ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2013. Вып. 43

УДК 531.38, 531.36

 А.Е. Позднякович, В.Е. Пузырев

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ ГИРОСКОПА ЛАГРАНЖА С ВНУТРЕННИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассмотрена задача о пассивной стабилизации вращений вокруг вертикали гироскопа Лагранжа с двумя упруго закрепленными внутренними элементами, совершающими относительное плоско-параллельное движение в плоскости, перпендикулярной оси динамической симметрии. Получены условия устойчивости изучаемого движения по первому приближению. Показано, что колебательное движение присоединенных элементов может стабилизировать неустойчивое вращение гироскопа. Система при этом совершает четырехчастотные колебания, в то время как тело с "вмороженными" элементами – одночастотное; соответствующие уравнения движения имеют положительный характеристический показатель Ляпунова.

Ключевые слова: *пассивная стабилизация, присоединенные массы, критерий Покровского.*

1. Предварительные замечания. Рассмотрим консервативную механическую систему с n позиционными и l циклическими координатами. $\Pi(\boldsymbol{q})$– потенциальная энергия этой системы. Ее кинетическая энергия может быть записана в виде

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\dot{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{r}}^T\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{r}} = \\ &= \frac{1}{2}\langle\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} + \widetilde{\boldsymbol{B}}^T(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{q}}\rangle + \frac{1}{2}\langle\widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{r}},\dot{\boldsymbol{r}}\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ – векторы обобщенных координат; $\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{C}}$ – квадратные, симметрические, положительно-определенные матрицы; $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ – прямоугольная матрица размерности $l\times n$. Предполагаем, что все три матрицы имеют непрерывные частные производные второго порядка; верхний индекс T обозначает транспонирование, угловые скобки – скалярное произведение.

Выразим вектор циклических скоростей $\dot{\boldsymbol{r}}$ из равенства $\widetilde{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{q}}+\widetilde{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\beta}$– циклическая постоянная) и запишем функцию Рауса

$$R = K - \dot{\boldsymbol{r}}^T\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T[\widetilde{\boldsymbol{A}} - \widetilde{\boldsymbol{B}}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}]\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{\beta}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{q}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\boldsymbol{\beta}.$$

Введем обычным образом [1] кинетический потенциал Рауса

$$L_R = R - \Pi = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} - W(\boldsymbol{q}), \tag{2}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \widetilde{\boldsymbol{A}} - \widetilde{\boldsymbol{B}}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}, \qquad W = \Pi + \frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\widetilde{\boldsymbol{C}}^{-1}\boldsymbol{\beta}, \tag{3}$$

W – приведенная потенциальная энергия. Подставляя соответствующие выражения в уравнения Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_R}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L_R}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0},$$

приходим к следующей форме записи

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} + (\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{D}^1(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}}, \ldots, \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{D}^n(\boldsymbol{q})\ \dot{\boldsymbol{q}})^T + \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}, \qquad (4)$$

элементы квадратной матрицы $\boldsymbol{D}^s$ $(s = \overline{1,n})$ определяются по формулам

$$d^s_{jk} = a^j_{sk} + a^k_{sj} - a^s_{jk} \ \ (j \neq k), \qquad d^s_{jj} = a^j_{sj} - \frac{1}{2}a^s_{jj}, \qquad j, s, k = \overline{1,n}.$$

Очевидно, что стационарные движения $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0$ рассматриваемой механической системы определяются условием

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{q}} = 0. \qquad (5)$$

Соответствующие уравнения в вариациях можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}_0\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{G}_0\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{W}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad (6)$$

где $\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}_0)$, $\quad \boldsymbol{G}_0 = \Big(\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{q}}^T - \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{q}}\Big)\Big|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0}$, $\quad \boldsymbol{W}_0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{q}^2}\Big|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0}$.

Необходимым и достаточным условием устойчивости линейного уравнения (6) является[1] отсутствие у характеристического многочлена

$$F(\lambda) = \det(\boldsymbol{A}_0\lambda^2 + \boldsymbol{G}_0\lambda + \boldsymbol{W}_0)$$

корней с ненулевой вещественной частью (матрица $\boldsymbol{G}_0$ – кососимметрическая). В частности, обозначая $\Lambda = \lambda^2$, при $n = 4$ получаем уравнение

$$M_1\Lambda^4 + 4M_2\Lambda^3 + 6M_3\Lambda^2 + 4M_4\Lambda + M_5 = 0. \qquad (7)$$

Коэффициенты M_j $(j = \overline{1,5})$ известным образом выражаются через элементы матриц $\boldsymbol{A}_0$, $\boldsymbol{G}_0$, $\boldsymbol{W}_0$. Для устойчивости уравнения (6) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (7) имело четыре отрицательных корня. Соответствующие условия можно получить в результате комбинированного применения критерия Покровского [3, 4]

$$M_4^2 - M_3M_5 > 0,\ 12(M_4^2 - M_3M_5)^2 - M_5^2(M_1M_5 - 4M_2M_4 + 3M_3^2) > 0, \quad (8)$$

[1] Предполагаем, что отсутствуют кратные корни.

$$(M_1M_5-4M_2M_4+3M_3^2)^3-27(M_1M_3M_5+2M_2M_3M_4-M_1M_4^2-M_2^2M_5-M_3^3)^2>0$$

и критерия Рауса–Гурвица

$$M_j>0 \quad (j=\overline{1,5}), \qquad 6M_2M_3M_4-M_1M_4^2-M_5M_2^2>0. \tag{9}$$

Условия (8) обеспечивают существование четырех вещественных корней, а неравенства (9) – наличие у них четырех отрицательных вещественных частей. Если хотя бы одно из девяти неравенств (8), (9) имеет противоположный знак, то решения уравнения (6) – неустойчивы: имеется характеристический корень с положительной вещественной частью.

2. Постановка задачи. Исходные соотношения. Рассмотрим абсолютно твердое тело, имеющее неподвижную точку O и находящееся в поле силы тяжести. Введем в рассмотрение две системы координат: инерциальную $Oxyz$ и связанную с телом $Ox_1y_1z_1$. Предполагаем, что центр масс O_0 тела принадлежит оси Ox_1; $|OO_0|=l_0$. В качестве обобщенных координат, определяющих положение связанной системы координат относительно неподвижной, выберем углы Эйлера θ, φ, ψ, которые вводятся обычным образом [1]. С целью избежать особенностей при изучении равномерных вращений [1, с. 358] в качестве основных осей выбираем Oz и Ox_1. Параллельно осям Oy_1, Oz_1 в теле с помощью телескопических шарниров упруго закреплены два внутренних элемента, каждый из которых представляет собой пару материальных точек массой m_j, жестко соединенных невесомым стержнем N_jN_{j+1} длиной $2R_j$ $(j=1,2)$. Оси шарниров пересекают Ox_1 в точках O_1, O_2, при этом $|OO_1|=l_1$, $|OO_2|=l_2$. При недеформированном состоянии пружины массы равноудалены от Ox_1.

Обозначим через $\boldsymbol{r}_j$ радиус–вектор точки N_j $(j=\overline{1,4})$, тогда

$$\boldsymbol{r}_j=\big(l_1,(-1)^{j+1}R_1+R_1u_1,0\big)^T,\ j=1,2;$$

$$\boldsymbol{r}_j=\big(l_2,0,(-1)^{j+1}R_2+R_2u_2\big)^T,\ j=3,4.$$

Здесь u_1,u_2 – относительные смещения присоединенных элементов. Учитывая формулу $\boldsymbol{v}_j=\acute{\boldsymbol{r}}_j+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_j$ для скорости точки N_j $(j=\overline{1,4})$, где $\acute{\boldsymbol{r}}_j$ означает относительную производную по времени, запишем выражение для кинетической энергии присоединенных элементов:

$$K^+=m_1R_1^2(1+u_1)^2\omega_1^2+d^2m_1\omega_2^2+m_1(d^2+R_1^2(1+u_1)^2)\,\omega_3^2-$$

$$-m_1R_1(2\,d\,\omega_1\omega_2(1+u_1)-2\,d\,\omega_3\dot{u}_1-R_1\dot{u}_1^2)+$$

$$+m_2R_2^2(1+u_2)^2\omega_1^2+d^2m_2\omega_3^2+m_2(d^2+R_2^2(1+u_2)^2)\omega_2^2-$$

$$-m_2R_2(2\,d\,\omega_1\omega_3(1+u_2)+2\,d\,\omega_2\dot{u}_2-R_2\dot{u}_2^2).$$

Обобщенный тензор инерции системы можно записать в виде $\tilde{\boldsymbol{J}} = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}^+$, где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \boldsymbol{J}_3)-$ тензор инерции носителя, $\boldsymbol{J}^+-$ "присоединенный" тензор инерции носимых элементов

$$\boldsymbol{J}^+ = \begin{pmatrix} J_1^+ & -2m_1 l_1 R_1 u_1 & -2m_2 l_2 R_2 u_2 \\ -2m_1 l_1 R_1 u_1 & J_2^+ & 0 \\ -2m_2 l_2 R_2 u_2 & 0 & J_3^+ \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$J_1^+ = 2[m_1 R_1^2 (1+u_1^2) + m_2 R_2^2 (1+u_2^2)], \quad J_2^+ = 2\{m_1 l_1^2 + m_2 [l_2^2 + R_2^2 (1+u_2^2)]\},$$
$$J_3^+ = 2\{[m_2 l_2^2 + m_1 [l_1^2 + R_1^2 (1+u_1)^2)]\}.$$

Потенциальными силами в системе являются сила тяжести и силы упругости в шарнирах, поэтому для потенциальной энергии имеем

$$\Pi = g[(m_0 l_0 + 2(m_1 l_1 + m_2 l_2)) \sin\theta \sin\varphi + 2\,(m_1 R_1 u_1 \cos\varphi \sin\theta + m_2 R_2 u_2 \cos\theta)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\varkappa_1 R_1^2\,(u_1 - \tilde{u}_{10})^2 + \frac{1}{2}\varkappa_2 R_2^2\,(u_2 - \tilde{u}_{20})^2.$$

Здесь m_0 – масса тела, $\varkappa_1, \varkappa_2$ – жесткости пружин, постоянные $\tilde{u}_{10}$, $\tilde{u}_{20}$ соответствуют состоянию покоя балансиров (пружины не деформированы).

Проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной системы координат определяются [1] кинематическими соотношениями Эйлера

$$\omega_1 = \dot\theta \cos\varphi + \dot\psi \sin\theta \sin\varphi, \quad \omega_2 = -\dot\theta \sin\varphi + \dot\psi \sin\theta \cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta. \tag{11}$$

Подставим (11) в выражение для кинетической энергии и воспользуемся результатами п. 1 для записи уравнений движения. Перейдем вначале к безразмерным величинам по формулам

$$a = \frac{J_1}{\widetilde{J}_3}, \;\; c = 1 + \frac{J_2 - J_3}{\widetilde{J}_3}, \;\; \mu_j = \frac{2m_j R_j^2}{\widetilde{J}_3}, \; p = \frac{l_0(m_0 l_0 + 2m_1 l_1 + 2m_2 l_2)}{\widetilde{J}_3}, \tau = \omega t, \tag{12}$$

$$\delta = \frac{g}{l_0 \omega^2}, \; s_j = \frac{l_j}{R_j}, \; \eta_j = \frac{l_0}{R_j}, \; \kappa_j = \frac{\varkappa_j}{m_j \omega^2}, \; j = 1,2; \; \widetilde{J}_3 = J_3 + 2m_1 l_1^2 + 2m_2 l_2^2,$$

ω – некоторая постоянная (произвольная, не нулевая), будет выбрана ниже. Тогда

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{a}_{jk}) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & -\mu_2 s_2 u_2 \cos\varphi & 0 & \mu_2 s_2 \sin\varphi \\ -\mu_2 s_2 u_2 \cos\varphi & 1 + \mu_1(1+u_1^2) & \mu_1 s_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 s_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 s_2 \sin\varphi & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{a}_{11} = [a + \mu_1(1+u_1^2)]\cos^2\varphi + c\sin^2\varphi + \mu_2(1+u_2^2) + \mu_1 s_1 u_1 \sin 2\varphi,$$

$$\widetilde{b}_{11} = \sin\theta\ \{[\frac{a-c}{2} + \mu_1(1+u_1^2)]\sin 2\varphi - \mu_1 s_1 u_1 \cos 2\varphi\} - \mu_2 s_2 u_2 \cos\theta\cos\varphi,$$
$$\widetilde{b}_{12} = \cos\theta\ [1 + \mu_1(1+u_1^2)] - \mu_2 s_2 u_2 \sin\theta\sin\varphi, \tag{13}$$
$$\widetilde{b}_{13} = \mu_1 s_1 \cos\theta, \quad \widetilde{b}_{14} = \mu_2 s_2\ sin\theta\cos\varphi,$$
$$\widetilde{c}_{11} = \sin^2\theta\ [a + \mu_1(1+u_1^2)\sin^2\varphi + c\cos^2\varphi + \mu_2(1+u_2^2) - \mu_1 s_1 u_1 \sin 2\varphi] +$$
$$+ \cos^2\theta[1 + \mu_1(1+u_1^2)] - \mu_2 s_2 u_2 \sin 2\theta \sin\varphi.$$

Приведенная потенциальная энергия системы выражается по формуле

$$W = \delta[\sin\theta(p\sin\varphi + \mu_1\eta_1 u_1\cos\varphi) + \mu_2\eta_2 u_2\cos\theta] + \frac{1}{2}(\mu_1\kappa_1 u_1^2 + \mu_2\kappa_2 u_2^2 + \beta^2/\widetilde{c}_{11}).$$

Нахождение всех стационарных движений системы, т. е. решение векторного уравнения (5), представляется достаточно сложным, и мы ограничимся частным случаем $\theta = \pi/2, \varphi = \pi/2$ (ось Ox_1 совпадает с вертикалью). Тогда

$$\operatorname{grad} W = (-\mu_2 u_2[\eta_2 + \frac{s_2\beta^2}{\sigma^2}], -\mu_1 u_1[\eta_1 + \frac{s_1\beta^2}{\sigma^2}], \mu_1 u_1[\kappa_1 - \frac{\beta^2}{\sigma^2}], \mu_2 u_2[\kappa_2 - \frac{\beta^2}{\sigma^2}]),$$

$\sigma = a + \mu_1(1+u_1^2) + \mu_2(1+u_2^2)$. Выражения $\eta_j + s_j\beta^2/\sigma^2$ $(j = 1, 2)$, очевидно, положительны, поэтому для выполнения условия (5) необходимо и достаточно, чтобы $u_1 = 0,\ u_2 = 0$. Получаем стационарное движение

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \tag{14}$$

которое описывает равномерные вращения твердого тела вокруг главной оси, несущей центр масс; присоединенные массы покоятся относительно носителя. При этом значению угловой скорости ω соответствует значение циклической постоянной $\beta = a + \mu_1 + \mu_2$.

Найдем условия устойчивости движения (14) по первому приближению. Переходя к возмущениям

$$\theta = \frac{\pi}{2} + x_1, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + x_2, \quad u_1 = x_3, \quad u_2 = x_4,$$

получим систему вида (6), при этом

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}_0) = \begin{pmatrix} c + 2\mu_2 & 0 & 0 & \mu_2 s_2 \\ 0 & 1 + \mu_1 & \mu_1 s_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 s_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 s_2 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \ \widetilde{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{q}_0) = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{A}_0 = \widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{q}_0),$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q}_0) = \begin{pmatrix} 0 & a - c - 1 & -2\mu_1 s_1 & 0 \\ -a + c + 1 & 0 & 0 & 2\mu_2 s_2 \\ 2\mu_1 s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu_2 s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{W}_0 = \begin{pmatrix} a-1+\mu_2-p\delta & 0 & 0 & -\mu_2(\delta\eta_2+s_2) \\ 0 & a-c+\mu_1-p\delta & -\mu_1(\delta\eta_1+s_1) & 0 \\ 0 & -\mu_1(\delta\eta_1+s_1) & \mu_1(\kappa_1-1) & 0 \\ -\mu_2(\delta\eta_2+s_2) & 0 & 0 & \mu_2(\kappa_2-1) \end{pmatrix}.$$

Условия (8), (9), записанные для уравнения (6), коэффициенты которого определяются согласно (15), слишком громоздки для анализа. Поэтому ниже принимаем предположение о симметрии в механической системе:

$$c=1, \quad \mu_1=\mu_2=\mu, \quad s_1=s_2=s, \quad \eta_1=\eta_2=\eta, \quad \kappa_1=\kappa_2=\kappa. \tag{16}$$

Кроме того, как видно из записи $\boldsymbol{W}_0$, для κ естественно ввести переобозначение

$$\kappa-1=\widetilde{\kappa}. \tag{17}$$

Равенства (16) позволяют ввести комплексные переменные

$$x_1+\imath x_2=z_1, \qquad x_4+\imath x_3=z_2$$

и представить характеристический многочлен в виде $F(\lambda) = F(\imath\widetilde{\lambda}) = f(\widetilde{\lambda})f(-\widetilde{\lambda})$, где

$$f(\widetilde{\lambda}) = \det\begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}^2(1+\mu)+\widetilde{\lambda}(2-a)+1-a-\mu+p\delta & \mu(s\widetilde{\lambda}^2+2s\widetilde{\lambda}+\eta\delta+s) \\ \mu(s\widetilde{\lambda}^2+2s\widetilde{\lambda}+\eta\delta+s) & \mu(\widetilde{\lambda}^2-\widetilde{\kappa}) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

3. Условия устойчивости и их анализ. Условия существования у $f(\widetilde{\lambda})$ четырех вещественных корней являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости линеаризованных уравнений движения. Для записи этих условий воспользуемся неравенствами (8). Раскрывая определитель (18), имеем в уравнении (7)

$$\begin{aligned} &M_1 = 1+\mu(1-s^2), \qquad M_2 = (2-a-4\mu s^2)/4, \\ &M_3 = (1-a+p\delta-\mu-6\mu s^2-2\mu s\delta\eta-\widetilde{\kappa}-\mu\widetilde{\kappa})/6, \\ &M_4 = -[(2-a)\widetilde{\kappa}+4\mu s(s+\eta\delta)]/4, \\ &M_5 = k(a-p\delta-1+\mu)-\mu(s+\eta\delta)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Обозначая левые части неравенств (8) через P_1, P_2, P_3 соответственно, находим

$$P_1 = \widetilde{\kappa}[\widetilde{\kappa}(3a^2-4a+4-8p\delta)+8(p\delta+1-a)^2]+8\mu[\widetilde{\kappa}^2(a-p\delta)+$$

$$+\widetilde{\kappa}(2s\eta\delta-2-\eta^2\delta^2-2s\eta p\delta^2-2p\delta-as\eta\delta+2a+3as^2-s^2-6s^2p\delta)+(1-a+p\delta)(s+\eta\delta)^2]+$$

$$+8\mu^2[\widetilde{\kappa}^2(a-p\delta)+\widetilde{\kappa}(1+5s^2-\eta^2\delta^2)-(2s\eta\delta+1)(s+\eta\delta)^2],$$

$$P_2 = \frac{\widetilde{\kappa}^2}{64}[\widetilde{\kappa}^2(a^2-4p\delta)(3a^2-8a+8-4p\delta)-32\widetilde{\kappa}(a-1-p\delta)^3+16(a-1-p\delta)^4]+O(\mu),$$

$$64P_3 = \widetilde{\kappa}(a^2-4p\delta)[\widetilde{\kappa}^2-\widetilde{\kappa}(a^2-2a+2-2p\delta)+(a-1-p\delta)^2]^2+$$
$$+\mu\langle -s(1+\eta\delta)^2(a^2-4p\delta)(a-1-p\delta)^3+\widetilde{\kappa}\{4(a-p\delta-1)^3[2a^2-a(2p\delta+1)+p^2\delta^2-3]+$$
$$+s(a-p\delta-1)[a^4(9\eta^2\delta^2+4\eta\delta+11)-a^3(23\eta^2\delta^2+24p\delta-8p\delta^2\eta-2\eta\delta+7)+$$
$$+a^2(12\eta\delta-53p\delta+18p^2\delta^2+6p^2\eta\delta^3-78p\eta\delta^2+5+19\eta^2\delta^2-49p\eta^2\delta^3)+$$
$$+a(104p^2\delta^2+8p^3\delta^3+8\eta^2\delta^2+8p\eta\delta^2+28p\delta+100p\eta^2\delta^3-16p^2\eta\delta^3)-4p^4\delta^4-$$
$$-32p^3\delta^3(3+\eta\delta)+8p^2\delta^2(6\eta^2\delta^2+25\eta\delta+4)-4p\delta(\eta^2\delta^2+14\eta\delta+5)-4\eta^2\delta^2]\}+$$
$$-\widetilde{\kappa}^2\{4(a-p\delta-1)[4a^4-3a^3(2p\delta+3)+a^2(3p^2\delta^2-3p\delta+10)+4a(3p^2\delta^2+p\delta-1)-$$
$$-4p\delta(p\delta-1)^2]+s[a^5(19+2\eta\delta)+a^4(-29p\delta+10p\eta\delta^2+3\eta^2\delta^2+14\eta\delta-36)+$$
$$+a^3(-92p\eta\delta^2+2\eta\delta+7p^2\delta^2+18+7\eta^2\delta^2-50p\delta)+a^2(5\eta^2\delta^2+30p\eta\delta^2-26p^2\eta\delta^3+$$
$$+174p\delta-10-24\eta\delta+99p^2\delta^2-31p\eta^2\delta^3+15p^3\delta^3)+a(-24\eta^2\delta^2-128p^2\delta^2-52p\eta^2\delta^3-$$
$$-56p\eta\delta^2-72p\delta+288p^2\eta\delta^3-52p^3\delta^3)-48p^4\delta^4+4p^3\delta^3(35-8\eta\delta)-4p^2\delta^2(-22\eta^2\delta^2+$$
$$+50\eta\delta+27)+4p\delta(13\eta^2\delta^2+30\eta\delta+10)+12\eta^2\delta^2]\}+\widetilde{\kappa}^3\{4(a-p\delta)[2a^4-5a^3+$$
$$+11a^2(1-p\delta)-4a(3-2p\delta)+18p^2\delta^2-8p\delta+6]+s[9a^5+a^4(10\eta\delta+3p\delta-30)+$$
$$+a^3(-26p\delta+12-2\eta\delta)+a^2(156p\delta-10-20\eta\delta+15\eta^2\delta^2-26p\eta\delta^2-31p^2\delta^2)-$$
$$-4a(12p\delta+3\eta^2\delta^2+13p^2\delta^2+4p\eta\delta^2)+88p^3\delta^3-4p^2\delta^2(8\eta\delta+33)+8p\delta(-6\eta^2\delta^2+$$
$$+13\eta\delta+5)+12\eta^2\delta^2]\}+\widetilde{\kappa}^4\{-4[a^4+a^3-a^2(9p\delta+2)+4a(p\delta+1)+16p^2\delta^2-12p\delta]+$$
$$+s[9a^4-3a^3+a^2(5-49p\delta+6\eta\delta)+12ap\delta+48p^2\delta^2-32p\eta\delta^2-4\eta^2\delta^2-20p\delta]\}+$$
$$+\widetilde{\kappa}^5[4(a^2+a-5p\delta)-s(a^2-4p\delta)]\rangle+O(\mu^2).$$

Приведенные выражения слишком сложны для полного анализа, однако, принимая естественное предположение о малости величины μ, можно видеть, что P_1, P_2, P_3 – положительны в случае достаточно быстрых вращений гироскопа ($\delta << 1$).

Представляется интересным вопрос о возможности стабилизации неустойчивого вращения носителя за счет относительного движения внутренних элементов. Применительно к уравнению (6) это означает такой выбор параметров $k,\ s,\ \eta$, что $P_j > 0$ $(j = \overline{1,3})$, в то время, как $p\delta > 1/4(a^2+4a\mu+$ $+4mu^2)/(1+\mu)$. Последнее условие обеспечивает отрицательность дискриминанта квадратного трехчлена $\widetilde{\lambda}^2(1+\mu)-(2-a)\widetilde{\lambda}+1-a+p\delta-\mu$, т. е. наличие корня с положительной вещественной частью у характеристического многочлена и неустойчивость (экспоненциальную) изучаемого движения. В этой связи введем представление

$$p\delta = \frac{a^2 + 4a\mu + 4\mu^2}{4(1+\mu)} + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \tag{20}$$

и запишем разложения в ряд по ε, μ величин P_j $(j = \overline{1,3})$:

$$P_1 = \frac{\widetilde{\kappa}}{96}(2-a)^2(a^2 - 4a + 4 + 2\widetilde{\kappa}) + \cdots ,$$

$$P_2 = \frac{\widetilde{\kappa}^2}{1024}(2-a)^6(a^2 - 4a + 4 + 8\widetilde{\kappa}) + \cdots ,$$

$$P_3 = \frac{\widetilde{\kappa}}{16384}[(2-a)^2 - 4\widetilde{\kappa}]^3\{\mu(sa^2 + 4\eta\delta)^2 - 4\varepsilon[(2-a)^2 - 4\widetilde{\kappa}]\} + \cdots . \tag{21}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые более высокого порядка малости по сравнению с выписанными. Легко видеть, что если ε, μ достаточно малы, то выражения для P_1 и P_2 положительны при условии $\widetilde{\kappa} > 0$ и любых допустимых значениях остальных параметров (при $\widetilde{\kappa} < 0$ хотя бы одно из них отрицательно). Обозначим выписанные слагаемые в правой части (21) через P_{30} и проанализируем условие $P_{30} > 0$.

Если $\widetilde{\kappa} > (2-a)^2/4$, то выражение в круглых скобках отрицательно, в то время, как в квадратных скобках стоит сумма положительных выражений, как следствие все произведение отрицательно. Следовательно, величина $\widetilde{\kappa}$ ограничена сверху величиной $(2-a)^2/4$. Получаем следующие необходимые и достаточные условия положительности P_{30}:

$$\widetilde{\kappa} < \frac{(2-a)^2}{4}, \tag{22}$$

$$\mu > \varepsilon \frac{4[(2-a)^2 - 4\widetilde{\kappa}]}{(sa^2 + 4\eta\delta)^2}. \tag{23}$$

Напомним, что выполнение неравенства (23) обеспечивает положительность $P_3(\mu, \varepsilon, \widetilde{\kappa}, s, \eta, \delta, a)$ при достаточно малых ε и μ. Оценить степень этой малости в общем случае (без конкретизации параметров носителя и интервала возможных значений скорости вращения) представляется достаточно сложной задачей – многочлен P_3 имеет одиннадцатую степень относительно μ. Если же величины a и δ заданы, то оценка (23) может быть уточнена, хотя и примет значительно более громоздкий вид.

В заключение отметим, что численные расчеты показывают, что значение параметра $\widetilde{\kappa}$ целесообразно выбирать малым (условие (22) при этом выполняется автоматически). В зависимости от выбора a и δ, можно добиться увеличения величины $p\delta$ порядка десяти процентов. Так, при $a = 0.8, \delta = 0.5$

полагаем $s = 0.6$, $\varepsilon = 0.018$, $\widetilde{\kappa} = 0.01$. Многочлен $P_3(\mu)$ имеет три вещественных корня, два из них положительны: $\mu_1 \approx 0.1854$, $\mu_2 \approx 0.1877$. Выбирая $\mu = 0.186$, находим корни $f(\lambda) : -0.5207, -0.4863, -0.4132,\ 0.2734$. Для носителя с "вмороженными" элементами собственные значения таковы: $-0.5890 - 0.1329i$, $-0.5890 + 0.1329i$. Соответствующий характеристический многочлен имеет положительный показатель Ляпунова – 0.1329, и рост возмущенных решений имеет порядок $e^{0,1329\tau}$, т. е. амплитуда колебаний увеличивается примерно в пять раз за период. Свободные колебания внутренних элементов устраняют это "раскачивание".

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
2. *Пузырев В.Е.* Об устойчивости стационарных движений механических систем с неполной диссипацией энергии // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 99-104.
3. *Покровский П.М.* Об алгебраических уравнениях в связи с аналитическими функциями Вейерштрасса // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания – 1893. – **6**, вып.1. – С. 26–42.
4. *Лесина М.Е.* О стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа Лагранжа // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 88–92.
5. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.

A.E. Pozdnyakovih, V.E. Puzirev

Stability of permanent rotations about the principal axis of the Lagrange's gyroscope with dampers-balancers

The problem of passive stabilization of the rigid body permanent rotations is considered. Two elastically fixed elements are attached to the body which which can oscillate freely in the plane orthogonal to the rotation axis. The necessary and sufficient conditions of stability for the linearized motion equations are obtained and analyzed. It is shown that oscillations of the added elements can stabilize the instable motion of the carrier.

Keywords: *passive stabilization, added masses, the Pokrovsky criteria.*

О.Є. Позднякович, В.Є. Пузирьов

Стійкість рівномірних обертань навкруги головної осі гіроскопа Лагранжа з внутрішніми елементами

Розглянуто задачу про пасивну стабілізацію навколо вертикалі гіроскопа Лагранжа з двома пружно закріпленими внутрішніми елементами, що рухаються плоско-паралельно у площині, ортогональній до вісі динамічної симетрії. Отримано умови стійкості руху у першому наближенні. Встановлено, що коливальний рух приєднаних елементів може стабілізувати нестійке обертання гіроскопа. Рух системи при цьому – чотирьохчастотний, в той час, як рух тіла з нерухомими елементами – одночастотний; відповідні рівняння мають додатний характеристичний показник Ляпунова.

Ключові слова: *пасивна стабілізація, приєднані маси, критерій Покровського.*

Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры, Макеевка;
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vpsr@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.08.13