ДО ВИБОРУ ДОПОВНЯЛЬНОЇ УМОВИ ДЛЯ РІВНЯНЬ МАТІСОНА-ПАПАПЕТРУ

Роман ПЛЯЦКО, Олександр СТЕФАНИШИН, Микола ФЕНИК

Інститут прикладних проблем механіки і математики
імені Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів 79060
e-mail: plyatsko@lms.lviv.ua

Редакція отримала статтю 20 грудня 2010 р.

У контексті вибору адекватної доповняльної умови для рівнянь Матісона-Папапетру, у випадку метрики Шварцшильда досліджено застосовність умови Тульчиєва-Діксона для ультрарелятивістських рухів частинки зі спіном відносно джерела гравітаційного поля. Отримана оцінка критичної величини танґенціальної компоненти швидкості, вище якої ця умова стає незастосовною.

Хоч рівняння для опису поведінки класичної (неквантової) частинки (пробного тіла) з внутрішнім кутовим моментом, або стисліше – зі спіном, у гравітаційному полі в рамках загальної теорії відносності відомі близько 75 років, їх значення у фізиці ще недостатньо з'ясоване. Вперше вони побачили світ зі сторінок статті [1], а згодом [2], внаслідок чого їх прийнято називати рівняннями Матісона-Папапетру. Згідно з [1, 2] запишемо ці рівняння у вигляді

$$\frac{D}{ds}\left(mu^{\lambda}+u_{\mu}\frac{DS^{\lambda\mu}}{ds}\right)=-\frac{1}{2}u^{\pi}S^{\rho\sigma}R^{\lambda}_{\pi\rho\sigma}, \tag{1}$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds}+u^{\mu}u_{\sigma}\frac{DS^{\nu\sigma}}{ds}-u^{\nu}u_{\sigma}\frac{DS^{\mu\sigma}}{ds}=0, \tag{2}$$

де $u^{\lambda}\equiv dx^{\lambda}/ds$ – 4-швидкість частинки, $S^{\mu\nu}$ – тензор спіну, m і D/ds – відповідно маса і коваріантна похідна за власним часом частинки; $R^{\lambda}_{\pi\rho\sigma}$ – ріманів тензор кривини простору-часу. (Використовується система одиниць, у якій гравітаційна стала та швидкість світла у вакуумі чисельно дорівнюють 1). Оскільки в [3] рівняння (1), (2) узагальнено з урахуванням квадрупольного моменту частинки, останнім часом самі рівняння (1), (2) часто називають рівняннями Матісона-Папапетру-Діксона.

Як показано в низці публікацій [4], саме рівняння Матісона-Папапетру є класичним наближенням загальноковаріантного рівняння

PACS numbers: 04.20.-q, 95.30.Sf

Дірака, тобто звичайного рівняння Дірака, узагальненого на випадок викривленого простору-часу [5]. (Із суттєвим уточненням, що цей факт встановлено лише в лінійному за спіном наближенні). Тому аналіз фізичних наслідків, що випливають з властивостей розв'язків рівнянь Матісона-Папапетру, стимулює дослідження відповідних квавнтових особливостей взаємодії спіну з гравітаційним полем.

Система рівнянь (1), (2) неповна й тому фіксація початкових значень координат, швидкості та спіну не виділяє її єдиного розв'язку. Це пов'язано з тим, що рівняння (1), (2) є саме такими без конкретизації точки, відносно якої обчислюється кутовий момент частинки (тіла) і рух якої представляє переміщення тіла в просторі як цілого. Звичайно, коли йдеться про кутовий момент, що характеризує обертання частинки відносно власної осі, природно за таку репрезентативну точку обрати центр маси частинки. Однак відомо, що в релятивістській механіці розташування центра маси тіла, яке обертається відносно своєї осі, залежить від системи відліку [6]. Тому співвідношення

$$S^{\lambda\nu}u_{\nu}=0, \tag{3}$$

нерелятивістський аналог якого ідентифікує центр маси тіла, за умов релятивізму виділяє не одну точку-центр, а множину центрів маси. Як наслідок, рівняння (1)–(3) в просторі Мінковського поряд із розв'язками, що описують прямолінійні рухи, мають ще й розв'язки у вигляді спіральних (зокрема колових) ліній, а також експоненціальні розв'язки [6]. Однак такого роду зайві розв'язки відсутні, якщо замість умови (3) використати співвідношення

$$S^{\lambda\nu}P_{\nu}=0, \tag{4}$$

де

$$P^{\nu}=mu^{\nu}+u_{\lambda}\frac{DS^{\nu\lambda}}{ds} \tag{5}$$

є 4-імпульсом частинки [3, 7]. Співвідношення (3) і (4) називають відповідно доповняльною умовою Матісона-Пірані й Тульчиєва-Діксона.

Якщо швидкість частинки зі спіном відносно джерела гравітаційного поля не дуже близька до швидкості світла й саме поле не надто сильне, розв'язки рівнянь Матісона-Папапетру за умов (3) і (4) відрізняються між собою дуже мало [8, 9]. (Йдеться про ті розв'язки за умови (3), що не належать до типу спіральних, а описують рух власного центра маси; власною системою відліку є та, у якій вісь обертання нерухома). За цих же умов дуже малим є відхилення світових ліній частинки зі спіном від геодезійних.

Якщо ж швидкість частинки зі спіном достатньо близька до світлової, картина змінюється. По-перше, виникають ситуації, коли розв'язки рівнянь (1), (2) за умов (3) і (4) залишаються близькими між собою, однак дуже відрізняються від відповідних розв'язків рівнянь геодезійних ліній. Такими прикладами є світові лінії і траєкторії ультрарелятивістської частинки зі спіном, що починає рух у вузькій просторовій області поблизу $r=1,5r_g$ в полі Шварцшильда (r_g – шварцшильдівський радіус горизонту) [10] або поблизу $r=r_{ph}^{(-)}$ у полі Керра

($r_{ph}^{(-)}$ – радіус фотонної геодізійної орбіти у випадку контр-обертання) [11]. По-друге, за інших початкових умов траєкторії ультрарелятивістської частинки при їх описі рівняннями (1), (2) за обох співвідношень (3) і (4) можуть суттєво відрізнятись як між собою, так і від геодезійних траєкторій, і тут важливий вплив нелінійних за спіном членів [6]. Тоді виникає питання про адекватність тієї чи іншої з умов (3) і (4) для опису ультрарелятивістських рухів частинки зі спіном у гравітаційному полі загалом. До речі, щодо аналогічного питання в контексті вивчення світових ліній частинок зі спіном і нульовою масою на базі рівнянь типу Матісона-Папапетру зроблено висновок, що тут, вірогідно, єдиною фізично змістовною умовою є (3) [12]. Чи з цього висновку випливає, що не тільки безмасова частинка зі спіном, яка рухається зі швидкістю світла, але й частинка з ненульовою масою і швидкістю дуже близькою до світлової, може бути коректно описана саме за умови (3), а не (4)?

Для отримання відповіді на це запитання розглянемо деякі наслідки рівнянь Матісона-Папапетру за умови (4), зокрема стосовно значень енергії частинки зі спіном у полі Шваврцшильда, коли її швидкість відносно джерела гравітаційного поля стає ультрарелятивістською. Спочатку запишемо основні співвідношення, які випливають з рівнянь Матісона-Папапетру за умови (4) для довільної метрики [13]. Маса частинки означається як

$$\mu = \sqrt{P_\lambda P^\lambda} \tag{6}$$

і є інтегралом руху, тобто $d\mu/ds = 0$. Величина V^λ є нормованим імпульсом, де за означенням

$$V^\lambda = \frac{P^\lambda}{\mu}. \tag{7}$$

Іноді V^λ називають динамічною 4-швидкістю, тоді як величину u^λ з (1)–(3) – кінематичною 4-швидкістю. Як нормовані величини u^λ і V^λ задовольняють співвідношення

$$u_\lambda u^\lambda = 1, \quad V_\lambda V^\lambda = 1. \tag{8}$$

Важливим є співвідношення між u^λ і V^λ:

$$u^\lambda = N\left[V^\lambda + \frac{1}{2\mu^2\Delta} S^{\lambda\nu} V^\pi R_{\nu\pi\rho\sigma} S^{\rho\sigma}\right], \tag{9}$$

де

$$\Delta = 1 + \frac{1}{4\mu^2} R_{\lambda\pi\rho\sigma} S^{\lambda\pi} S^{\rho\sigma}. \tag{10}$$

Конкретизуємо співвідношення (9), (10) для випадку метрики Шварцшильда. У стандартних шварцшильдівських координатах $x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi, \quad x^4 = t$ відмінними від нуля є такі компоненти метричного тензора і тензора Рімана:

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2,$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2\theta, \quad g_{44} = 1 - \frac{2M}{r},$$

$$R_{1212} = \frac{M}{r-2M}, \quad R_{1313} = \frac{M}{r-2M}\sin^2\theta,$$

$$R_{2323} = -2Mr\sin^2\theta, \quad R_{4141} = \frac{2M}{r^3},$$

$$R_{4242} = \frac{M(2M-r)}{r^2}, \quad R_{4343} = \frac{M(2M-r)}{r^2}\sin^2\theta,$$

де M – маса шварцшильдівського джерела гравітаційного поля.

Внаслідок симетрії метрики Шварцшильда енергія частинки зі спіном E у цьому полі є інтегралом руху рівнянь Матісона-Папапетру. За умови (4) її вираз є таким [13]:

$$E = P_4 + \frac{1}{2}g_{44,1}S^{14} = \mu V_4 - \frac{1}{2}g_{44,1}\frac{V_3}{V_4}S^{13}. \tag{11}$$

Розглянемо вирази (9)–(11) для конкретного випадку метрики Шварцшильда, коли частинка рухається в площині $\theta = \pi/2$, а її спін ортогональний до неї. Тоді маємо

$$u^2 = 0, \quad u^1 \neq 0, \quad u^3 \neq 0, \quad u^4 \neq 0, \tag{12}$$

$$S^{12} = 0, \quad S^{23} = 0, \quad S^{13} \neq 0. \tag{13}$$

Додатково до (13) згідно з умовою (4) записуємо

$$S^{14} = -\frac{P_3}{P_4}S^{13}, \quad S^{24} = 0, \quad S^{34} = \frac{P_1}{P_4}S^{13}. \tag{14}$$

Відомо, що рівняння Матісона-Папапетру за обох варіантів доповняльної умови – (3) і (4), мають інтегралом руху вираз [14]

$$S_0^2 = \frac{1}{2}S_{\lambda\nu}S^{\lambda\nu}, \tag{15}$$

де $|S_0|$ – абсолютна величина спіну. Використовуючи (15), співвідношення (12)–(14), а також відповідні вирази для компонент тензора Рімана у метриці Шварцшильда, з (9) отримуємо

$$u^1 = NV^1\left(1 + \frac{3M}{r^3}V_3V^3\frac{S_0^2}{\mu^2\Delta}\right), \quad u^2 = V^2 = 0,$$

$$u^3 = NV^3\left[1 + \frac{3M}{r^3}(V_3V^3 - 1)\frac{S_0^2}{\mu^2\Delta}\right],$$

$$u^4 = NV^4\left(1 + \frac{3M}{r^3}V_3V^3\frac{S_0^2}{\mu^2\Delta}\right). \tag{16}$$

Згідно з (10) записуємо вираз для Δ:

$$\Delta = 1 + \frac{S_0^2 M}{\mu^2 r^3}(1 - 3V_3 V^3). \tag{17}$$

Підставляючи (17) в (16), отримуємо

$$u^1 = \frac{NV^1}{\Delta}\left(1 + \frac{S_0^2 M}{\mu^2 r^3}\right),$$

$$u^3 = \frac{NV^3}{\Delta}\left(1 - 2\frac{S_0^2 M}{\mu^2 r^3}\right),$$

$$u^4 = \frac{NV^4}{\Delta}\left(1 + \frac{S_0^2 M}{\mu^2 r^3}\right). \tag{18}$$

Введемо позначення

$$\varepsilon = \frac{|S_0|}{\mu r}, \tag{19}$$

де згідно з умовою пробності частинки необхідно $\varepsilon \ll 1$ [15]. Явний вираз для N випливає безпосередньо з умови $u_\lambda u^\lambda = 1$ і має вигляд

$$N = \Delta\left[\left(1 + \varepsilon^2\frac{M}{r}\right)^2 - 3V_3 V^3 \varepsilon^2 \frac{M}{r} \times \right.$$
$$\left. \times \left(2 - \varepsilon^2 \frac{M}{r}\right)\right]^{-1/2}. \tag{20}$$

Підставляючи (20) в (18), отримуємо вираз для компонент V^λ через u^λ (при цьому, що $V^2 = u^2 = 0$):

$$V^1 = u^1 R\left(1 - 2\varepsilon^2\frac{M}{r}\right),$$

$$V^3 = u^3 R\left(1 + \varepsilon^2\frac{M}{r}\right),$$

$$V^4 = u^4 R\left(1 - 2\varepsilon^2\frac{M}{r}\right), \tag{21}$$

де

$$R = \left[\left(1 - 2\varepsilon^2\frac{M}{r}\right)^2 - 3(u^3)^2\varepsilon^2 Mr\left(2 - \varepsilon^2\frac{M}{r}\right)\right]^{-1/2}. \tag{22}$$

Важливою особливістю виразів (21), (22) є те, що для великої танґенціальної швидкості частинки значення V^1, V^3, V^4 стають уявними. Справді, якщо

$$|u^3| > \frac{1}{\varepsilon\sqrt{6Mr}}, \tag{23}$$

тоді в (22) маємо квадратний корінь із від'ємних значень. Використовуючи позначення для танґенціальної швидкості $u_{tang} \equiv ru^3$, згідно з (23) записуємо

$$|u_{tang}| > \frac{\sqrt{r}}{\varepsilon\sqrt{6M}}. \tag{24}$$

Якщо величина r не є значно більшою від M, тоді згідно з оцінками, аналогічними до отриманих в [11], швидкість у правій частині виразу (24) відповідає релятивістському γ-фактору Лоренца порядку $1/\varepsilon$. Тоді внаслідок умови пробності частинки маємо $\gamma >> 1$.

Той факт, що згідно з (7), (21)–(24) вирази для компонент 4-імпульсу P^λ стають уявними для дійсних значень маси M, а з ними й енергія (11), є свідченням того, що умову (4) не можна застосовувати для швидкостей частинки, дуже близьких до швидкості світла. Натомість за умови (3) таке обмеження не виникає.

Зазначимо, що співвідношення (21)–(24) неважко узагальнити на випадок метрики Керра.

Отже, для адекватного опису ультрарелятивістських рухів частинки зі спіном у гравітаційному полі, передусім тих, що суттєво відрізняються від геодезійних рухів, необхідно застосовувати до рівнянь Матісона-Папапетру саме умову (3), а не (4).

ЛІТЕРАТУРА

[1] *Mathisson M.* Acta Phys. Pol. 1937. **6**. 163–200.

[2] *Papapetrou A.* Proc. R. Soc. A. 1951. **209**. 248–258.

[3] *Dixon W. G.* Proc. R. Soc. A. 1970. **314**. 499; Gen. Relativ. Gravitation. 1973. **4**. 199; Philos. Trans. R. Soc. A. 1974. **277**. 59; Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl. 2008. **1**. 27.

[4] *Wong S.* Int. J. Theor. Phys. 1972. **5**. 221; *Kannenberg L.* Ann. Phys. 1977. **103**. 64; *R. Catenacci R., Martellini M.* Lett. Nuovo Cimento 1977. **20**. 282; *Audretsch J.* J. Phys. A. 1981. **14**. 411; *Gorbatsievich A.* Acta Phys. Pol. B. 1986. **17**. 111; *Barut A., Pavsic M.* Classical Quantum Gravity 1987. **4**. 41; *Cianfrani F., Montani G.* Europhys. Lett. 2008. **84**. 30008; Int. J. Mod. Phys. A. 2008. **23**. 1274; *Obukhov Yu, Silenko A., Teryaev O.* 2009. Phys. Rev. D **80**, 064044.

[5] *Fock V., Ivanenko D.* Z. Phys. 1929. **54**. 798; *Fock V.* Z. Phys. 1929. **57**, 261; *Weyl H.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1929. **15**. 323.

[6] *Р. М. Пляцко.* Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спін-орбітальної взаємодії. – К.: Наук. думка. 1988. – 148 с.

[7] *Tulczyjew W.* Acta Phys. Polon. 1959. **18**. 393.

[8] *Barker B. M., O'Connell R. F.* Gen. Relativ. Gravitation. 1973. **4**. 193.

[9] *Александров А. Н.* Кинем. физ. небес. тел. 1991. **7**. 13.

[10] *Пляцко Р. М., Стефанишин О. Б.* Журн. фіз. досл. 2009. **13**. 3.

[11] *Plyatsko R., Stefanyshyn O., M. Fenyk M.* Phys. Rev. D. 2010. **82**. 044015.

[12] *Mashhoon B.* Ann. Phys. 1975. **89**. 254; *Bini D, Cherubini C, Geralico A, Jantzen R. T.* Int. J. Mod. Phys. 2006. **5**. 737.

[13] *Suzuki S., Maeda K.* Phys. Rev. D. 1998. **58** 023005.

[14] *Mashhoon B.* J. Math. Phys. 1971. **12**. 1075.

[15] *Wald R.* Phys. Rev. D. 1972. **6**. 406.

ON THE CHOICE OF A SUPPLEMENTARY CONDITION FOR MATHISSON-PAPAPETROU EQUATIONS

Roman PLYATSKO, Oleksandr STEFANYSHYN, Mykola FENYK

Pidstryhach Institute for Applied Problems
in Mechanics and Mathematics,
Ukrainian National Academy of Sciences,
3-b Naukova Str., Lviv 79060

In the context of choosing the adequate supplementary condition for the Mathisson-Papapetrou equations, in the case of a Schwarzschild metric, the possibility of using the Tulczyjew-Dixon condition for highly relativistic motions of a spinning particle relative to the source of the gravitational field is investigated. The estimate of the critical value of the tangential velocity of the particle, when this condition cannot be used, is obtained.