

## **ОБ ИСТОРИИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ СИСТЕМ СИМВОЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В МЕХАНИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ**

**Abstract:** *Computations with symbolic expressions (Computer Algebra, CA) were one of first attempts of modeling of intellectual work. Mechanics and its problems provided a waste field for such investigations; mechanicians play ed a significant role in CA evolution. In this paper we give a brief description of some stages and problems of CA development and application in mechanical tasks. In more details it is presented in the book and several papers of the authors.*

**Key words:** *computer algebra, mechanics, history of science.*

**Анотація:** *Використання громіздких викладів з формулами на комп'ютері (комп'ютерна алгебра, КА) було однією із перших спроб моделювання інтелектуальної діяльності. Механіка і її задачі завжди представляли широке поле для досліджень, тому роль механіків у розвитку вітчизняної КА дуже велика. В роботі коротко викладені деякі стани і проблеми розвитку і використання КА в задачах механіки, які більш детально викладені в статтях і книзі авторів.*

**Ключові слова:** *механіка, комп'ютерна алгебра, історія науки.*

**Аннотация:** *Выполнение громоздких выкладок с формулами на компьютере (компьютерная алгебра, КА) было одной из первых попыток моделирования интеллектуальной деятельности. Механика и ее задачи представляли всегда большое поле для исследований, и роль механиков в развитии отечественной КА велика. В работе очень кратко излагаются некоторые этапы и проблемы развития и использования КА в задачах механики, подробнее изложенные в статьях и книге авторов.*

**Ключевые слова:** *механика, компьютерная алгебра, история науки.*

### **1. Введение**

Механика с самого начала находилась среди лидеров в применении систем символьных преобразований или аналитических вычислений на компьютере (САВ) по громоздкости задач первостепенной важности, готовности математических методов, по специалистам, способным создавать, развивать и использовать САВ. Обзору развития и использования САВ при решении задач механики посвящены работы авторов [1, 2] (см. также <http://www.keldysh.ru>). Большой материал по истории САВ и их использованию в механике содержится в трудах конференций [3–8] и обзорах [9–12]. Некоторые основные этапы по истории САВ и отдельные примеры приводятся в настоящем кратком обзоре.

Первые попытки выполнения аналитических выкладок на компьютере исходили из общих идей кибернетики – воспроизведения способностей и действий человека. Опирались они на достигнутую в "ручных" методах алгоритмизацию громоздких преобразований формул в задачах физики, механики, математики, причем в некоторых из задач возможность дальнейшего продвижения требовала автоматизации этих преобразований. Применение аналитических выкладок в механике сталкивалось с большим разнообразием задач, используемых выражений и методов. Требования САВ к машинным ресурсам весьма велики и долго были на пределе возможностей отечественных компьютеров. Постоянно приходилось искать компромисс между общностью символьных выражений, преобразований и эффективностью САВ, с учетом особенностей сферы приложения. Среди самых первых попыток разработки САВ в первой половине 1960-х годов значительную часть составляли системы для задач механики [13–18]. После первых успехов трудности с дефицитом ресурсов замедлили развитие и применение САВ, но и в этих условиях были решены многие интересные задачи. Появление вычислительных машин БЭСМ-6 и ряда ЕС открыло новые возможности, однако проблемы с ресурсами по-прежнему имели место.

Это привело к возникновению многочисленных САВ различной универсальности, разного объема возможностей и назначения, большая часть которых была разработана пользователями-прикладниками [5, 8].

## **2. Примеры использования САВ в различных областях, в общей механике и управлении**

Интересно разнообразие ролей, в которых выступают аналитические вычисления при использовании в задачах механики. Представление о разнообразии этих приложений можно получить на примере цикла математического эксперимента А.А. Самарского [19], состоящего из этапов:

1. Выбор физической и формирование математической моделей.
2. Выбор вычислительного алгоритма для решения задачи.
3. Создание программы для реализации алгоритма.
4. Проведение расчетов и обработка полученной информации.
5. Анализ результатов, сравнение с экспериментом. Пересмотр, если нужно, физической модели и повторение цикла.

На каждом из этих этапов могут быть использованы и будут успешно применяться САВ [6].

Например, на этапе первом САВ могут быть полезны при выводе уравнений движения для сложных механических систем, таких как гироскопы, роботы, спутниковые системы. Вывод уравнений движения для них требует большого труда, что, вместе с вероятностью ошибок, становится препятствием для рассмотрения более сложных и точных моделей явления. САВ данного типа (а также для последующего анализа свойств механических систем) было создано более десяти, они создавались пользователями под классы конкретных задач.

Среди САВ этого типа группой М.А. Чубарова и Г.А. Долгова в Горьком была создана АЛГЕБРА-0 для автоматизации вывода уравнений движения сложных систем механики и исследования их устойчивости. Л.И. Штейнвольф и В.Н. Митин в Харькове разработали САВ для анализа и моделирования свойств механических систем. В Иркутске Л.А. Бурлакова, М.В. Почтаренко и др. создали САВ ДИНАМИКА и МЕХАНИК, ППП для анализа устойчивости движения и других свойств сложных механических систем. Группой С.Я. Свистунова в Киеве была разработана САВ для анализа свойств гироскопических систем [8, 10].

Эти и ряд других специализированных прикладных САВ выполняли вывод уравнений движения механической системы, их исследование, упрощение и анализ свойств, формирование численных программ для дальнейшего моделирования. Исследование устойчивости в связи с их громоздкостью являлось одним из основных этапов при решении многих задач с использованием САВ этой группы. Определяющими для САВ данного типа являются: круг решаемых задач, совершенство и эффективность алгоритмов, специальный сервис. Имея много общего в возможностях, методах исследования, каждая из этих САВ имела и свои особенности в методике, круге задач и типе механических систем, исследуемых с их помощью.

Среди указанных САВ можно выделить три подгруппы с достаточно выраженной спецификой [8]. Первая подгруппа (для задач типа "проектирования") имела дело с большим числом не очень сложных вариантов-моделей, среди которых необходимо производить выбор,

оптимизацию параметров. САВ используется при формализации модели, для облегчения общения пользователя с системой – этапы 1, 2, 3 в цикле Самарского, остальные этапы выполняются численно. Во второй подгруппе (задачи моделирования в громоздких случаях) в символьном виде выполняются этапы 1–4, в центре внимания оказывается эффективность счета – выбор вида уравнений движения, данных и их преобразований, организация счета, контроль точности и вычислений. Третья подгруппа – качественные исследования свойств уравнений движения механических систем и их решений: нормализация, осреднение, выделение стационарных решений, исследование устойчивости. САВ используется на многих этапах. Удобство сервиса и эффективность вычислений важны, но главное – богатство и совершенство алгоритмов, в том числе специальных, их реализация и развитие. Каждая группа имела своих ярких представителей, имелись и промежуточные случаи.

В задачах управления и оптимизации САВ успешно применялись и применяются (в том числе при выводе уравнений оптимального движения в достаточно сложных системах) теперь уже как привычный инструмент, часто без специального упоминания об их применении. Например, М.С. Константинов использовал MathCAD (САВ, входящую в него) при выводе уравнений оптимального движения в задачах механики космического полета во взаимодействии графических, символьных и численных возможностей. При решении краевой задачи, к которой сводится решение многих задач оптимального управления, новые возможности, в смысле улучшения сходимости, представляет метод “продолжения по параметру”. Для его применения эффективным может быть использование САВ при формировании расширенной системы вспомогательных уравнений. В работах Р.А. Сабитова и др., выполненных в 1970-е годы, решалась задача построения управления программным движением манипулятора при наличии фазовых ограничений. Были разработаны методы синтеза управления программным движением. САВ использовалась на многих этапах цикла исследования, вплоть до автоматического формирования программ расчета на конкретной управляющей мини-ЭВМ, расположенной в цепи обратной связи манипулятора. Последний этап является новым в вычислительном цикле в сравнении с циклом А.А. Самарского.

Использование специальных разделов математики (спецфункций, методов теории групп или теории дифференциальных уравнений и т.п.) позволяет по-иному строить и сам цикл исследования. Математические модели могут исследоваться на ЭВМ и качественными методами, с определением первых интегралов, симметрий, взятием квадратур при помощи САВ. Так, Б.А. Попов и др. во Львове использовали САВ при создании справочника по дифференциальным уравнениям и спецфункциям [5, 6]. Вне САВ многие из этих разделов нелегко включить в арсенал вычислительных средств на ЭВМ. Недавний пример успеха в применении САВ – работа А.С. Кулешова в МГУ, развивавшего классическую задачу, исследованную С.А. Чаплыгиным. Используя САВ Maple и алгоритм Дж. Ковальчича интегрирования дифференциального уравнения, ему удалось получить новые случаи интегрируемости и явный вид первых интегралов.

Демонстрации возможности различных САВ и обмен мнениями по ним происходили на многочисленных научных мероприятиях. Среди них были всесоюзные, как “Системы для аналитических преобразований в механике” в Горьком (Нижнем Новгороде) в 1984 году, международные, как Симпозиум ISSSC в июле 1993 года в Киеве, конференция памяти Н.Н.

Говоруна в 1990 году в Дубне и периодические дубнинские научные "совещания" с участием иностранцев и более скромные – как небольшие секции на конференциях с другой тематикой, конференция в Киеве в ГГУ [7] и семинары по САВ в механике в НИИ механики МГУ. Совещания в Ленинграде в филиале Института машиноведения АН 1988 и 1989 годов по механике систем многих тел [8] были примечательны тщательным анализом и сравнением методик моделирования динамики сложных механических систем и использования САВ.

Особо следует сказать о работах известной киевской школы САВ В.М. Глушкова, о языке и системе АНАЛИТИК [20], реализованных аппаратно на машинах МИР, что позволило решить в тот момент проблему дефицита ресурсов. Распространенность АНАЛИТИКа и его возможности сделали его на большой период времени лидером среди САВ. Его активные пользователи, в том числе механики, были объединены в ассоциацию пользователей МИРа. Система АНАЛИТИК широко применялась в задачах механики киевскими механиками и физиками в задачах с малым параметром, при исследовании нелинейных колебаний методом осреднения (например, Ю.А. Митропольский и А.А. Молчанов [21]). МИР и АНАЛИТИК использовались во многих других задачах математики и механики в Киеве, Москве, Ленинграде, Харькове, Туле, Пуццино.

### **3. Применение САВ в небесной механике и механике сплошных сред**

Небесно-механические приложения аналитических вычислений были одним из лидеров в применениях САВ. Этому способствовал интерес к прикладной небесной механике в связи с запуском искусственных спутников Земли, необходимость решения новых, существенно более сложных задач при условии обеспечения высокой степени точности. Классические методы небесной механики подготовили задачи и математический аппарат для применения САВ. Были получены яркие примеры плодотворности аналитических вычислений – D.Barton в 1966 году на САВ повторил классическую теорию движения Луны Делоне, которая строилась им 20 лет, причем была обнаружена ошибка. Среди пионеров по САВ в нашей стране в области небесной механики были В.А. Брумберг [9], В.А. Полозова и В.А. Шор [16].

В ИТА АН СССР в Ленинграде создана научная школа по САВ и был разработан ряд систем на БЭСМ-6 на Фортране, с помощью которых решались задачи по теории движения Луны, планет, спутников планет, искусственных спутников Земли. Эти системы могли быть использованы при решении других задач, позволяя работать с рядами Тейлора, Пуассона, с полиномами Чебышева, со степенными полиномами и т.п. В Томском университете на базе САВ Авто-Аналитик (Е.А. Арайс, Г.В. Сибиряков) была построена система БОРА (Ю.Б. Шмидт) для операций с рядами Пуассона. Строились аналитические решения ограниченной задачи трех тел, теория движения спутников Юпитера, алгоритмы преобразования Ли. (Т.В. Бородовицина, Т.С. Бороненко и др.). Работы по методам вычисления орбит ИСЗ были выполнены Н.В. Емельяновым в ГАИШ МГУ, используя САВ ИТА. В ИПМ АН СССР Д.Е. Охоцимский разработал САВ для полиномов и применил ее в задаче о движении точки с малой тягой [18]. Ее продолжением была работа Г.Б. Ефимова с использованием простейших "рядов Пуассона", комбинации тригонометрических и степенных полиномов. Вопросы нормализации и устойчивости в различных задачах механики и небесной механики исследовались А.П. Маркеевым, А.Г. Сокольским, В.Ф. Еднералом, В.Д. Иртеговым, М.А. Новиковым и др.

В механике сплошных сред использование САВ также началось с самых первых дней, как правило, с помощью САВ, разработанных авторами. Среди первых отечественных опытов по САВ мы видим работы по теории упругости В.К. Кабулова и В.А. Толока в Ташкенте [17], в этой же области в Ленинграде применялась полиномиальная система ПРОРАБ Т.Н. Смирновой из МИАН [15], ученицы Л.В. Канторовича. Пионерскими были статья А.А. Стогния по формульному дифференцированию для построения асимптотик в задаче о взрыве в атмосфере [14] и первые труды Н.Н. Яненко по дифференциальным формам для задач газодинамики [13], развитые впоследствии им с учениками (Е.А. Арайс, А.Н. Валлиулин, В.П. Шапеев и др.). По задачам вычислительной математики имеется обзор А.А. Самарского и М.Ю. Шашкова; по механики твердого тела – обзоры В.И. Савченко и В.Б. Анисимовой [12].

Широкому применению САВ в области упругости и прочности способствовали такие обстоятельства, как важность и разнообразие задач, громоздкость используемых вычислений, наличие аналитических методов построения решений в рядах разного рода, развитых в научных школах Ленинграда, Киева, Москвы, Днепропетровска, Ростова-на-Дону. САВ применялись при выводе громоздких уравнений движения и равновесия в методе конечного элемента. Построение решения с помощью аналитических разложений по системам функций в теории оболочек успешно использовались в Киевском университете школой В.А. Савченко в задачах с ребрами, угловыми точками и т.п., когда плохо работают численные методы. Работы по механике твердого деформируемого тела были представлены на многих конференциях по САВ [4, 5, 7].

К анализу и автоматизации численных методов механики сплошных сред относятся исследования по дифференциальным формам Н.Н. Яненко, его учеников и В.Л. Топунова. По задачам группового анализа, совместности и разрешимости уравнений механики сплошных сред были выполнены работы В.Л. Каткова, В.В. Корняка, В.И. Фущича и В.Л. Берковича. Автоматизацией построения разностных схем с помощью САВ занимались М.Ю. Шашков, И.Б. Щенков, В.П. Шапеев. В области гидро- и аэромеханики примеры использования САВ не столь многочисленны, как в механике деформируемого тела. Стоит отметить, например, работы Б.А. Бублика, В.А. Щербины, Я.М. Каждана и С.Я. Герценштейна.

Среди работ последних лет, дающих представление о новой области применения САВ, приведем расширение языка АНАЛИТИК-2001 и его использование в автоматизации описания структур и при поиске решения сложных задач. Особенность такого применения САВ, как и других языков описания высокого уровня, например, рефала, – не только преобразование формул, но и согласование, стыковка большого числа структур, данных и отдельных фрагментов вычислений (В.П. Клименко, А.Л. Ляхов [22]). Работа САВ охватывает этапы формализации описания, выбора алгоритма, построения программы и программного обеспечения. Заметим, что многие из возможностей САВ подобного рода, особенно на этапах 1–3 цикла Самарского, в настоящее время большей частью выполняются с использованием символьных языков программирования высокого уровня.

#### 4. Заключение

Даже из этого краткого обзора видно, как разнообразно и широко использовались САВ при решении большого числа задач механики и какой весомой, а во многих случаях и ведущей, была роль, которую играли в этом ученые Украины.

Работа частично поддержана РФФИ, грант N 04-01-00346 и НШ.2448.2006.1.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грошева М.В. История использования аналитических вычислений (на компьютере) в задачах механики / М.В. Грошева, Г.Б. Ефимов, В.А. Самсонов. – Москва: Изд. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2005.
2. Ефимов Г.Б. Из истории развития и применения компьютерной алгебры в ИПМ им. М.В. Келдыша / Г.Б. Ефимов, Е.Ю. Зуева, И.Б. Щенков // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, № 6. – С. 11–18.
3. Вычислительная математика и вычислительная техника // Всесоюзный семинар. – Харьков: ФТНИИТ АН УССР, 1972. – № 3.
4. Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике // Материалы международного совещания. – Дубна: ОИЯИ, 1980. – 187 с.; 1983. – 260 с.; 1985. – 420 с.
5. Системы для аналитических преобразований в механике // Тезисы докладов Всесоюз. совещания. – Горький: ГГУ, 1984. – 147 с.
6. Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. – М., Наука, 1988. – 156 с.
7. Системы аналитических вычислений (методы компьютерной алгебры) в механике деформируемого твердого тела. – Киев, 1988. – Деп. УкрНИИ НТИ, 1990.
8. Методы компьютерного конструирования моделей механики систем твердых тел. Материалы Всесоюз. рабочего совещания. – Ленинград, 1989. – № 6. – 32 с. (Препринт / Ленингр. фил. Ин-та машиновед. АН СССР).
9. Брумберг В.А. Небесно-механические методы проведения буквенных операций на ЭВМ. – Томск: ТГУ, 1974; Аналитические алгоритмы небесной механики. – М.: Наука, 1980; Brumberg V.A. Analytical Techniques of Celestial Mechanics. – 1995.
10. Почтаренко М.В. Применение систем аналитических вычислений в задачах механики // ППП. Функциональное наполнение. – Новосибирск: Наука, 1985. – С. 3–11.
11. Климов Д.М., Руденко В.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики. – М.: Наука, 1989. – 214 с.
12. Савченко В.П. Об использовании САВ в механике твердого тела // Системы аналитических вычислений (методы компьютерной алгебры) в механике твердого тела. – Киев: УкрНИИ НТИ, 1990. – С. 1–8; Савченко В.И., Анисимова В.Б. и др. Использование машинных аналитических преобразований в механике оболочек // Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. – М.: Наука, 1988. – С. 63–73.
13. Шурыгин В.А., Яненко Н.Н. О реализации на ЭВМ алгебраических дифференциальных алгоритмов // Проблемы кибернетики. – 1961. – № 6. – С. 33–43.
14. Стогний А.А. Решение на ЦВМ одной задачи, связанной с дифференцированием функций // Проблемы кибернетики. – 1962. – № 7. – С. 189–200.
15. Смирнова Т.Н. Полиномиальный прораб и проведение аналитических выкладок на ЭВМ // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. – М.-Л., 1962.
16. Полозова Н.Г., Шор В.А. Применение ЭВМ к построению аналитических теорий движения планет и спутников // Проблемы движения искусственных спутников небесных тел. – М., 1963. – С. 186.
17. Кабулов В.К. К выводу дифференциальных уравнений упругости и строительной механики на ЭВМ // Доклады АН УССР. – 1963. – № 9. – С. 5–8.
18. Охоцимский Д.Е. Исследование движения в центральном поле сил под действием постоянного касательного ускорения // Космические исследования. – 1964. – Т. 2, № 6. – С. 817–842.
19. Карпов В.Я. Принципы разработки пакетов прикладных программ для задач математической физики / В.Я. Карпов, Д.А. Карягин, А.А. Махарский // ЖВМ и МФ. – 1962. – Т. 18, № 2. – С. 458–467.
20. АНАЛИТИК – алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований / В.М. Глушков, В.П. Клименко, А.А. Стогний и др. // Кибернетика. – 1971. – № 3. – С. 102–134.
21. Митропольский Ю.А., Молчанов А.А. Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. – Киев: Наукова думка, 1981.
22. Клименко В.П., Ляхов А.Л. Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры // Математичні машини і системи. – 2003. – № 3–4. – С. 103–123; Клименко В.П., Ляхов А.Л., Фишман Ю.С. Основные тенденции развития языков систем компьютерной алгебры // Математичні машини і системи. – 2002. – № 2. – С. 29–64.

*Стаття надійшла до редакції 25.10.2007*