной числовой системе, но вычисления все производятся в диагональной. Это позволяет сократить количество операций и улучшить представимость данных.

Алгоритм был реализован и выполнен при помощи математического пакета символьных вычислений MAPLE.

1. *Синьков М.В., Каліновський Я.О., Постнікова Т.Г., Синькова Т.В.* Перспективні напрямки досліджень і розвитку теорії гіперкомплексного представлення інформації // Наукові вісті Національного Технічного Університету України «Київський Політехнічний Інститут». — 2002. — № 5 (25). — С. 49–53.

2. *Бояринова Ю.Е., Одарич Я.В.* Восстановление информации в задаче разделения секрета для гиперкомплексных числовых систем 2-го порядка с помощью алгоритма Евклида // Реєстрація, зберігання і обробка даних. — 2004. — Т. 7, № 1. — С. 103–114.

3. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

4. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В., Трубников П.В., Бояринова Ю.Е.* Новые применения гиперкомплексных квадриплексных чисел. Часть 2 // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 4–7.

5. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е., Синькова Т.В., Федоренко А.В.* Разработка структур эффективных цифровых фильтров с помощью гиперкомплексного представления информации // Управління розвитком. — 2006. — № 6. — С. 83–84.

Поступила в редакцию 02.04.2008