

БАГАТОФАКТОРНЕ МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОМПРОМІСНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ЕЛЕКТРОЕРОЗІЙНОГО ПРОШИТТЯ ОТВОРІВ

Вступ

Постановка проблеми. Метою цієї роботи є одержання математичних моделей для визначення оптимального поєднання наведених нижче режимних технологічних факторів, за якими на верстаті типу 4Г721М досягається максимальна продуктивність обробки при мінімальному спрацьовуванні електрод-інструмента (ЕІ) під час електроерозійного прошиття отвору у сталі 1Х12СЮ.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дана задача є основною серед проблем підвищення ефективності електроерозійної обробки (ЕЕО). Підвищення продуктивності процесу при малому спрацьовуванні ЕІ досягається при певному оптимальному поєднанні технологічних факторів. Звичайним методом, тобто методом однофакторного експерименту, можна визначити вплив на продуктивність тільки окремих факторів [4, 12]. Враховуючи ж всі можливі впливи факторів, необхідно дослідити технологічний процес як багатофакторний при неповному знанні механізму явищ, що відбуваються. Розробка феноменологічної моделі при значній кількості змінних факторів і широкому діапазоні зміни їх значень вельми скрутна. У цьому випадку розв'язання задачі математичного моделювання можливе тільки за допомогою експериментально-статистичного методу [10] та системного підходу [3; 8, с. 57, 66 – 69].

Постановка завдання. У формальному запису постановка задачі має такий вигляд:

$$\hat{y}_j = f_i(X_1, X_2, \dots, X_k); \quad \hat{y}_j = ext,$$

де \hat{y}_j – j -та функція мети або критерій якості (залежна змінна, відгук); X_1, X_2, \dots, X_k – фактори (незалежні змінні), що впливають на критерій якості; k – загальна кількість факторів.

Змістовну постановку задачі щодо критеріїв якості та досліджуваних факторів здійснено на базі максимально доступної інформації про характеристики технологічного процесу електроерозійного прошиття отвору у сталі 1Х12СЮ з метою їх математичного моделювання та оптимізації. При цьому бажано мінімізувати кількість дослідів і витрати ресурсів до обґрунтовано допустимих значень.

Викладення нової концепції рішення

У цьому дослідженні критеріями якості (відгуками, залежними змінними) є:

y_1 – продуктивність обробки Π , мм³/хв, $\Pi = \max$ (задача 1);

y_2 – спрацьовування електроерозійного інструмента J , % $J = \min$ (задача 2)

Продуктивність Π ЕЕО оцінюється об'ємом металу, що видаляється з поверхні, за одиницю виміру часу (мм³/хв) [2].

Враховуючи те, що площу та глибину отвору, який прошивають, а також діаметр EI у всіх дослідах, що проводять, залишають незмінними, визначення продуктивності ЕЕО фактично зводилося до вимірювання часу обробки деталі на верстаті при рівнях факторів, що задовольняють умови даного досліджу.

Отже, продуктивність процесу обчислювалася за формулою:

$$\Pi = sl / t, \text{ мм}^3/\text{хв},$$

де Π – продуктивність ЕЕО, мм³/хв; s – площа отвору, що прошивають, мм²; l – глибина отвору, що прошивають, мм; t – час обробки, хв.

Спрацьовування (руйнування) EI оцінюють його загальним відносним спрацьовуванням, яке виражають, переважно, у відсотках. Лінійне відносне спрацьовування дорівнює відношенню довжини спрацьованої частини EI до глибини отвору, що прошивають:

$$J = (\Delta l_{ik} / l)100, \%,$$

де Δl_{ik} – довжина спрацьованої частини EI, мм; l – глибина отвору, що прошивають, мм.

Довжину EI до та після проведення кожного досліджу вимірювали мікрометром МК 25-1 ГОСТ 6507-78.

При цьому відносна похибка визначення продуктивності ЕЕО склала $\delta\Pi / \Pi \approx 1\%$, а відносна похибка визначення спрацьовування $EI - \delta J / J \approx 2\%$.

Внаслідок аналізу апріорної інформації, а також потреб виробництва було вирішено досліджувати вплив на критерії якості факторів, наведених у табл. 1.

Відповідно до мети та завдань роботи, експериментальним можливостям даного виробництва, а також обраним методам дослідження експеримент доцільно здійснити за планом $3^5/27$, що містить 27 дослідів і є рівномірним планом. Це означає, що рівні будь-якого фактора зустрічаються в плані експерименту однакову для даного фактора кількість разів. Тому значення лінійних і квадратичних контрастів можна обчислити, виходячи із знання рівнів варіювання факторів.

$$\begin{aligned} x_1 &= 2(X_1 - 1), & z_1 &= 1,5(x_1^2 - 0,666667); \\ x_2 &= 0,25(X_2 - 22), & z_2 &= 1,5(x_2^2 - 0,666667); \\ x_3 &= X_3 - 3, & z_3 &= 1,5(x_3^2 - 0,666667); \\ x_4 &= 0,05(X_4 - 70), & z_4 &= 1,5(x_4^2 - 0,666667); \\ x_5 &= 0,05(X_5 - 80), & z_5 &= 1,5(x_5^2 - 0,666667). \end{aligned} \quad (1)$$

Таблиця 1. Натуральні та кодовані значення рівнів варіювання факторів

| Фактор | Назва та натуральні позначення факторів | Натуральні значення рівнів X_i | Значення рівнів X_i у робочій матриці | Кодовані теоретичні значення рівнів факторів та ортогональні контрасти | | |
|--------|---------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------|------------|
| | | | | F_i | x_i | z_i |
| 1 | Тиск рідини, що прокачують, P_E , кгс/см ² | 0,5 | 0,5 | 0 | -1,2247448 | 0,7071067 |
| | | 1,0 | 1,0 | 1 | 0 | -1,4142135 |
| | | 1,5 | 1,5 | 2 | 1,2247448 | 0,7071067 |
| 2 | Робочий струм у міжелектродному зазорі I_E , А | 18 | 18 | 0 | -1,2247448 | 0,7071067 |
| | | 22 | 22 | 1 | 0 | -1,4142135 |

| | | | | | | |
|---|-----------------------------------------------------------|-----|-----|---|------------|------------|
| | | 26 | 26 | 2 | 1,2247448 | 0,7071067 |
| 3 | Частота імпульсів f_E , кГц | 2 | 2 | 0 | -1,2247448 | 0,7071067 |
| | | 3 | 3 | 1 | 0 | -1,4142135 |
| | | 4 | 4 | 2 | 1,2247448 | 0,7071067 |
| 4 | Напруга на вібраторі U_E , В | 50 | 50 | 0 | -1,2247448 | 0,7071067 |
| | | 70 | 70 | 1 | 0 | -1,4142135 |
| | | 90 | 90 | 2 | 1,2247448 | 0,7071067 |
| 5 | Напруга на двигуні подачі електрода-інструмента W_E , В | 60 | 60 | 0 | -1,2247448 | 0,7071067 |
| | | 80 | 80 | 1 | 0 | -1,4142135 |
| | | 100 | 100 | 2 | 1,2247448 | 0,7071067 |

Для багатофакторних регулярних планів може бути запропоновано декілька типів регресійних моделей [1, 9]. Враховуючи, що фактори кількісні, план експерименту відповідає критерію ортогональності та фактори в плані змінюють на декількох ($s = 3$) рівнях. Доцільно запропонувати факторну модель у вигляді системи ортогональних поліномів Чебишева [1, 9].

Для прийнятого багатофакторного плану математичну модель запропоновано у вигляді такого структурного виразу:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2z_1 + b_3x_2 + b_4z_2 + b_5x_3 + b_6z_3 + b_7x_4 + b_8z_4 + b_9x_5 + b_{10}z_5 + D, \quad (2)$$

де b_0, b_1, \dots, b_{10} – оцінки коефіцієнтів регресійної моделі; x_1, x_2, \dots, x_5 – лінійні функції (ортогональні контрасти) натуральних значень факторів X_1, X_2, \dots, X_5 ; z_1, z_2, \dots, z_5 – квадратичні функції (ортогональні контрасти) значень x_1, x_2, \dots, x_5 [1, 9]; D – умовне позначення членів моделі з добутками вищезгаданих функцій (поліномів) по дві, три і т. д. функції. Ці члени враховують взаємовплив факторів на значення критерію якості (функцію відгуку).

За розробленою методикою та, використовуючи програмний засіб "Планування, регресія і аналіз моделей" (ПЗ ПРИАМ) [5] із застосуванням персонального комп'ютера (ПК), була сгенерована матриця плану експерименту з кодованим позначенням рівнів 0, 1, 2 факторів $F_1 \dots F_5$ для кожного з дослідів. На основі вищезгаданої матриці була побудована робоча матриця плану експерименту (табл. 2).

Таблиця 2. Робоча матриця, рівні варіювання, результати дослідів

| Кодовані теоретичні значення рівнів варіювання факторів | Фактори | | | | | Функції | | | |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------------------------------|----------|----------|----------|
| | Натуральне позначення факторів | | | | | Натуральне позначення функцій | | | |
| | P_E | I_E | f_E | U_E | W_E | Π , мм ³ /хв | | J , % | |
| | Кодоване позначення факторів та натуральні значення їх рівнів | | | | | Кодоване позначення функцій | | | |
| $F_1 \dots F_5$ | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | y_1 | | y_2 | |
| 0 | 0,5 | 18 | 2 | 50 | 60 | Результати повторних дослідів | | | |
| 1 | 1,0 | 22 | 3 | 70 | 80 | | | | |
| 2 | 1,5 | 26 | 4 | 90 | 100 | y_{11} | y_{12} | y_{21} | y_{22} |
| Дослід 1 | 0,5 | 18 | 2 | 50 | 60 | 46 | 47 | 45 | 46 |
| 2 | 1,0 | 18 | 2 | 70 | 80 | 48 | 49 | 49 | 51 |

| | | | | | | | | | |
|----|-----|----|---|----|-----|-----|-----|----|----|
| 3 | 1,5 | 18 | 2 | 90 | 100 | 50 | 52 | 52 | 53 |
| 4 | 0,5 | 22 | 2 | 70 | 100 | 78 | 79 | 46 | 47 |
| 5 | 1,0 | 22 | 2 | 90 | 60 | 81 | 80 | 50 | 51 |
| 6 | 1,5 | 22 | 2 | 50 | 80 | 83 | 85 | 51 | 51 |
| 7 | 0,5 | 26 | 2 | 90 | 80 | 100 | 102 | 47 | 48 |
| 8 | 1,0 | 26 | 2 | 50 | 100 | 102 | 100 | 50 | 49 |
| 9 | 1,5 | 26 | 2 | 70 | 60 | 104 | 107 | 58 | 57 |
| 10 | 0,5 | 18 | 3 | 50 | 60 | 58 | 58 | 50 | 52 |
| 11 | 1,0 | 18 | 3 | 70 | 80 | 59 | 59 | 50 | 52 |
| 12 | 1,5 | 18 | 3 | 90 | 100 | 62 | 64 | 61 | 62 |
| 13 | 0,5 | 22 | 3 | 70 | 100 | 97 | 95 | 52 | 51 |
| 14 | 1,0 | 22 | 3 | 90 | 60 | 98 | 100 | 58 | 57 |
| 15 | 1,5 | 22 | 3 | 50 | 80 | 100 | 101 | 61 | 60 |
| 16 | 0,5 | 26 | 3 | 90 | 80 | 110 | 112 | 49 | 48 |
| 17 | 1,0 | 26 | 3 | 50 | 100 | 113 | 113 | 55 | 57 |
| 18 | 1,5 | 26 | 3 | 70 | 60 | 115 | 115 | 60 | 62 |
| 19 | 0,5 | 18 | 4 | 50 | 60 | 70 | 71 | 52 | 53 |
| 20 | 1,0 | 18 | 4 | 70 | 80 | 71 | 70 | 60 | 62 |
| 21 | 1,5 | 18 | 4 | 90 | 100 | 74 | 76 | 64 | 65 |
| 22 | 0,5 | 22 | 4 | 70 | 100 | 95 | 96 | 55 | 57 |
| 23 | 1,0 | 22 | 4 | 90 | 60 | 96 | 96 | 61 | 62 |
| 24 | 1,5 | 22 | 4 | 50 | 80 | 98 | 97 | 64 | 65 |
| 25 | 0,5 | 26 | 4 | 90 | 80 | 125 | 123 | 50 | 49 |
| 26 | 1,0 | 26 | 4 | 50 | 100 | 127 | 127 | 52 | 53 |
| 27 | 1,5 | 26 | 4 | 70 | 60 | 130 | 131 | 65 | 67 |

За необхідності існує можливість розбити план експерименту на ортогональні блоки, що дає змогу зменшити вплив неоднорідностей на критерії якості, які досліджуються, а також дає змогу їх оцінити кількісно. У цьому дослідженні план експерименту не розбивався на ортогональні блоки, оскільки вплив неоднорідностей був досить незначним.

Натуральні значення рівнів факторів (незалежних змінних) X_i , їх значення в робочій матриці, кодовані значення рівнів факторів F_i та відповідні їм значення лінійних x_i та квадратичних z_i ортогональних контрастів наведені у табл. 1. Перед таблицею наведені формули (1) переходу від X_i до x_i , z_i , що визначають за допомогою персонального комп'ютера для кожного плану окремо за методикою та програмою, розробленою розробниками [5, 9]. Відповідні нормувальні коефіцієнти введені в коефіцієнти одержаних математичних моделей.

Попередній аналіз результатів експериментів. Результати повторних дослідів, проведених у номінально однакових умовах, перевірялися на статистичну відтворюваність за G -критерієм Кохрена. При $G^{розр} \leq G^{табл}$ для певного рівня значущості α (у нашому випадку ($\alpha = 0,05$)) та числа ступенів вільності ν для кожного рядку результатів повторних дослідів і загальної кількості дослідів N гіпотезу про незначущість відмінності дисперсій різних дослідів не відкидають і вважають, що міра розсіювання результатів повторних дослідів, які відповідають певним рядкам матриці плану експерименту, є однаковою. Для обох задач відмінності дисперсій різних дослідів статистично не значущі, тобто вони є однорідними. Результати перевірки дисперсій дослідів на однорідність, що виконувалась за допомогою ПЗ ПРИАМ, наведено у табл. 3. Детальніше попередній аналіз результатів дослідів розглянуто у [6, с. 191].

Перевірка рівня впливу «шуму» на результати дослідів. Перед тим як почати будувати математичну модель, бажано визначити, чи можливо на основі певних результатів експериментів одержати будь-яку закономірність. Формально це визначають за допомогою F -критерію Фішера. Результати перевірки рівня впливу «шуму» на результати дослідів, що проводилися за допомогою ПЗ ПРИАМ, наведено у табл. 4. Тут ν_1 – число ступенів вільності відносно загального середнього значення результатів дослідів, ν_2 – число ступенів вільності для дисперсії відтворення. Детальніше це питання розглянуто у [8, с. 169].

У вищевказаному випадку як у задачі 1, так і у задачі 2 рівень впливу «шуму» на результати дослідів є незначним, що дає змогу відповісти позитивно на питання про можливість одержати за результатами дослідів певні закономірності в обох задачах відповідно.

У ПЗ ПРИАМ є можливість виконати такі перетворення матриці незалежних змінних вихідних даних: *нормування, ортогоналізація та побудова взаємодій*. Вони є однаковими як для задачі 1, так і для задачі 2, оскільки робоча матриця плану експерименту у них одна. Нормувальні коефіцієнти автоматично враховують у коефіцієнтах одержаного рівняння регресії.

Таблиця 3. Результати статистичного аналізу математичних моделей

| Параметри статистичного аналізу | | Умовні позначки | Значення параметрів для моделі | |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------|-------------|
| | | | \hat{y}_1 | \hat{y}_2 |
| Перевірка гіпотези про відтворюваність результатів експерименту | Дисперсія відтворення | s_y^2 | 1,09 | 0,93 |
| | Середньоквадратичне відхилення | s_y | 1,05 | 0,96 |
| | Число ступенів вільності для дисперсії відтворення | $f_{s_y}^2$ | 27 | 27 |
| | Розраховане значення G -критерію | $G^{розр}$ | 0,152 | 0,08 |
| | Табличне значення G -критерію | $G^{табл}$ | 0,32 | 0,32 |
| | Рівень значущості | α | 0,05 | 0,05 |
| Значення критерію Стьюдента ($\alpha = 0,05; \nu = 27$) | | $t^{табл}$ | 2,05 | 2,05 |
| Число обумовленості | | Cond | 1 | 1,35 |
| Гіпотези про адекватність одержаної математичної моделі | Дисперсія адекватності | $s_{ад}^2$ | 0,9839 | 1,5060 |
| | Розраховане значення F -критерію | $F^{розр}$ | 1,1105 | 1,6265 |

| | | | | |
|--------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------|-------------|--------|
| | Табличне значення F -критерію | $F^{табл}$ | 2,0905 | 1,9736 |
| | Число ступенів вільності для адекватності | $f_{ад}$ | 19 | 20 |
| | Рівень значущості | α | 0,05 | 0,05 |
| Аналіз одержаної моделі на інформативність | Коефіцієнт множинної кореляції | R | 0,9994 | 0,9833 |
| | Число ступенів вільності ν_1 | f_k | 7 | 6 |
| | Число ступенів вільності ν_2 | f_R | 46 | 47 |
| | Розраховане значення F -критерію | $F^{розра}$ | 2269,05 | 97,50 |
| | Табличне значення F -критерію | $F^{табл}$ | 2,2164 | 2,2990 |
| | Рівень значущості | α | 0,05 | 0,05 |
| | Значення параметру для критерію Бокса і Веца | γ | 27 | 5 |
| | Інформативність моделі | | дуже висока | висока |
| Середня абсолютна похибка апроксимації, % | | $\bar{\epsilon}_y$ | 0,7479 | 1,6329 |
| Частка розсіювання, пояснювана моделлю | | $Q_{\hat{y}}$ | 0,9988 | 0,9669 |

Таблиця 4. Перевірка рівня впливу «шуму» на результати дослідів

| Задача 1 | |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| Дисперсія відносно загального середнього | 601,793 |
| Розраховане значення F -критерію | 550,794003 |
| Табличне значення F -критерію ($\alpha = 0,05; \nu_1 = 26; \nu_2 = 27$) | 1,912622 |

| Задача 2 | |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Дисперсія відносно загального середнього | 36,6731 |
| Розраховане значення F -критерію | 39,606923 |
| Табличне значення F -критерію ($\alpha = 0,05; \nu_1 = 26; \nu_2 = 27$) | 1,912622 |

Побудова регресійних моделей. Регресійний аналіз результатів дослідів і перевірку одержаних математичних моделей виконують за алгоритмом і відповідно до методики, викладеної в [6, 8, 9]. Розрахунок моделей здійснювався на ПК з використанням ПЗ ПРИАМ [5]. Як вихідні дані використовувалися нормована матриця ортогональних контрастів разом з подвійними і потрійними взаємодіями та результати дослідів.

Згідно зі заздалегідь сформульованими критеріями та в результаті перевірок статистичних гіпотез одержано структурні групи ефектів: головних ефектів та взаємодій. Був проаналізований список ефектів – кандидатів для включення у структуру математичних моделей до задачі 1 і до задачі 2. Обмеження максимально-го коефіцієнта кореляції між ефектами – 0,4, а мінімального коефіцієнта кореляції ефектів з відгуком – 0,01.

Одержані за допомогою ПЗ ПРИАМ моделі наведено в рівняннях (3–4):

$$\hat{y}_1 = 88,80 + 27x_2 + 10,56x_3 + 4,85z_2z_3 - 3,15z_2 + 2,28x_1 + 2,89z_2x_3 - 1,70z_3, \quad (3)$$

$$\hat{y}_2 = 54,89 + 5,38x_1 + 4,31x_3 - 3x_3x_4z_5 - 2,75z_1x_2z_3 + 2,56z_1x_2z_5 - 3,29z_1z_2z_4. \quad (4)$$

Статистичні характеристики коефіцієнтів рівняння регресії та мультиколінеарність ефектів до задачі 1 наведено у табл. 5 та 6, а до задачі 2 – у табл. 7 та 8 відповідно.

Таблиця 5. Статистичні характеристики коефіцієнтів математичної моделі до задачі 1

| Назва регресора | Коефіцієнт рівняння регресії | Стандартна похибка коефіцієнтів рівняння регресії | Розраховане значення критерію Стьюдента $t^{розр}$ | Частка участі |
|----------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------|
| x_2 | 27 | 0,190896 | 5,74014 | 0,838647 |
| x_3 | 10,5556 | 0,190896 | 2,24409 | 0,128178 |
| $z_2 z_3$ | 4,85185 | 0,190896 | 0,631657 | 0,0101554 |
| z_2 | -3,14815 | 0,190896 | -0,579621 | 0,00855113 |
| x_1 | 2,27778 | 0,190896 | 0,48425 | 0,00596863 |
| $z_2 x_3$ | 2,88889 | 0,190896 | 0,434284 | 0,00480047 |
| z_3 | -1,7037 | 0,190896 | -0,313677 | 0,00250439 |
| Вільний член 88,7963 | | | | |

Таблиця 6. Мультиколінеарність ефектів до задачі 1

| Назва регресора | Максимальний коефіцієнт кореляції | З яким регресором | Коефіцієнт кореляції з відгуком |
|-----------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| x_2 | 0 | з усіма | 0,915777 |
| x_3 | 0 | з усіма | 0,35802 |
| $z_2 z_3$ | 0 | з усіма | 0,100774 |
| z_2 | 0 | з усіма | 0,0924723 |
| x_1 | 0 | з усіма | 0,0772569 |
| $z_2 x_3$ | 0 | з усіма | 0,0692854 |
| z_3 | 0 | з усіма | 0,0500438 |

З метою одержання адекватних математичних моделей обмеження мінімальної частки розсіювання для коефіцієнтів моделей було вибрано досить малим – 0,001. Тому деякі коефіцієнти моделей під час перевірки за t -критерієм Стьюдента статистично не значущі.

Таблиця 7. Статистичні характеристики коефіцієнтів математичної моделі до задачі 2

| Назва регресора | Коефіцієнт рівняння регресії | Стандартна похибка коефіцієнтів рівняння регресії | Розраховане значення критерію Стьюдента $t^{розр}$ | Частка участі |
|----------------------|------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|---------------|
| x_1 | 5,38125 | 0,272806 | 1,40326 | 0,487808 |
| x_3 | 4,30556 | 0,241601 | 0,994325 | 0,349953 |
| $x_3 x_4 z_5$ | -3 | 0,241601 | 0,4 | 0,0566335 |
| $z_1 x_2 z_3$ | -2,75 | 0,241601 | 0,317543 | 0,0356909 |
| $z_1 x_2 z_5$ | 2,55833 | 0,253394 | 0,30983 | 0,0142586 |
| $z_1 z_2 z_4$ | -3,29444 | 0,31501 | 0,429543 | 0,0225979 |
| Вільний член 54,8944 | | | | |

Таблиця 8. Мультиколінеарність ефектів до задачі 2

| Назва регресора | Максимальний коефіцієнт кореляції | З яким регресором | Коефіцієнт кореляції з відгуком |
|-----------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| x_1 | 0,288675 | $z_1 x_2 z_5$ | 0,698433 |
| x_3 | 0 | з усіма | 0,591569 |
| $x_3 x_4 z_5$ | 0 | з усіма | 0,237978 |
| $z_1 x_2 z_3$ | 0 | з усіма | 0,18892 |
| $z_1 x_2 z_5$ | 0,288675 | x_1 | 0,343746 |
| $z_1 z_2 z_4$ | 0 | з усіма | 0,259527 |

Перевірка гіпотези про адекватність одержаної моделі результатам експерименту проводилася за допомогою F -критерію Фішера. Якщо для моделі $F^{розр} \leq F^{табл}$ при визначеному рівні значущості α (у нас $\alpha = 0,05$), то модель адекватно відображає результати експерименту. Значення $F^{розр}$ і $F^{табл}$ наведено у табл. 3. Обидві одержані математичні моделі є адекватними.

Якість одержаної моделі оцінювалася шляхом визначення множинного коефіцієнта кореляції R і його значущості за F -критерієм.

Множинний коефіцієнт кореляції R показує величину статистичного зв'язку між результатами, розрахованими за рівнянням множинної регресії \hat{y}_j і результатами, одержаними в процесі проведення експерименту \bar{y}_j . Якщо коефіцієнт множинної кореляції R досить близький до одиниці та статистично значущий, тобто $F^{розр} > F^{табл}$ при взятому рівні значущості α , то модель є інформативною і має корисну інформацію про процес, що моделюється.

Під час перевірок одержаних моделей за критерієм Бокса і Веца встановлено, що інформативність першої моделі дуже висока, а другої — висока.

Аналіз мультиколінеарності введених у математичну модель ефектів показав, що у задачі 1 вони всі ортогональні, а у задачі 2 — майже всі. Число обумовленості інформаційної матриці Фішера (cond) дорівнює 1 в задачі 1 і дорівнює 1,35 у задачі 2. Це підтверджує стійкість структури та оцінок коефіцієнтів одержаних рівнянь регресії [8, с. 102–103; 167–168].

За допомогою одержаних математичних моделей можна проаналізувати вплив досліджуваних факторів на значення функції відгуку (критерію якості). Під час аналізу моделей \hat{y}_j необхідно враховувати той факт, що матриця плану експерименту відповідає критерію ортогональності, а ефекти, що увійшли до моделей, є ортогональними. Тому знак і величина коефіцієнтів математичної моделі, записаної в кодованому вигляді (з використанням ортогональних контрастів як незалежних змінних), вказують на напрямок і силу впливу відповідного ефекту на критерій якості, що моделюють. Такі математичні моделі називають *семантичними в інформаційному сенсі*.

Аналіз залишків. Велике значення для оцінювання одержаних математичних моделей мають графіки залишків. Залишками, згідно з їх визначенням, є різниці між значеннями, обчисленими за допомогою одержаної математичної моделі у експериментальних точках, і середніми значеннями в цих точках, одержаними під час експерименту. За своєю суттю вони є величинами, які не можна пояснити за допомогою одержаного рівняння регресії. Під час регресійного аналізу здійснюються деякі припущення стосовно випадкових похибок, а саме, що вони незалежні, мають нульове середнє значення та дисперсію, яка не змінюється, а також підкоряються нормальному закону розподілу [6; 8, с. 157 – 163].

Якщо одержана модель є правильною, то залишки матимуть тенденцію щодо підтвердження наведених вище припущень або хоча б не суперечитимуть їм. У результаті аналізу залишків можемо дійти висновку, що припущення щодо випадкових похибок порушені або ні. У більшості випадків залишки досліджують за допомогою таких їх основних графіків:

- 1) загальний графік розподілу залишків;
- 2) графік залежності залишків від часу, якщо відома послідовність проведення дослідів;
- 3) графік залежності залишків від значень, розрахованих за математичною моделлю в точках факторного простору, в яких здійснювалися досліді.

Якщо в результаті аналізу виявлено порушення в графіках залишків, то це може означати, що насправді порушені припущення регресійного аналізу або неправильно вибрано часткову структуру рівняння математичної моделі.

На основі аналізу вказаних графіків можна стверджувати, що залишки підкоряються нормальному або наближеному до нього закону розподілу, що свідчить на користь якості одержаних моделей. Залишки незалежні від часу проведення дослідів; функціональний зв'язок між залишками та величиною відгуку відсутній.

Використовуючи одержані моделі \hat{y}_j , можна суто математичними методами знайти найвигідніше поєднання змінних факторів (у межах проведених досліджень), що дає змогу оптимізувати процес або керувати ним.

Багатокритеріальна оптимізація за результатами досліджень. Розв'язанням задач оптимізації складних технологічних і технічних систем притаманна істотна специфіка, зумовлена прикладною спрямованістю одержаних розв'язків; відсутністю інформації про механізми явищ або процесів, що відбуваються в системі; значною кількістю показників якості (критеріїв оптимальності) і факторів, які беруть участь в оптимізації та моделюванні; випадковим характером зміни критеріїв оптимальності та деяких факторів. Раніше були вибрані критерії якості y_1, y_2 .

Якщо задають кількість критеріїв оптимізації більше ніж один, то їх спільні значення вибирають, використовуючи принцип компромісу за Парето [7, 11]:

$$Y[x_1, x_2, \dots, x_k] = Y[y_1 = \min; y_2 = \max; y_{3\min} \leq y_3 \leq y_{3\max}, \dots] = opt,$$

де Y – узагальнений критерій оптимальності об'єкта оптимізації, одержаний шляхом використання принципу компромісу за Парето.

Ідея компромісу за Парето полягає в пошуку таких умов функціонування системи, за якими узагальнений критерій оптимальності її досягає екстремального значення.

Узагальнений критерій оптимальності

$$Y = f[y_{1cm}, y_{2cm}, \dots, y_{ncm}] = extr,$$

де $y_{1cm}, y_{2cm}, \dots, y_{ncm}$ – стандартизовані значення критеріїв якості. Останні можна визначити за формулою:

$$y_{lcm} = \frac{[y_{lu} - y_{l\min}]}{[y_{l\max} - y_{l\min}]},$$

де y_{lu} – значення функції відгуку при l -м поєднанні умов функціонування системи; $y_{l\min}$ – мінімальне з усіх результатів значення l -ої функції відгуку; $y_{l\max}$ – максимальне з усіх результатів значення l -ої функції відгуку.

Легко довести, що $0 \leq y_{lcm} \leq 1$. Отже, будь-яку функцію відгуку зводять до сегмента $[0, 1]$ і виражають стандартизованим значенням y_{lcm} у просторі функцій відгуків.

Цей простір являє собою куб розмірності n , ребра якого складають стандартизовані значення критеріїв якості як система ортогональних координат. Кожне ребро куба є одним із значень $0 \leq y_{lcm} \leq 1$. За оптимальне значення $Y = opt$ беруть таку точку $1 \leq u \leq N$ з простору функцій відгуків, яка буде найближчою до ідеальної комбінації значень цих відгуків.

Враховуючи, що в загальному випадку до відгуків ставлять вимоги екстремальності, тобто відповідність відгуку максимуму або мінімуму, ідеальному поєднанню вимог буде відповідати одна з вершин куба, що розглядають, для якої ці вимоги виконуються. Компроміс за Парето виконуватиметься для такої точки, відстань від якої до зазначеної вершини буде мінімальною.

У зв'язку з тим, що в нашій задачі проводимо багатокритеріальну оптимізацію тільки за двома критеріями якості (спрацьовування EI та продуктивність Π), можемо виконати графічний аналіз одержаних результатів та графічно визначити точку оптимуму. У табл. 9 наведено результати експериментів у натуральних та нормованих значеннях [0, 1].

Таблиця 9. Результати проведених експериментів у натуральних та нормованих значеннях і значення узагальненого критерію якості

| Номер досліджу | \bar{y}_1 | \bar{y}_2 | \bar{y}_1 норм | \bar{y}_2 норм | D_1 | D_2 | $Y_{узг}$ | |
|----------------------|-------------|-------------|------------------|------------------|-------|-------|-----------|--|
| 1 | 46,5 | 45,5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,50 | |
| 2 | 48,5 | 50,0 | 0,024 | 0,220 | 0,02 | 0,78 | 0,50 | |
| 3 | 51,0 | 52,5 | 0,054 | 0,341 | 0,05 | 0,66 | 0,50 | |
| 4 | 78,5 | 46,5 | 0,381 | 0,049 | 0,38 | 0,95 | 0,31 | |
| 5 | 80,5 | 50,5 | 0,405 | 0,244 | 0,40 | 0,76 | 0,32 | |
| 6 | 84,0 | 51,0 | 0,446 | 0,268 | 0,45 | 0,73 | 0,31 | |
| 7 | 101,0 | 47,5 | 0,649 | 0,098 | 0,65 | 0,90 | 0,18 | |
| 8 | 101,0 | 49,5 | 0,649 | 0,195 | 0,65 | 0,80 | 0,20 | |
| 9 | 105,5 | 57,5 | 0,702 | 0,585 | 0,70 | 0,41 | 0,33 | |
| 10 | 58,0 | 51,0 | 0,137 | 0,268 | 0,14 | 0,73 | 0,45 | |
| 11 | 59,0 | 51,0 | 0,149 | 0,268 | 0,15 | 0,73 | 0,45 | |
| 12 | 63,0 | 61,5 | 0,196 | 0,780 | 0,20 | 0,22 | 0,56 | |
| 13 | 96,0 | 50,5 | 0,589 | 0,244 | 0,59 | 0,76 | 0,24 | |
| 14 | 99,0 | 57,5 | 0,625 | 0,585 | 0,63 | 0,41 | 0,35 | |
| 15 | 100,5 | 60,5 | 0,643 | 0,732 | 0,64 | 0,27 | 0,41 | |
| 16 | 111,0 | 48,5 | 0,768 | 0,146 | 0,77 | 0,85 | 0,14 | |
| 17 | 113,0 | 56,0 | 0,792 | 0,512 | 0,79 | 0,49 | 0,28 | |
| 18 | 115,0 | 61,0 | 0,815 | 0,756 | 0,82 | 0,24 | 0,39 | |
| 19 | 70,5 | 52,5 | 0,286 | 0,341 | 0,29 | 0,66 | 0,40 | |
| 20 | 70,5 | 61,0 | 0,286 | 0,756 | 0,29 | 0,24 | 0,52 | |
| 21 | 75,0 | 64,5 | 0,339 | 0,927 | 0,34 | 0,07 | 0,57 | |
| 22 | 95,5 | 56,0 | 0,583 | 0,512 | 0,58 | 0,49 | 0,33 | |
| 23 | 96,0 | 61,5 | 0,589 | 0,780 | 0,59 | 0,22 | 0,44 | |
| 24 | 97,5 | 64,5 | 0,607 | 0,927 | 0,61 | 0,07 | 0,50 | |
| 25 | 124,0 | 49,5 | 0,923 | 0,195 | 0,92 | 0,80 | 0,10 | |
| 26 | 127,0 | 52,5 | 0,958 | 0,341 | 0,96 | 0,66 | 0,17 | |
| 27 | 130,5 | 66,0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0 | 0,50 | |
| Мінімальне значення | 46,5 | 45,5 | | | | | | |
| Максимальне значення | 130,5 | 66,0 | | | | | | |

На рис. 1 показана множина точок ($N = 27$) в просторі параметрів $\bar{y}_{1\text{норм}}$ – продуктивність обробки ($\Pi = \max$), $\bar{y}_{2\text{норм}}$ – спрацьовування електрод-інструмента ($J = \min$).

Найкращий компромісний результат (компромiс за Парето [7]) позначений хрестиком і відповідає досліді № 25 у табл. 9 (позначений жирним шрифтом). Ця точка з координатами $\bar{y}_{1\text{норм}} = 0,923$, $\bar{y}_{2\text{норм}} = 0,195$ найближча до ідеальної точки з координатами $\bar{y}_{1\text{норм}} = 1$, $\bar{y}_{2\text{норм}} = 0$.

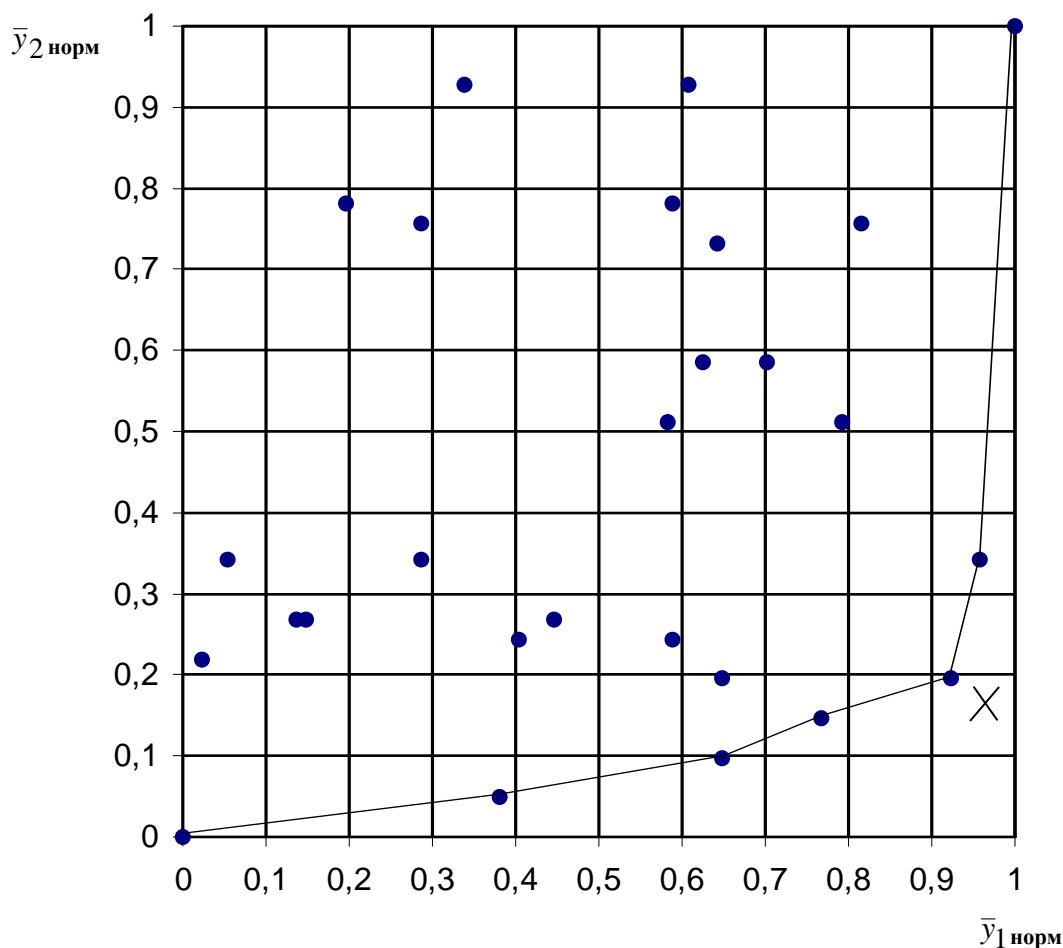


Рис. 1. Множина ($N=27$) точок у просторі параметрів $\bar{y}_{1\text{норм}}$ – продуктивність обробки, $\bar{y}_{2\text{норм}}$ – знос електрод-інструмента

Пошук оптимального значення за результатами експерименту. У випадку, якщо у нас більше, ніж два критерія якості, за якими проводимо багатокритеріальну компромісну оптимізацію, дуже важко визначити оптимальну точку за допомогою графоаналітичного методу.

Тоді будується цільова функція, яка має вигляд:

$$y_{\text{узаг } r} = \sqrt{\sum_{j=1}^m [1 - D_{jr}]^2 \times W_j^2},$$

де $y_{\text{узаг } r}$ – значення узагальненої цільової функції для r -го досліді експерименту, яка у випадку пошуку оптимального прагне до 0 ($y_{\text{узаг } r} \rightarrow 0$) і є оцінкою близькості цієї точки до гіпотетичного оптимального значення, що

дорівнює 1; D_{jr} – зведене до інтервалу 0...1 значення j -го відгуку (критерію якості) у r -му досліді експерименту, залежно від обраної для певного критерію якості мети це значення обчислюють за різними формулами; W_j – вага j -го критерію якості (відгуку); m – кількість критеріїв якості (відгуків).

Значення D_{jr} обчислюють за допомогою таких формул:

а) метою j -го критерію якості (відгуку) є МАКСИМУМ

$$D_{jr} = 1 - \frac{y_{j \max} - y_{jr}}{y_{j \max} - y_{j \min}},$$

де $y_{j \max}$ і $y_{j \min}$ — відповідно максимальне та мінімальне значення j -го критерію якості (відгуку) серед N дослідів (пробних точок);

б) метою j -го критерію якості (відгуку) є МІНІМУМ

$$D_{jr} = 1 + \frac{y_{j \min} - y_{jr}}{y_{j \max} - y_{j \min}};$$

в) метою j -го критерію якості (відгуку) є ІНТЕРВАЛ

$$D_{jr} = \begin{cases} 1 - 2 \left| \frac{y_{jc} - y_{jr}}{y_{j \text{ВГ}} - y_{j \text{НГ}}} \right| & \text{при } y_{jr} \in [y_{j \text{НГ}}, y_{j \text{ВГ}}] \\ 0 & \text{при } y_{jr} > y_{j \text{ВГ}} \text{ або } y_{jr} < y_{j \text{НГ}} \end{cases},$$

де $y_{j \text{НГ}}$ і $y_{j \text{ВГ}}$ – відповідно нижні та верхні межі заданого інтервалу; y_{jc} - середина заданого інтервалу для j -го критерію якості (відгуку).

Результати розрахунку узагальненого критерію якості наведено в табл. 9. Із таблиці видно, що найменше значення (0,10) узагальненого критерію якості відповідає 25 досліді, в якому реалізовані параметри і є оптимальними. Це значення узагальненого критерію якості є, по суті, відстанню точки факторного простору, що відповідає 25 досліді, до гіпотетичної найкращої точки.

Отже, у нашому випадку згідно з одержаними експериментальними даними, оптимальне поєднання значень рівнів факторів, що впливають на критерії якості, які досліджуються, є таким:

$$X_1 = P_E = 0,5 \text{кГс} / \text{см}^2;$$

$$X_2 = I_E = 26 \text{А};$$

$$X_3 = f_E = 4 \text{кГц};$$

$$X_4 = U_E = 90 \text{В};$$

$$X_5 = W_E = 80 \text{В}.$$

При такому поєднанні рівнів факторів середнє значення за результатами повторних дослідів продуктивності ЕЕО складало $\Pi = 124 \text{мм}^3 / \text{хв}$, а спрацьовування $EI - J = 49,5\%$.

У деяких випадках обчислюють ефективність одержаного оптимального значення за формулою

$$y_{\text{ефект}} = 1 - y_{\text{узг}}.$$

Ефективність знайденої оптимальної точки у нашому випадку дорівнює 0,9. Це досить добре, якщо врахувати, що найкраще теоретичне значення ефективності дорівнює 1.

Пошук оптимального значення за математичними моделями. Під час розв'язання реальної прикладної задачі провести натурний експеримент у всіх точках факторного простору не завжди можна, бо є обмеження в ресурсах і часі. У зв'язку з цим для пошуку найоптимальнішої точки на основі експериментальних даних будують багатофакторні математичні моделі критеріїв якості та проводять багатокритеріальну компромісну оптимізацію (за Парето) за цими моделями.

При оптимізації моделей найчастіше використовують алгоритм випадкового пошуку на основі ЛП_т рівномірно розподілених випадкових точок. Алгоритм пошуку оптимальної точки у факторному просторі виглядає таким чином.

Крок 1. Генерація випадкових ЛП_т рівномірно розподілених точок у одиничному гіперкубі. Кількість точок, що генеруються, вибирають на базі наступної формули [13]:

$$N = \frac{\ln(1 - P_{\text{ОПТ}})}{1 - G_{\text{ОПТ}}},$$

де $P_{\text{ОПТ}}$ – ймовірність виявлення оптимуму, а $G_{\text{ОПТ}}$ – частка простору, в якій знаходиться оптимум. При цьому робимо припущення (яке перевірене під час розв'язання реальних задач), що в загальному випадку із зростанням вимірності простору пошуку $G_{\text{ОПТ}}$ зменшується. Значення $G_{\text{ОПТ}}$ для реальних задач обирає фахівець на основі аналізу розв'язуваної задачі.

Крок 2. Формування матриці пробних точок у натуральних значеннях на основі одержаної на кроці 1 даного алгоритму матриці ЛП_т рівномірно розподілених випадкових точок згідно з формулами, наведеними в [11].

Крок 3. Розрахунок значень критеріїв якості за моделями на основі одержаної на кроці 2 цього алгоритму матриці натуральних значень.

Крок 4. Розрахунок узагальненого критерію якості $y_{\text{узг}}$.

Крок 5. Пошук найменшого значення обчисленого у кожній пробній точці узагальненого критерію якості, якому відповідає максимальне значення $y_{\text{ефект}}$. Точка факторного простору, якій відповідає найменше значення узагальненого критерію якості, є оптимальною, а відповідний рядок з матриці натуральних значень є оптимальними значеннями параметрів (факторів), що впливають (у нашому випадку) на технологічний процес.

У зв'язку з тим, що одержання математичних моделей критеріїв якості, а також розрахунок за цими моделями значень критеріїв якості у пробних точках є трудомістким, для цієї мети використовують ПЗ ПРИАМ. Умови пошуку оптимуму наведено у табл. 10, а результати – у табл. 11, 12.

Таблиця 10. Мета, вагові коефіцієнти та обмеження критеріїв якості (відгуків)

| Ім'я критерію якості | Мета | Вага \hat{y}_i | Обмеження |
|----------------------|----------|------------------|-----------|
| \hat{y}_1 | МАКСИМУМ | 0,5 | — |
| \hat{y}_2 | МІНІМУМ | 0,5 | — |

Таблиця 11. Узагальнена таблиця результатів (за моделями)

| Позначення точок | 1-ша точка | 2-га точка | 3-тя точка |
|-----------------------------------------------------------|------------|------------|------------|
| Ефективність $y_{\text{ефект}}$ | 0,873564 | 0,832543 | 0,819379 |
| Значення критеріїв якості (відгуків) у оптимальних точках | | | |
| \hat{y}_1 | 106,782 | 106,170 | 114,856 |

| | | | |
|---------------------------------------------|----------|----------|--------|
| \hat{y}_2 | 45,145 | 49,047 | 51,498 |
| Фактори та їх значення в оптимальних точках | | | |
| P_E | 0,503906 | 0,601563 | 0,5625 |
| I_E | 25,9688 | 24,5625 | 25,5 |
| f_E | 2,61719 | 2,73438 | 3,375 |
| U_E | 72,9688 | 51,5625 | 62,5 |
| W_E | 82,0313 | 87,8125 | 67,5 |

Таблиця 12. Мінімальні та максимальні значення критеріїв якості, що розраховані за моделями

| Ім'я критерію якості | Значення критерію якості | |
|----------------------|--------------------------|----------|
| | Мінімум | Максимум |
| \hat{y}_1 | 50,413 | 125,783 |
| \hat{y}_2 | 44,743 | 65,161 |

Здійснена ПЗ ПРИАМ графічна інтерпретація близькості одержаних оптимальних значень критеріїв якості до гіпотетичних найкращих оптимумів у нормованих одиницях для максимуму і мінімуму наведено на рис. 2.

На рисунку чітко видно, що в компромісній найкращій точці продуктивність праці (I) приблизно на 25 % менша найкращої, яка можлива за даних умов (I має бути максимальною, тобто в нормованих одиницях дорівнювати 1). Що стосується спрацьовування ЕІ (J), то у цій же точці воно більше найменшого значення (спрацьовування ЕІ має бути мінімальним і прагнути досягти нуля у нормованих одиницях) приблизно на 2 %.

Тут слушно зауважити, що у випадку призначення критеріям якості інших вагових коефіцієнтів буде одержано іншу компромісну оптимальну точку.

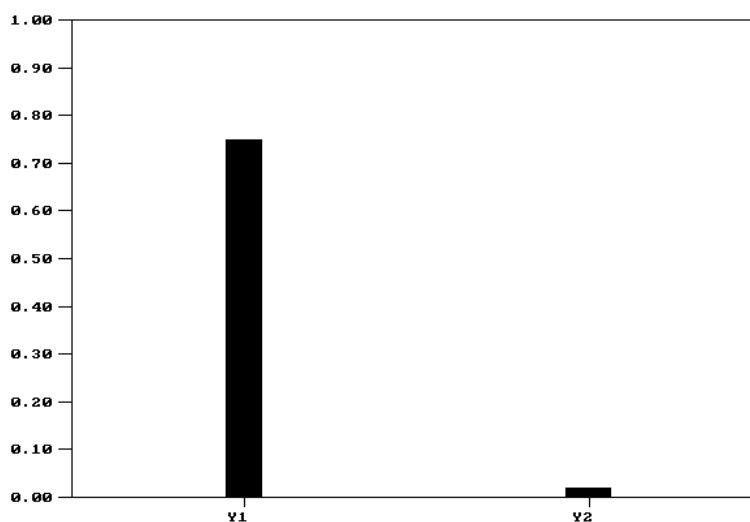


Рис. 2. Відносні значення критеріїв якості в оптимальній компромісній точці при багатокритеріальній оптимізації за моделями

Таким чином, у результаті проведеної з використанням одержаних математичних моделей багатокритеріальної (компроміс за Парето) оптимізації було знайдено найоптимальніше поєднання рівнів факторів, що впливають на критерії якості:

$$X_1 = P_E = 0,504 \text{кГс} / \text{см}^2;$$

$$X_2 = I_E = 25,969 \text{А};$$

$$X_3 = f_E = 2,617 \text{кГц};$$

$$X_4 = U_E = 72,969 \text{В};$$

$$X_5 = W_E = 82,031 \text{В}.$$

При цьому критерії якості дорівнюють: $\hat{y}_1 = \Pi = 1066782 \text{мм}^3 / \text{хв}$, $\hat{y}_2 = J = 45,145\%$. Одержаний режим був перевірений у виробничих умовах і може бути рекомендований для прощиття отвору у сталі 1Х12СЮ на верстаті 4Г721М.

Висновки і перспективи подальшого розвитку

1. Викладено системний підхід в інформаційному забезпеченні розробки технологічних процесів шляхом отримання багатфакторних статистичних моделей і багатокритеріальної компромісної оптимізації.
2. Отримані математичні моделі дозволяють встановити причинні, структурні та кількісні зв'язки між вихідним комплексом технічних умов реалізації технологічного процесу і групою критеріїв якості виробу, що виготовляють. Моделі відповідають критерію семантичності в інформаційному сенсі, їх можна використовувати для прогнозу, оптимізації, вивчення механізмів явищ, котрі відбуваються.
3. Багатокритеріальна (компроміс за Парето) оптимізація дає змогу одержати найдоцільніші об'єктивно можливі технологічні, технічні, економічні та інші критерії якості технологічних систем або продукції, яку вони виробляють.
4. Запропоновану інформаційну технологію, алгоритмічне та програмне забезпечення можна використовувати для вдосконалення технічних, вимірвальних, матеріалознавчих та інших складних систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. – М.: Наука, 1976. – 224 с.
2. Глазков А.В. Размерная электрическая обработка металлов: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1978. – 336 с.
3. Дружинин В.В., Конторов Д.С. Системотехника. – М.: Радио и связь, 1985. – 200 с.
4. Золотых Б.И. Основные вопросы теории электрической эрозии в импульсном разряде в жидкой диэлектрической среде: Автореф. дис. ... д-ра. техн. наук / Моск. ин-т электрон. машиностроения. – М.: МИЭМ, 1968.
5. Планирование, регрессия и анализ моделей PRIAM (ПРИАМ). SCMC-90; 325, 660, 668 // Каталог. Программные продукты Украины. Catalog. Software of Ukraine. – К.: СП "Текнол", 1993. – С. 24 – 27.
6. Лапач С.Н., Чубенко А.В., Бабиц П.Н. Статистические методы в медико-биологических исследованиях с использованием Excel. – К.: МОРИОН, 2000. – 320 с.
7. Подиновский В.Д., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
8. Радченко С.Г. Математическое моделирование технологических процессов в машиностроении. – К.: ЗАО "Укрспецмон-тажпроект", 1998. – 274 с.
9. Радченко С.Г., Добрянский С.С. Методические рекомендации по самостоятельному изучению дисциплины "Основы научных исследований и технического творчества", "Оптимизация и моделирование технологических процессов и объектов в машиностроении" для студентов специальности "Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты" и слушателей ФПК. – К.: КПИ, 1987. – 68 с.
10. Радченко С.Г., Добрянский С.С., Приходько В.П. Методические указания к выполнению курсовой работы по дисциплине "Основы научных исследований и технического творчества" для студентов специальности "Технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты". – К.: КПИ, 1984. – 35 с.
11. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. – М.: Наука, 1981. – 111 с.
12. Фотеев Н.К. Технология электроэрозионной обработки. – М.: Машиностроение, 1980. – 184 с.
13. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практ. руководство: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 238 с.

