

інтерес та зневага. Згідно з [1], стан, який складається з комбінацій задоволення ( $\alpha_5 = 0,3$ ) та горя ( $\alpha_2 = 0,7$ ), відповідає емоції “провина”.

Таким чином, вперше запропонована математична модель та цілісна інформаційна технологія для автоматичного визначення довільного емоційного стану конкретної людини як опуклої комбінації деяких базових станів. Для цього за допомогою математичної моделі та оригінального програмного забезпечення створюється базовий простір емоційних станів конкретної людини. В подальшому довільний емоційний прояв цієї людини розкладається як опукла комбінація емоційних станів в цьому просторі.

Для побудови базису простору емоційних станів використовуються гнучкі шаблони контурів основних зон обличчя. Гнучкі шаблони подані за допомогою NURBS-кривих. Налаштування шаблону на точковий контур конкретного зображення проходить за допомогою  $B$ -сплайн апроксимації, шляхом розв’язку перевизначеної неоднорідної системи лінійних рівнянь.

В подальшому запропонована технологія буде використана при візуальному контролі за операторами складних виробництв для автоматичного визначення їх емоційного стану в системах прийняття рішень.

1. Леонтьев В. О. Классификация эмоций. – Одесса: Инновационно-ипотечный центр, 2002. – 84 с.
2. Крак Ю. В., Бармак О. В., Єфімов Г. М. Синтез мимічних виразів емоцій на основі формальної моделі // Штучний інтелект. – 2007. – № 2. – С. 22–31.
3. Крак Ю. В., Бармак О. В., Єфімов Г. М. Використання контурних моделей для побудови базису простору мимічних виразів емоцій // Там само. – 2007. – № 4. – С. 288–296.
4. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book, 2nd ed. – Berlin: Springer, 1996. – 645 p.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова  
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 16.04.2008

УДК 681.5.015

© 2008

Н. Д. Панкратова, Т. В. Подладчикова

## Адаптивные стохастические модели в трудно формализуемых естественнонаучных задачах

(Представлено академиком НАН Украины М. З. Згуровским)

*To formalize and estimate the dynamical processes in the difficultly formalized problems of the different physical nature, an approach to create the stochastic models with the a priori unknown noise statistics based on the approximating determinate functions is proposed. The examples of the development of models for the estimation and prediction of the solar activity and the blood pressure based on the identification of the noise statistics and the adaptive filtration are given.*

Одной из важнейших целей практически любого прикладного исследования динамического процесса является формализация закономерностей в его динамике и определение количественных оценок параметров процесса. Некоторые закономерности в динамических процессах

известны и достаточно точно изучены. Однако, например, в физических или биологических процессах закономерности не так очевидны, трудно формализуемы, количественные оценки их характеристик либо неизвестны (на данном уровне познания), либо затруднены для анализа. Использование математических моделей для описания систем является общепринятым, хотя для многих процессов построить корректную модель часто не удается. Во многих случаях, в особенности это касается естественнонаучных задач, стоит проблема исследования динамики недостаточно изученного процесса в соответствующей предметной области.

В данной работе для формализации и оценивания закономерностей эволюции процессов в трудно формализуемых задачах предлагается подход, основанный на формировании стохастических моделей динамических процессов в пространстве состояний, в качестве детерминированной основы которых используются аппроксимирующие функции. Эти функции, параметры которых оцениваются по данным наблюдений, как правило, отражают основные тенденции развития процессов, однако не учитывают их непредвиденные флюктуации. Введение в модель шумов состояния и измерения с неизвестными статистическими характеристиками позволяет исключить жесткие требования к точной априорной информации о параметрах аппроксимирующей функции и учесть неопределенность, непредсказуемость процесса. Предлагается гибкий и универсальный метод раскрытия неопределенности в процессе наблюдения за объектом исследования. Это обуславливает возможность эффективного применения предлагаемого подхода для оценивания и прогнозирования динамических процессов в трудно формализуемых задачах различной физической природы.

**1. Формирование моделей в пространстве состояний.** Рассматривается динамический процесс  $X_j = X(t_j)$ , который описывается детерминированной функцией

$$X_j = g(t_j, \theta), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $t_j$  — время  $j$ -го наблюдения процесса;  $\theta$  — вектор параметров аппроксимирующей функции, который, как правило, при описании циклических процессов связан с амплитудой цикла.

Будущее состояние системы  $X_{j+1}$  представляется, в общем случае, в виде нелинейной функции текущего состояния. Модель в пространстве состояний формируется путем представления будущего состояние  $X_{j+1}$  с использованием выражения (1) в виде

$$X_{j+1} = f(X_j, \theta). \quad (2)$$

В модель вводится случайный шум состояния  $w_k$  с неизвестными статистическими характеристиками, который описывает неопределенность и непредсказуемость изменения процесса в будущем, что позволяет компенсировать неточное задание вектора параметров  $\theta$

$$X_{j+1} = f(X_j, \theta) + w_{j+1}T_{j+1,j}, \quad (3)$$

где  $T_{j+1,j}$  — интервал времени между  $j$ -м и  $(j + 1)$ -м наблюдениями процесса.

Например, неопределенность статистических характеристик шума состояния при формировании модели изменения среднего артериального давления обусловлена высокой вариабельностью, скачкообразностью изменения из-за непредсказуемых сбоев, обусловленных как внешними факторами, так и возрастными нарушениями процессов регуляции систем организма. В модели солнечного цикла аддитивный шум  $w_j$  можно рассматривать как характеристику скачкообразных изменений солнечной активности, которые в настоящее время не имеют физического объяснения.

Искажение данных измерительными ошибками учитывается путем формирования уравнения наблюдения с аддитивными шумами измерения  $\eta_j$

$$z_j = X_j + \eta_j, \quad (4)$$

где  $z_j$  —  $j$ -е наблюдение процесса.

Априорная неопределенность параметров модели раскрывается путем идентификации дисперсий шумов модели (3), (4) в соответствии с методом идентификации статистических характеристик шумов нестационарных линейных [1] и нелинейных моделей [2].

Модель (3), (4) описывает состояние и искаженные шумами измерения исследуемого процесса. Введение шумов в математическую модель системы повышает робастность соответствующих алгоритмов прогнозирования процесса по сравнению с детерминированной моделью.

**2. Идентификация статистических характеристик шумов при построении адаптивной стохастической модели.** Метод раскрытия неопределенности о статистических характеристиках шумов модели основан на их статистической идентификации. Идентификация выполняется путем формирования  $m$ -зависимых последовательностей псевдоизмерений ( $m = 2$ ) неизвестных статистических характеристик и их оценивания в соответствии с методом наименьших квадратов. Эти псевдоизмерения для линейных нестационарных систем формируются как линейные функции последовательностей вида

$$B_{1,j} = (z_j - f(z_{j-1}))(z_j - f(z_{j-1}))^T, \\ B_{2,j} = (z_j - f(f(z_{j-2}))(z_j - f(f(z_{j-2})))^T.$$

Характерным свойством этих последовательностей является независимость  $B_{m,j}$  и  $B_{m,j+l}$  при  $l > m$  ( $m = 1, 2$ ).

Оценки неизвестных параметров сходятся в среднеквадратическом к их истинным значениям, если сингулярные числа регрессионной матрицы стремятся к бесконечности при увеличении объема выборки псевдоизмерений. Эти условия могут быть получены обобщением рассмотренного в работе [3] доказательства сходимости метода наименьших квадратов, ограниченного условием независимости шумов.

Для нелинейных моделей типа (3) последовательности псевдоизмерений формируются аналогично, однако в данном случае используется линеаризация функции  $f$ .

Предлагаемые методы идентификации априорно неизвестных статистических характеристик шумов модели являются обобщением соответствующих методов для нестационарных и нелинейных систем, что является развитием линейных стационарных систем [4, 5].

Эффективность предлагаемой адаптивной стохастической модели в значительной степени обусловлена гибкостью и универсальностью используемых методов идентификации статистических характеристик шумов.

**3. Нестационарная линейная модель солнечного цикла.** К задачам, формализация которых вызывает большие трудности, можно отнести, в частности, оценивание и прогнозирование солнечной активности. Так, несмотря на применение большого количества разнообразных математических моделей исследования солнечной активности, предсказания завершающегося в настоящее время 23-го 11-летнего цикла солнечной активности оказались противоречивыми [6].

В данной работе формируется стохастическая модель 11-летнего солнечного цикла на основе его описания детерминированной двухпараметрической функцией [7]

$$f(t) = \frac{a(t - t_0)^3}{\exp\left(\frac{(t - t_0)^2}{b^2}\right) - c}, \quad (5)$$

где параметр  $a$  непосредственно связан с амплитудой солнечного цикла и скоростью роста;  $b$  зависит от времени (в месяцах) перехода от минимума к максимуму и связан с  $a$  приближенной зависимостью

$$b(a) = 27,12 + \frac{25,15}{(a \cdot 10^3)^{1/4}};$$

$c = 0,71$  отражает асимметрию цикла;  $t_0$  — время начала цикла.

Стохастическая нестационарная модель 11-летнего солнечного цикла в пространстве состояний представляется в виде

$$X_{j+1} = \Phi_{j+1,j} X_j + w_{j+1}, \quad (6)$$

$$R_j = X_j + \eta_j. \quad (7)$$

Здесь

$$\Phi_{j+1,j} = \frac{\left(1 + \frac{1}{j}\right)^3 \left(\exp\left(\frac{j^2}{b^2}\right) - c\right)}{\exp\left(\frac{(j+1)^2}{b^2}\right) - c};$$

$R_j$  — среднемесячное число Вольфа, характеризующее измерение солнечной активности  $X_j$  в  $j$ -й месяц в присутствии несмещенного некоррелированного шума  $\eta_j$  с неизвестной дисперсией.

На основе линейной нестационарной модели системы (6), (7) выполнялся прогноз солнечной активности с использованием адаптивного фильтра Калмана. Результаты идентификации дисперсий шумов модели показали, что их оценки для всех циклов варьируются в достаточно узком диапазоне, что обуславливает для формирования алгоритма прогнозирования использования среднего значения этих оценок. На рис. 1 приведены результаты прогнозирования чисел Вольфа в течение 21-го 11-летнего солнечного цикла на 1 месяц (рис 1, *a*) и на 12 месяцев (рис 1, *б*).

Из рис. 1 видно, что предложенный подход обеспечивает достаточно высокую точность прогнозирования в течение 11-летнего цикла за исключением начальной фазы. Точность экстраполяции на 1 месяц больше чем в два раза превышает точность измерения. Ошибки экстраполяции на 12 месяцев незначительно отличаются от ошибок измерений.

**4. Нелинейная модель динамики среднего артериального давления.** Значительные трудности вызывает также формализация задачи поиска воспроизводимых закономерностей биологических систем, организма человека и возможных причин его сбоя.

В данной работе для оценивания и прогнозирования артериального давления по данным семисуточного 24-часового мониторинга, который проводился Российским Университетом

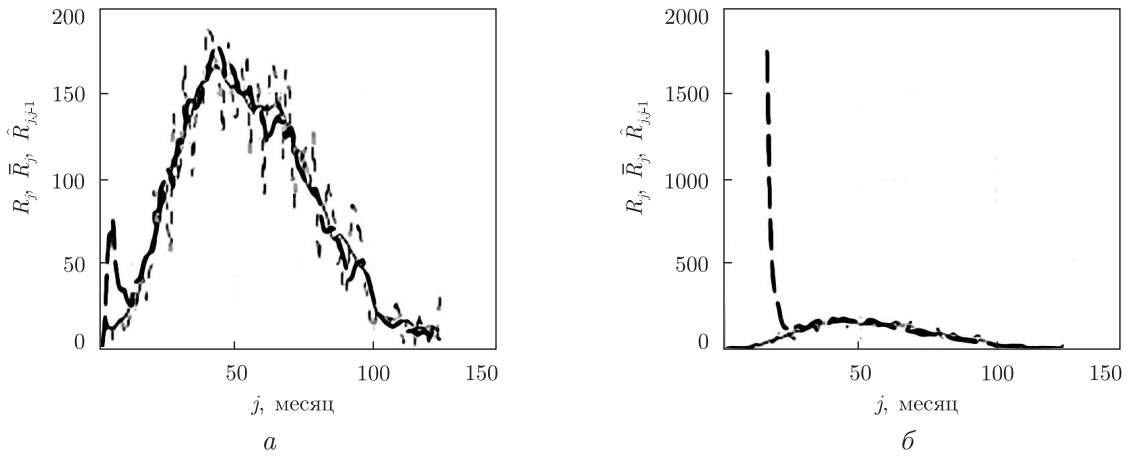


Рис. 1. Прогноз солнечной активности 21-го цикла: тонкая штриховая кривая — среднемесячные измерения чисел Вольфа; тонкая сплошная кривая — сглаженные значения; темная штриховая кривая — прогноз солнечной активности на 1 месяц (а); на 12 месяцев (б)

дружбы народов, формируется стохастическая модель, в качестве детерминированной основы которой используется периодическая функция [8, 9]

$$p_j = A \cos(\omega t_j + \varphi) + D.$$

Здесь  $p_j$  — действительное значение артериального давления;  $t_j$  — время  $j$ -го измерения,  $\omega = 2\pi/24$  (1/ч);  $\varphi$  — начальная фаза, определяемая временем суток начала измерения;  $A$ ,  $D$  и  $\varphi$  — компоненты вектора параметров  $\theta$ .

В пространстве состояний детерминированная основа модели представлена следующим образом:

$$p_j = f(p_{j-1}, t_j) + D + \xi_j T_{j,j-1}.$$

Здесь  $T_{j,j-1}$  — интервал времени между  $j$ -м и  $(j-1)$ -м измерениями артериального давления,  $f(p_{j-1}, t_j)$  — нелинейная функция, которая представляется в виде

$$f(p_{j-1}, t_j) = (p_{j-1} - D) \cos(\omega(t_j - t_{j-1})) \pm \sqrt{A^2 - (p_{j-1} - D)^2} \sin(\omega(t_j - t_{j-1})),$$

где знак “+” используется, если  $-\pi + 2j\pi < \omega t_j \leq 2j\pi$ , а знак “-”, если  $2(j-1)\pi < \omega t_j \leq 2j\pi + \pi$ .

Уравнение измерения артериального давления описывается следующим образом:

$$z_j^p = p_j + \eta_j,$$

где  $\eta_j$  — последовательность случайных ошибок измерения среднего артериального давления, дисперсия которых  $\sigma_\eta^2$  априорно неизвестна.

Прогноз среднего артериального давления выполнялся на основе адаптивного обобщенного фильтра Калмана с использованием метода идентификации дисперсий шумов нелинейной модели по данным первых 100 измерений среднего артериального давления через получасовые и часовые интервалы времени. Эти данные использовались для прогнозирования последующих 168 значений среднего артериального давления обследуемого пациента.

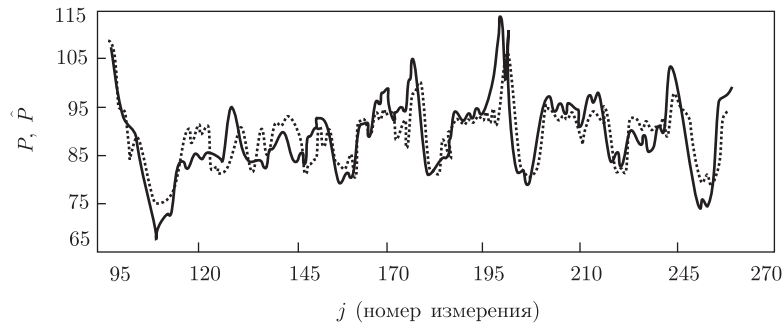


Рис. 2. Экстраполированные (штриховая кривая) и сглаженные (сплошная кривая) значения 54-летнего пациента

На рис. 2 приведены сглаженные и прогнозируемые на 6 шагов (3 и 6 ч) вперед значения среднего артериального давления 54-летнего обследуемого.

Из рис. 2 видно, что использование адаптивного обобщенного фильтра Калмана, основанного на идентификации неизвестных дисперсий шумов модели, обеспечивает высокую эффективность прогноза среднего артериального давления. Для 54-летнего пациента в 90 из 168 точек ошибка экстраполяции среднего артериального давления меньше 3 единиц.

Таким образом, в работе предложен подход к формализации и оцениванию динамических процессов различной физической природы в естественнонаучных задачах на основе формирования стохастических моделей динамических процессов в пространстве состояний с априорно неизвестными статистическими характеристиками шумов. Эффективность предлагаемых моделей обусловлена тем, что, с одной стороны, в качестве детерминированной основы модели используются аппроксимирующие функции, описывающие закономерности процессов, а, с другой стороны, обусловлена гибкостью и универсальностью предлагаемых методов идентификации статистических характеристик шумов. Поэтому прогнозирование, основанное на адаптивной калмановской фильтрации, может давать достаточно точные оценки будущих значений процессов в условиях неопределенности или неполноты информации.

Предложенный принцип формирования стохастических моделей, основанных на аппроксимирующих детерминированных функциях, позволяет отразить наиболее существенные особенности исследуемых динамических процессов. Это обуславливает возможность эффективного применения предлагаемого подхода для оценивания и прогнозирования в трудно формализуемых естественнонаучных задачах различной физической природы.

1. Podladchikova T. Identification of unknown noise statistics for non-stationary state space systems // The Proceedings of Baltic Olympiad on Automatic Control. – St-Petersburg, 2006. – P. 103–107.
2. Podladchikova T. V. Identification of the noise statistics for the non-linear state space systems // Proceedings of the VI Internat. Conf. “System Identification and Control Problems”. – Moscow, 2007. – P. 943–951.
3. Eicker F. Asymptotic normality and consistency of the least squares estimators for families of linear regressions // Annals of Mathemat. Statistics. – 1963. – **34**. – P. 447–456.
4. Anderson W. N. et al. Consistent estimates of the parameters of a linear system // Ibid. – 1969. – **40**. – P. 2074. – 2075.
5. Згуровский М. З., Подладчиков В. Н. Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. – Киев: Наук. думка, 1995. – 298 с.

6. Храмова М. Н., Красоткин С. А., Кононович Э. В. Прогнозирование солнечной активности методом фазовых средних // Электрон. журн. “Исследовано в России”. – 2001. – С. 1169–1176; <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/107/pdf>.
7. Hathaway H., Wilson R., Reichmann E. A synthesis of solar cycle prediction techniques // J. of Geophys. Research. – 1999. – **104(A10)**. – P. 22.375–22.388.
8. Bingham C., Arbogast B., Cornélissen G. G. et al. Inferential statistical methods for estimating and comparing cosinor parameters // Chronobiologia. – 1982. – **9**. – P. 397–439.
9. Подладчикова Т. В., Стрелков Д. Г. Математическое моделирование хронобиологических изменений среднего артериального давления у различных возрастных групп // Технология живых систем – 2007. – **3**. – С. 57–63.

НТУ України “Київський політехнічний інститут”

Поступило в редакцію 25.04.2008