УДК 531.36

©2013. **В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко**

# КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ НЕСИММЕТРИЧНОГО ГИРОСКОПА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДЕМПФИРУЮЩЕГО МОМЕНТА

Ранее авторами были получены и проанализированы [1, 2] условия асимптотической устойчивости равномерных вращений несимметричного тяжелого твердого тела, находящегося под действием демпфирующего момента, вокруг оси, несущей центр масс, в случае, когда центр масс находится выше точки опоры. В настоящей работе рассматривается задача устойчивости в критическом по Ляпунову случае, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней. Показано, что в этом случае может наблюдаться как асимптотическая устойчивость, так и неустойчивость.

**Ключевые слова:** *демпфирующий момент, равномерные вращения, асимптотическая устойчивость, критический случай, функция Ляпунова.*

Для выяснения характера устойчивости линейной системы ОДУ прибегают к рассмотрению характеристического уравнения матрицы коэффициентов системы, содержащего информацию о ее спектре. В этих целях используют различные критерии устойчивости: Рауса–Гурвица, Льенара–Шипара, Михайлова и др. Однако, построение характеристического полинома и оценка его корней не всегда дают однозначный ответ о характере поведения системы. Могут иметь место критические случаи. В критических случаях свойства устойчивости нулевого решения полной нелинейной системы не могут быть установлены исследованием уравнений первого приближения. В таких случаях на характер устойчивости существенное влияние оказывают нелинейные члены. В зависимости от вида нелинейных членов, нулевое решение полной системы может быть как устойчиво, так и неустойчиво.

С математической точки зрения критические случаи являются исключительными, однако при исследовании механических систем эти случаи встречаются достаточно часто.

**1. Предварительные замечания.** Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела под действием демпфирующего момента $\boldsymbol{M} = -\kappa(\widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{0}})$:

$$\boldsymbol{J}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{J}\widetilde{\boldsymbol{\omega}} + P\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции, $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ – вектор угловой скорости тела в связанной системе координат, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\boldsymbol{s}$ – вектор, направленный из неподвижной точки в центр масс тела, $P$ – вес тела, $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{0}} = (0, 0, \omega_0)^T$, $\omega_0$ – константа, верхний индекс $T$ обозначает транспонирование.

Введем безразмерные параметры и время по формулам

$$a = \frac{J_2}{J_1}, \quad b = \frac{J_1 + J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu = \frac{P|\boldsymbol{s}|e}{J_1\omega_0^2}, \quad \varkappa = \frac{\kappa}{J_1\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t. \tag{2}$$

Здесь $e = 1$, если центр масс тела лежит выше точки опоры и $e = -1$ – в противном случае. Не ограничивая общности, будем считать $\omega_0 > 0$.

Ранее [2] были получены и проанализированы условия асимптотической устойчивости равномерных вращений несимметричного тяжелого твердого тела, находящегося под действием демпфирующего момента, вокруг оси, несущей центр масс, в случае, когда центр масс находится выше точки опоры ($\mu > 0$). Этим вращениям соответствует решение системы (1)

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{0}}, \qquad \boldsymbol{\nu} = (0,0,1)^T.$$

Полученные условия накладывают ограничения на распределение масс в теле, величину угловой скорости вращения и на величину коэффициента демпфирования, а именно:

$$b < b_1 = \frac{|1-a|}{a+1}\min(a,1), \tag{3}$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_2, \tag{4}$$

$$\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2, \tag{5}$$

где $\mu_1, \mu_2, \varkappa_1, \varkappa_2$ вычисляются по формулам

$$\mu_1 = \frac{2b^2(a+1)}{(a-1)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{2(a-ab-b)}{a+1},$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{-\mu^2 + (a-2b+1)\mu - (b-a)(b-1)}, \qquad \varkappa_2 = \sqrt{\frac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2}.$$

Характеристический многочлен системы уравнений движения (1), линеаризованной в окрестности равномерных вращений, имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda + \frac{\varkappa}{1-b+a})f_1(\lambda), \tag{6}$$

где $f_1(\lambda) = a\lambda^4 + \varkappa(a+1)\lambda^3 + [\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu)]\lambda^2 + \varkappa(a+1-2\mu)\lambda + (b-1+\mu)(b-a+\mu) + \varkappa^2$.

Заметим, что перестановка местами индексов 1 и 2 в формулах (2) равнозначна замене вектора параметров $(a, b, \mu, \varkappa)$ на $(1/a, b/a, \mu/a, \varkappa/a)$. Это означает, что можно ограничиться случаем $J_2 < J_1$, т. е. $a < 1$. При этом любое полученное условие устойчивости распространяется на случай $J_2 > J_1$ с помощью указанного преобразования параметров. Случай $a = 1$ из рассмотрения исключается, поскольку при этом значении нарушается условие устойчивости (3) и хотя бы один собственный корень характеристического уравнения (6) линеаризованной системы имеет положительную вещественную часть, что означает экспоненциальную неустойчивость изучаемого решения.

Неравенства (3)–(5) представляют собой условия асимптотической устойчивости изучаемого движения по первому приближению, т. е. условия того, что все корни характеристического уравнения (6) имеют отрицательные вещественные части. Эти условия являются необходимыми и достаточными в том смысле, что изменение любого из знаков неравенства на противоположный гарантирует наличие положительной вещественной части у корня $f_1(\lambda)$ и экспоненциальный рост возмущенных решений. Рассмотрим возможности замены знака неравенства в (3)–(5) на знак равенства.

1) Если $b = b_1$, то $\mu_1 = \mu_2$. Условие (4) переходит в условие $\mu = \mu_1$. Последнее равенство означает, что $\varkappa_2(\mu, a, b) = \varkappa_2(\mu_1, a, b_1) = 0$, и для любого $\varkappa \neq 0$ имеем нарушение условия (5). Вывод: существует корень с положительной вещественной частью.

2) Если условие (3) выполнено, а $\mu = \mu_2$, то $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Единственная возможность, при которой не происходит изменение знака в (5), это $\varkappa = \varkappa_1$. Последнее равенство обращает в нуль свободный член характеристического многочлена. С точки зрения теории устойчивости движения имеем критический случай одного нулевого корня.

3) Если $\mu_1 = \mu < \mu_2$, то $\varkappa_2 = 0$. Аналогично случаю 1), получаем изменение знака в (5) и корень с положительной вещественной частью.

4) Если $\varkappa = \varkappa_1$ (и выполняется строго условие (4)), то многочлен $f_1(\lambda)$ имеет нулевой корень и пару чисто мнимых корней.

5) Если выполнены условия (3), (4) и $\varkappa = \varkappa_2$, то многочлен $f_1(\lambda)$ имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ и два комплексно сопряженных корня с отрицательными вещественными частями $\lambda_{3,4} = \sigma_2 \pm i\omega_2$. Имеем критический случай пары чисто мнимых корней, который и является объектом нашего рассмотрения.

Перейдем к возмущениям по формулам

$$\omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \nu_1 = x_3, \quad \nu_2 = x_4, \quad \omega_3 = 1 + x_5.$$

Представим выражение для $\nu_3$ в виде $\nu_3 = 1 - F_1(\nu_1, \nu_2) + F_2(\nu_1, \nu_2)$, где $F_1(\nu_1, \nu_2) = (\nu_1^2 + \nu_2^2)/2$, $\quad F_2(\nu_1, \nu_2) = \sqrt{1 - \nu_1^2 - \nu_2^2} - 1 + (\nu_1^2 + \nu_2^2)/2$. Тогда при выполнении условий (3), (4) и $\varkappa = \varkappa_2$ исходная система дифференциальных уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -\varkappa_2 x_1 + \mu x_4 + (b-1) x_2 x_5, \\
\dot{x_2} &= -\frac{\varkappa_2}{a} x_2 - \frac{\mu}{a} x_3 + \frac{a-b}{a} x_1 x_5, \\
\dot{x_3} &= -x_2 + x_4 + x_4 x_5 + x_2 F_1(x_3, x_4) - x_2 F_2(x_3, x_4), \\
\dot{x_4} &= x_1 - x_3 - x_3 x_5 - x_1 F_1(x_3, x_4) + x_1 F_2(x_3, x_4), \\
\dot{x_5} &= -\frac{\varkappa_2}{1-b+a} x_5 + F_3(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{7}$$

где $F_3(x_1, x_2) = (1-a) x_1 x_2 / (1-b+a)$.

Необходимо исследовать на предмет устойчивости нулевое решение системы (7).

**2. Приведение линейной части системы (7) к каноническому виду.** Матрица правой части линеаризованной системы (7) может быть записана в виде блочно-диагональной матрицы $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}, \sigma_3)$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\varkappa_2 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & -\frac{\varkappa_2}{a} & \frac{-\mu}{a} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = -\frac{\varkappa_2}{1-b+a}.$$

Приведем матрицу $\boldsymbol{A}$ к жордановой форме:

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(i\omega_1, -i\omega_1, \sigma_2 + i\omega_2, \sigma_2 - i\omega_2).$$

Пусть $\boldsymbol{S} = (s_{lj})$ $(l, j = \overline{1,4})$ – матрица преобразования, которая может быть определена из уравнения

$$\boldsymbol{AS} - \boldsymbol{SJ} = 0. \tag{8}$$

Найдем явные выражения для $\omega_1, \sigma_2, \omega_2$. Корни характеристического уравнения имеют вид $\lambda_1 = i\omega_1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1},\ \lambda_3 = \sigma_2 + i\omega_2,\ \lambda_4 = \overline{\lambda_3}$. Используя теорему Виета, получим

$$\begin{gathered} \sigma_2 = -\frac{(a+1)\varkappa_2}{2a}, \qquad \omega_1^2 = \frac{a+1-2\mu}{a+1}, \\ \omega_2^2 = \frac{4a[\varkappa_2^2 + (b+\mu-a)(b+\mu-1)] - \varkappa_2^2\omega_1^2(a+1)^2}{4a^2\omega_1^2}. \end{gathered} \tag{9}$$

Решая (8) относительно элементов матрицы $\boldsymbol{S}$ с учетом формул (9) имеем

$$\begin{gathered} s_{11} = \frac{2s_{31}}{a+2b-1}[b + \mu\frac{a-1}{a+1} + i\varkappa_2\omega_1], \\ s_{13} = \frac{s_{33}}{4(1-a+ab+b)}(a+1)[(a-1)[(a+1)\mu - 2(b^2+2)] + \\ + \frac{i\omega_2}{\sigma_2}[(a-1)^2\mu - 2(a+1)b^2],\ s_{21} = s_{31}\frac{2(\varkappa_2 - ib\omega_1)}{a-1+2b}, \\ s_{23} = -s_{33}\frac{2\varkappa_2(a+1)[\sigma_2[(a+1)(a+1-b)-2] + i\omega_2(a+1)(a-1-b)]}{4a\sigma_2[1-a+(a+1)b]}, \\ s_{41} = s_{31}\frac{2\varkappa_2 + i\omega_1(a-1)}{a-1+2b},\ s_{43} = -s_{33}\frac{2\varkappa_2(a+1)[(a+1)\sigma_2 + i\omega_2(a-1)]}{4\sigma_2[1-a+(a+1)b]}. \end{gathered} \tag{10}$$

Выражения для элементов со вторым четным индексом получаются из формул (10) путем замены в правой части множителя $s_{3,j-1}$ на $s_{3\ j}$, $(j = 2,4)$, а соответствующего комплексного выражения – на сопряженное ему. Элементы $s_{3\ j}$, $(j = \overline{1,4})$ могут выбираться произвольно, исключая нулевые значения (в этом случае матрица $\boldsymbol{S}$ будет вырожденной). Выберем $s_{32} = s_{31},\ s_{34} = s_{33}$, где $s_{31}, s_{33}$ – произвольные вещественные числа.

Выполняя преобразование $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{z}$, приводим (7) к системе следующего вида:

$$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{z} + x_5\boldsymbol{C}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(\Phi_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) + \Phi_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})),$$
$$\overline{\boldsymbol{z}'} = \overline{\boldsymbol{J}_1}\overline{\boldsymbol{z}} + x_5\overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{z}} + \overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{z}}(\Phi_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) + \Phi_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})), \qquad (11)$$
$$x_5' = \sigma_3 x_5 + \Phi_3(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}),$$

где $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}_1 = \mathrm{diag}(i\omega_1, \sigma_2 + i\omega_2)$, черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Матрицы $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ – прямоугольные матрицы $4\times 2$, состоящие из 1 и 3 строк матриц $\boldsymbol{S}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$ соответственно, где

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0 & b-1 & 0 & 0 \\ \frac{a-b}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Phi_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}),\ \Phi_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}),\ \Phi_3(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$ получены из $F_1(x_3,x_4),\ F_2(x_3,x_4),\ F_3(x_1,x_2)$ путем замены в уравнениях (7) переменных $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{z}$. Коэффициенты функции $\Phi_1(z,\overline{z})$ задаются соотношениями

$$\text{при } z_j^2 \ :\ s_{3j}^2 + s_{4j}^2, \quad j = 1,2;$$
$$\text{при } z_j z_l :\ 2(s_{3j}s_{3l} + s_{4j}s_{4l}), \quad j,l = 1,2;\ j \neq l;$$
$$\text{при } z_j\overline{z_l} :\ 2(s_{3j}\overline{s_{3l}} + s_{4j}\overline{s_{4l}}), \quad j,l = 1,2.$$

**3. Исследование устойчивости изучаемого решения.** Запишем функцию Ляпунова в виде

$$V(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},x_5) = \alpha_1 z_1\overline{z_1} + \alpha_2 z_2\overline{z_2} + \alpha_3 x_5^2 + z_2(k_{12}z_1^2 + k_{11}z_1\overline{z_1} + k_{10}\overline{z_1}^2) +$$
$$+\overline{z_2}(k_{22}z_1^2 + k_{21}z_1\overline{z_1} + k_{20}\overline{z_1}^2) + x_5(k_{32}z_1^2 + k_{31}z_1\overline{z_1} + k_{30}\overline{z_1}^2) + V^{(4)}(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},x_5),$$

где $\alpha_l$ – некоторые вещественные, а $k_{lj}$ $(l = \overline{1,3}, j = \overline{0,2})$ – комплексные постоянные.

Известно, что функцию $V$ можно подобрать таким образом [3], что ее полная производная в силу уравнений возмущенного движения примет вид $V' = V_0' + o(V_0')$, где $V_0' = V'^{(2)}(z_2,\overline{z_2},x_5) + Gz_1^2\overline{z_1}^2$, при этом форма $V'^{(2)}(z_2,\overline{z_2},x_5)$ является знакоопределенной, а постоянная $G$ определяется из соотношения

$$V'^{(4)}(z_1,\overline{z_1}) = Gz_1^2\overline{z_1}^2.$$

Коэффициенты $k_{lj}$, $\ l = \overline{1,3},\ j = \overline{0,2}$ находятся из условия

$$V'^{(3)}(z_2,\overline{z_2},x_5) = 0. \qquad (12)$$

Отметим, что выражение для $G$ представимо в виде

$$G = \alpha_1 G_{\alpha_1} + \alpha_2 G_{\alpha_2} + \alpha_3 G_{\alpha_3}.$$

При достаточно малых значениях $\alpha_2, \alpha_3$ знак $G$ совпадает со знаком $\alpha_1 G_{\alpha_1}$. Не ограничивая общности, полагаем $\alpha_1 = 1$. Для $G_{\alpha_1}$ найдем выражение

$$G_{\alpha_1} = \mathrm{Re}\Big[\frac{1-a}{1-b+a}(k_{31}s_{12}s_{21} + k_{32}s_{12}s_{22} + k_{31}s_{11}s_{22} + k_{30}s_{11}s_{21}) +$$

$$+(s_{31}s_{32} + s_{41}s_{42})(d_{22} + d_{11}) + \frac{d_{21}}{2}(s_{42}^2 + s_{32}^2) + \frac{d_{12}}{2}(s_{41}^2 + s_{31}^2)\Big],$$

где $d_{lj}, c_{lj}$ – элементы матриц $D$ и $C$ соответственно.

Перейдем к вычислению коэффициента устойчивости $G$. Из условия (12) находим коэффициенты $k_{lj}, \quad l = \overline{1,3}, j = \overline{0,2}$:

$$k_{30} = \frac{c_{12}(1-b+a) + 2\alpha_2 s_{12}s_{22}(1-a)}{\varkappa_2 + 2i\omega_1(1-b+a)},$$
$$k_{31} = (c_{11} + c_{22})(1-b+a) + 2\alpha_2(1-a)(s_{12}s_{21} + s_{11}s_{22}),$$
$$k_{32} = -\frac{c_{21}(1-b+a) + 2\alpha_2 s_{11}s_{21}(1-a)}{-\varkappa_2 + 2i\omega_1(1-b+a)},$$
$$k_{lj} = 0, \quad l \neq 3, j = \overline{0,2}.$$

Принимая во внимание выражения для $s_{lj}, d_{lj}, c_{lj}$ через параметры системы, имеем

$$G_{\alpha_1} = 8\mu s_{31}^2(a-1)^3(a+2b-1)(\mu-\mu_1)g_1(a,b,\mu)\ g_2(a,b,\mu)\ g_3(a,b,\mu). \quad (13)$$

Здесь

$$g_1 = [(128a+128)b^4 - (280a^2+528a+280)b^3 + (148a^3+492a^2+492a+148)b^2 +$$
$$+(7a^4-72a^3-126a^2-72a+7)b - 9a^5 - 5a^4 + 14a^3 + 14a^2 - 5a - 9]\mu - (56a^2+112a+$$
$$+56)b^4 + (158a^3+474a^2+474a+158)b^3 - (88a^4+384a^3+592a^2+384a+88)b^2 +$$
$$+(-10a^5+22a^4+116a^3+116a^2+22a-10)b + 4a^6 + 8a^5 - 4a^4 - 16a^3 - 4a^2 + 8a + 4,$$
$$g_2 = -(3a^4+4a^3-14a^2+4a+3)\mu + (a+1)^2[8(a+1)b^2 + 4(a-1)^2 b + 2(a^3-a^2-a+1)],$$
$$g_3 = (-34a+32ab-15+32b-16b^2-15a^2)\mu + 2(a+1)(2a-b+2)(2a-3b+2).$$

Заметим, что

$$1-a-2b = 1-a-2b+2b_1-2b_1 = 2(b_1-b) + \frac{(1-a)^2}{1+a} > 0.$$

Учитывая, что $b < b_1$, согласно условию (3) заключаем, что $a+2b-1 < 0$.

Представим выражение для $g_1$ в виде

$$g_1 = g_{11}(a,b)\mu + g_{10}(a,b), \quad g_{11} = 128b^4(1+a) - 8b^3(35a^2+66a+35) + 4b^2(a+1)\times$$

$$\times(37a^2+86a+37)+b(7a^4-72a^3-126a^2-72a+7)-(a+1)(a-1)^2(9a^2+14a+9),$$

$$g_{10}=(a+1)^2(2a+2-b)[56b^3-46b^2(a+1)4b(a^2-6a+1)+2(1-a)(a+1)^2].$$

Покажем, что $g_1(a,b,\mu)$ является монотонно убывающей функцией аргумента $\mu$ в области (3), (4). Для этого достаточно показать, что $g_{11}<0$ всюду в области $D$ – части первого квадранта плоскости $Oab$, ограниченной кривой $b=b_1(a)$. Непрерывная функция двух аргументов $g_{11}(a,b)$ принимает наименьшее значение в замкнутой области $\overline{D}$ либо в точках экстремума, либо на границе этой области. В области $D$ функция $g_{11}(a,b)$ имеет две стационарные точки $P_1(0.263,0.038)$, $P_2(0.607,0.086)$, первая из которых является точкой минимума, а вторая не является точкой экстремума. Следовательно, наибольшее значение достигается на границе области. При $b=0$ имеем $g_{11}(a,0)=-(a+1)(a-1)^2(9a^2+14a+9)\le 0$. При $b=b_1(a)$ получаем

$$g_{11}(a,b_1)=(a-1)(540a^7+93a^6+426a^5-145a^4+88a^3-21a^2+34a+9)/(a+1)^3.$$

Данное выражение отрицательно при $a\in(0,1)$, поскольку многочлен седьмой степени в числителе имеет один отрицательный и шесть комплексных корней. Таким образом, наибольшее значение функции $g_{11}(a,b)$ равно нулю и достигается на границе области $D$ при $a=1, b=0$, поэтому всюду в самой области $D$ выполняется неравенство $g_{11}<0$.

Вычислим теперь выражение $\psi_1(a,b)=g_1(a,b,\mu_1)$:

$$\psi_1=128b^6(a+1)^2-8b^5(a+1)(35a^2+66a+35)+4b^4(a+1)^2(37a^2+86a+37)+$$

$$+b^3(7a^5-65a^4-198a^3-170a^2-121a+35)-b^2(a+1)(a-1)^2(9a^3+23a^2+23a+32)-$$

$$-2b(a-1)^2(a^2-6a+1)+(a+1)(a-1)^4.$$

Кривая восьмого порядка $\psi_1(a,b)=0$ имеет в первой четверти плоскости $Oab$ четыре ветви, одна (и только одна) из которых пересекает границу области $D$ (рис. 1). Обозначим эту ветвь через $C_1$ и найдем точки пересечения кривых $C_1$ и $C_0:\ b=b_1(a)$. Получим условие

$$(3a+1)(a-1)^4(132a^7+3a^6+73a^5-64a^4-2a^3-21a^2+5a+2)=0.$$

Многочлен седьмой степени имеет три вещественных корня, один из них – отрицательный. Два положительных корня $a_1\approx 0.390$, $a_2\approx 0.660$ определяют точки пересечения $M_1\{a_1,b_1(a_1)\},M_2\{a_2,b_1(a_2)\}$ кривых $C_0$ и $C_1$. Кривая $C_1$ разбивает область $D$ на подобласти $D_1$ и $D\backslash\overline{D}_1$. Поскольку $g_1(a,b,\mu)$ является линейной функцией аргумента $\mu$, то в каждой из областей $D_1$, $D\backslash\overline{D}_1$ знак выражения $\psi_1(a,b)$ постоянен, и эти знаки противоположны. Легко убедиться в том, что $\operatorname{sgn}(\psi_1)=1$ в области $D\backslash\overline{D}_1$, поскольку

$$\lim_{b\to+0}\psi_1(a,b)=(a+1)(a-1)^4>0.$$

Таким образом, в области $D_1$ имеем $\psi_1(a,b)<0$, и, как следствие, $g_1(a,b,\mu)<0$ для любых $\mu>\mu_1$.

Проведем аналогичные рассуждения для $\psi_2(a,b) = g_1(a,b,\mu_2)$ :

$$\psi_2(a,b) = -256b^5(a+1)^2 + 24b^4(a+1)(21a^2+50a+21) - 2b^3(69a^4+604a^3+$$
$$+1038a^2+604a+69) - 2b^2(a+1)(51a^4-28a^3-174a^2-28a+51)+$$
$$+2b(a-1)^2(4a^4+35a^3+54a^2+35a+4) + 2(a+1)(a-1)^4(2a^2+3a+2),$$

получим кривую $C_2$, которая разбивает область $D\backslash\overline{D}_1$ на подобласти $D_2,\ D_3$. В области $D_3$ имеем $\psi_2(a,b) > 0$, а значит, $g_1(a,b,\mu) > 0$ для любых $\mu < \mu_2$. В то же время, для любой точки из области $D_2$ выполняются неравенства $\psi_1(a,b) > 0,\ \psi_2(a,b) < 0$, а значение

$$\mu_\star = -\frac{g_{10}(a,b)}{g_{11}(a,b)}$$

принадлежит интервалу (4). Соответственно, $g_1 > 0$ при $\mu < \mu_\star$ и $g_1 < 0$ при $\mu > \mu_\star$.

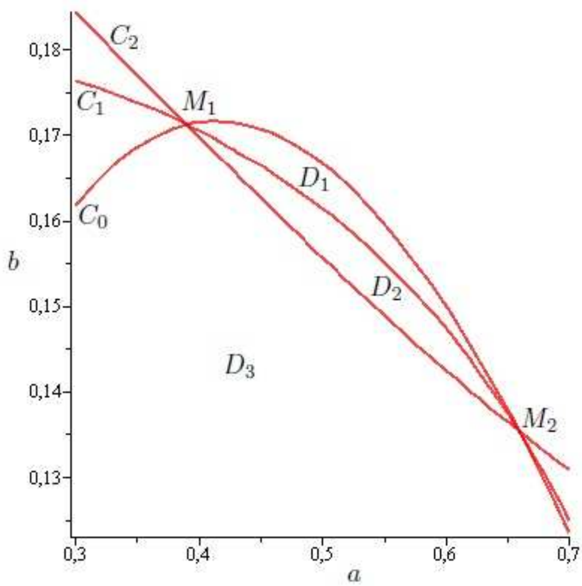


*Рис. 1. Разбиение области* D *на подобласти.*

Для определения знака выражения $g_2$ исследуем его знак на границе $\mu = \mu_2$. Получаем, что

$$g_2(a,b,\mu_2) = \frac{2(b(a+1)^3 + (a-1)^2(a^2+3a+1))(4b+(a-1)^2)}{a+1} > 0.$$

Поскольку $g_2$ является монотонно убывающей функцией по $\mu$, она принимает значения $g_2 > 0$ для всех $\mu < \mu_2$, в частности, и на интервале (4).

Аналогично вычисляем выражение $g_3$:

$$g_3(a,b,\mu_2)=(a+1)b(16b^2+7a^2+50a+7)-(29a^2+74a+29)b^2+(a-1)^2(4a^2+9a+4).$$

После тождественных преобразований имеем

$$g_3(a,b,\mu_2)=\frac{b}{a+1}[16(b_1-b)^2(1+a)^2+(b_1-b)(61a^3+103a^2+71a+29)+$$

$$+52a^4+77a^3+28a^2+35a+64]+(a-1)^2(4a^2+9a+4)>0.$$

Таким образом, $g_3>0$ для всех $\mu$ на интервале (4).

При $\mu>\mu_*$ выполнено неравенство $G_{\alpha_1}<0$. Заметим, что при достаточно малых значениях $\alpha_2,\alpha_3$ знак $G$ совпадает со знаком $G_{\alpha_1}$. Таким образом, при положительных значениях $\alpha_2,\alpha_3$ функция $V(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},x_5)$ является положительно определеной, а $V'$ – отрицательно определенная. Следовательно, все условия второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения [4,5] выполнены. Поэтому нулевое решение системы (11), а значит, и системы (7) асимптотически устойчиво.

При $\mu<\mu_*$ выполнено неравенство $G_{\alpha_1}>0$. Тогда в случае $\alpha_2<0,\alpha_3<0$ функция $V'$ – положительно определенная, а сама функция $V$ – знакопеременная. Следовательно, все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости движения выполнены и нулевое решение системы (7) неустойчиво.

**4. Пример.** Проиллюстрируем вычислительную процедуру на численном примере. Возьмем точку $M_3(0.5,\ 0.165)$ из области $D_1$. Для нее получим $\mu_1=0.3267,\ \mu_2=0.3366,\ \mu_\star=0.2825,\ \mu_\star\notin(\mu_1,\mu_2),\ \varkappa_2=0.0165$. Выберем $\mu=0.33$, удовлетворяющее условию (4). Тогда

$$V=z_1\overline{z_1}+\alpha_2z_2\overline{z_2}+\alpha_3x_5^2+(0.6314-10.3529\alpha_3)x_5z_1\overline{z_1}+$$

$$+(0.4575\alpha_3-0.5215+0.1126i-0.1655i\alpha_3)x_5\overline{z_1}^2+(0.4575\alpha_3-0.5215-0.1126i+$$

$$+0.1655i\alpha_3)x_5z_1^2+(0.3072-0.15i+0.0451\alpha_3-0.0382i\alpha_3)\overline{z_1}^4+(0.0451\alpha_3+$$

$$+0.3072+0.15i+0.0382i\alpha_3)z_1^4+(0.8961i\alpha_3-2.3542\alpha_3-2.2345+0.5367i)\overline{z_1}^3z_1+$$

$$-(2.3542\alpha_3+2.2345+0.5367i+0.8961i\alpha_3)z_1^3\overline{z_1},$$

$$V'=-0.0497\alpha_2z_2\overline{z_2}-0.0248\alpha_3x_5^2+(-0.003+0.6686\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2+V'^{(3)}+V'^{(4)},$$

где $V'^{(3)}$ является квадратичной по некритическим переменным, а $V'^{(4)}$ имеет порядок не ниже первого по некритическим переменным. При достаточно малых положительных значениях $\alpha_2,\alpha_3$ функция Ляпунова положительно определенна, а ее производная имеет противоположный знак. Следовательно, движение системы (7) при данном выборе параметров асимптотически устойчиво.

Возьмем точку $M_4(0.5,\ 0.16)$ из области $D_2$. Тогда $\mu_1=0.3072$, $\mu_2=0.3466,\ \mu_\star=0.3236,\ \varkappa_2=0.0326$. Заметим, что $\mu_1<\mu_\star<\mu_2$. Выберем $\mu=0.32<\mu_\star$. Функция Ляпунова примет вид

$$V=z_1\overline{z_1}+\alpha_2z_2\overline{z_2}+\alpha_3x_5^2+(0.3485\alpha_3+0.2826i\alpha_3-$$

$$-0.4707-0.2082i)x_5z_1^2+(-0.4707+0.2082i+0.3485\alpha_3-0.2826i\alpha_3)x_5\overline{z_1}^2+$$

$$+(0.6057-9.4814\alpha_3)x_5z_1\overline{z_1}+(1.393i\alpha_3-1.9034+0.9494i-1.609\alpha_3)\overline{z_1}^3z_1+$$

$$+(0.0096\alpha_3-0.0494i\alpha_3+0.197-0.2429i)\overline{z_1}^4+(-1.393i\alpha_3-1.609\alpha_3-$$

$$-1.9034-0.9494i)z_1^3\overline{z_1}+(0.0096\alpha_3+0.197+0.2429i+0.0494i\alpha_3)z_1^4,$$

$$V'=-0.0979\alpha_2z_2\overline{z_2}-0.0487\alpha_3x_5^2+(0.0004+1.1004\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2+V'^{(3)}+V'^{(4)}.$$

Выбирая значения $\alpha_2$ и $\alpha_3$ отрицательными, получаем производную функции Ляпунова отрицательно определенной, а саму функцию Ляпунова – знакопеременной. То есть по первой теореме Ляпунова о неустойчивости [5] решение системы (7) неустойчиво.

Выберем $\mu=0.33>\mu_\star$. Тогда $\varkappa_2=0.0435$ и

$$V=z_1\overline{z_1}+\alpha_2z_2\overline{z_2}+\alpha_3x_5^2-0.4551x_5z_1^2+0.3683ix_5z_1^2\alpha_3+0.2890x_5z_1^2\alpha_3+$$

$$+0.6123x_5z_1\overline{z_1}-9.7777\alpha_3x_5z_1\overline{z_1}+0.2816ix_5\overline{z_1}^2-0.4551x_5\overline{z_1}^2-0.3683ix_5\overline{z_1}^2\alpha_3+$$

$$+0.2890x_5\overline{z_1}^2\alpha_3-0.2816ix_5z_1^2+(-1.7964-1.2699i-1.3346\alpha_3-1.8620i\alpha_3)z_1^3\overline{z_1}+$$

$$+(-1.7964+1.2699i-1.3346\alpha_3+1.8620i\alpha_3)z_1\overline{z_1}^3+(0.1238+0.3036i)z_1^4+$$

$$+(0.1238+0.3036i-0.0141\alpha_3)\overline{z_1}^4,$$

$$V'=-0.1307\alpha_2z_2\overline{z_2}-0.0650\alpha_3x_5^2+(-0.001+1.5621\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2+V'^{(3)}+V'^{(4)}.$$

При достаточно малых положительных значениях $\alpha_2,\alpha_3$ функция Ляпунова и ее производная удовлетворяют второй теореме Ляпунова об устойчивости. Следовательно, изучаемое движение асимптотически устойчиво.

Возьмем точку $M_5(0.5,\ 0.14)$ из области $D_3$. При данном выборе параметров системы имеем $\mu_1=0.2352$, $\mu_2=0.3866$, $\mu_\star=0.4482$, $\varkappa_2=0.0889$. Выберем $\mu=0.33<\mu_\star$. Тогда

$$V=z_1\overline{z_1}+\alpha_2z_2\overline{z_2}+\alpha_3x_5^2+(0.3953i\alpha_3-0.0951\alpha_3-$$

$$-0.2461-0.4827i)x_5z_1^2+(-0.3953i\alpha_3-0.0951\alpha_3-0.2461+0.4827i)x_5\overline{z_1}^2+$$

$$+(0.5302-7.9999\alpha_3)x_5z_1\overline{z_1}+(-1.5481i\alpha_3-0.6347-1.7927i+0.5187\alpha_3)\overline{z_1}z_1^3+$$

$$+(1.5481i\alpha_3-0.6347+1.7927i+0.5187\alpha_3)\overline{z_1}^3z_1+(-0.2004+0.2031i-0.0359\alpha_3-$$

$$-0.0204i\alpha_3)z_1^4+(0.0204i\alpha_3-0.2004-0.2031i-0.0359\alpha_3)\overline{z_1}^4,$$

$$V'=-0.2666\alpha_2z_2\overline{z_2}-0.1307\alpha_3x_5^2+(0.0426+2.1021\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2+V'^{(3)}+V'^{(4)}.$$

При $\alpha_2<0$, $\alpha_3<0$ выполняются условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Можно видеть, что рассмотренные частные случаи согласуются с результатами п. 3.

Таким образом, исследована задача об устойчивости равномерных вращений несимметричного твердого тела в критическом случае пары чисто мнимых корней. Установлено, что если выполнены условия (3)–(5), то при $\mu > \mu_*$ имеет место асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (7), что влечет за собой асимптотическую устойчивость изучаемого движения, а при $\mu < \mu_*$ наблюдается неустойчивость.

1. *Пузырев В.Е., Топчий Н.В.* Оценка собственных значений линейной механической системы с двумя степенями свободы // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 132–140.
2. *Пузырев В.Е., Савченко Н.В.* Устойчивость равномерных вращений несимметричного гироскопа вокруг главной оси, несущей центр масс// Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 168–176.
3. *Савченко А.Я., Игнатьев А.О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. *Ляпунов А.М.* Собр. соч.: В 2 т. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 480 с.
5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

**V.E. Puzyrev, N.V. Savchenko**

### The critical case of stability of uniform rotation of an asymmetric gyroscope under the action of damping torque

The authors have previously obtained and analyzed the asymptotic stability conditions for uniform rotation of an asymmetrical heavy body under the action of the damping torque about the axis of the mass center of the carrier in the case where the center of mass is above the pivot point. These conditions impose restrictions on the mass distribution of the body, the magnitude of the angular velocity of rotation and the value of the damping coefficient. In this paper we consider the problem of stability in the critical Lyapunov case when the characteristic equation has a pair of purely imaginary roots. It is shown that in this case both stability and instability may happened.

**Keywords:** *damping torque, uniform rotation, asymptotic stability, critical case, Lyapunov function.*

**В.Є. Пузирьов, Н.В. Савченко**

### Критичний випадок стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що перебуває під дією демпфірувального моменту

Раніше авторами були отримані і проаналізовані умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного важкого твердого тіла, що перебуває під дією демпфірувального моменту, навколо осі, яка несе центр мас, у випадку, коли центр мас перебуває вище точки опори. У роботі розглядається задача стійкості в критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння має пару чисто уявних коренів. Показано, що в цьому випадку може спостерігатись як асимптотична стійкість, так і нестійкість.

**Ключові слова:** *демпфірувальний момент, рівномірні обертання, асимптотична стійкість, критичний випадок, функція Ляпунова.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
vpsr@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 25.10.13