УДК 531.38

©2013. **А.И. Синенко**

О КИНЕМАТИЧЕСКОМ ИСТОЛКОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ПУАНСО

На основе метода Пуансо и его модификации движение тяжелого твердого тела в частных случаях интегрируемости уравнений Эйлера–Пуассона представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора, принадлежащего эллипсоиду инерции, по неподвижному годографу этого вектора.

Ключевые слова: *кинематическое истолкование, метод Пуансо, частные решения.*

Введение. Одним из наглядных методов кинематического истолкования движения тела является метод годографов, основанный на теореме Л. Пуансо [1] о представлении движения тела качением без скольжения подвижного годографа угловой скорости по неподвижному. Известно, что истолкование Л. Пуансо движения тела в случае Л. Эйлера качением эллипсоида инерции по неподвижной в пространстве плоскости, стало классическим примером описания движения и приводится во всех книгах по теоретической механике. В монографии [2] отмечен вклад и других ученых (Д. Сильвестра, К. Якоби, И. Мак-Кулага, Г. Дарбу, В. Гесса, Н.Е. Жуковского, П.В. Харламова [3]) в развитие геометрических методов динамики твердого тела.

Теорема Пуансо нашла широкое применение в истолковании движения тела [4–6] после того, как П.В. Харламов получил уравнения неподвижного годографа.

На базе работ [4, 7] в [8] предложен модифицированный подход в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой. Показано, что движение тела в общем случае можно представить посредством качения без скольжения подвижного годографа вектора $\boldsymbol{b}(t)$, коллинеарного вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$, по неподвижному годографу этого вектора, лежащему в некоторой плоскости в пространстве.

В данной статье рассмотрено кинематическое истолкование движения тела, основанное на представлении движения тела качением без скольжения годографа вектора $\boldsymbol{b}(t)$, принадлежащего эллипсоиду инерции, по неподвижному годографу этого вектора. Рассмотрены частные решения уравнений Эйлера–Пуассона.

1. Постановка задачи. Движение тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, описывается уравнениями [6]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + s(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление силы тяжести; A – тензор инерции тела в неподвижной точке; s – произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки O до центра тяжести тела C; $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ – единичный вектор, направленный из O в C. Точкой над переменными обозначается дифференцирование по времени t.

Уравнения (1) имеют интегралы

$$A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2s(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{2}$$

здесь E и k – произвольные постоянные.

С телом свяжем систему координат $Oxyz$ с ортами $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$, а в неподвижном пространстве введем систему координат $O\xi\eta\zeta$ с ортами $\text{э}_1, \text{э}_2, \text{э}_3 = \boldsymbol{\nu}$.

Пусть в результате интегрирования уравнений (1) с интегралами (2) найдено решение

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\boldsymbol{i}_j, \quad \boldsymbol{\nu}(t) = \sum_{j=1}^{3} \nu_j(t)\boldsymbol{i}_j, \tag{3}$$

где $t \in [0, \infty)$. Вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(t)$ описывает подвижный годограф вектора угловой скорости. Запишем кинематические уравнения П.В. Харламова [3]

$$\begin{gathered} \omega_\zeta(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j(t)\nu_j(t), \quad \omega_\rho^2(t) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j^2(t) - \omega_\zeta^2(t), \\ \alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_\rho^2(t)} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}))dt. \end{gathered} \tag{4}$$

В силу (4) неподвижный годограф угловой скорости определен вектор-функцией

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_\xi(t)\text{э}_1 + \omega_\eta(t)\text{э}_2 + \omega_\zeta(t)\text{э}_3, \tag{5}$$

$$\omega_\xi(t) = \omega_\rho(t)\cos\alpha(t), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho(t)\sin\alpha(t). \tag{6}$$

Если через Ω_0' обозначить начальную точку (при $t = t_0$) на подвижном годографе, через Ω_0 – на неподвижном годографе, а через Ω^* – точку касания годографов, то из равенства абсолютной и относительной производных $d\boldsymbol{\omega}/dt = d'\boldsymbol{\omega}/dt$ следует, что $\cup\Omega_0\Omega^* = \cup\Omega_0'\Omega^*$. Из данного равенства и вытекает теорема Пуансо о том, что движение тела воспроизводится качением без скольжения подвижного годографа угловой скорости по неподвижному годографу.

Следуя [4, 8], введем в рассмотрение вектор, коллинеарный вектору угловой скорости:

$$\boldsymbol{b}(t) = b(t)\boldsymbol{\omega}(t) \quad (b(t) > 0). \tag{7}$$

Движение тела с неподвижной точкой может быть представлено качением без скольжения подвижного годографа вектора $\boldsymbol{b}(t)$ по неподвижному годографу этого вектора [4].

Полагаем $b(t) = \omega_\zeta^{-1}$ $(\omega_\zeta(t) > 0)$. В силу (5), (7) неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$ определяется вектор-функцией [8]

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{\omega_\xi(t)}{\omega_\zeta}\text{э}_1 + \frac{\omega_\eta(t)}{\omega_\zeta}\text{э}_2 + \text{э}_3. \tag{8}$$

Значит, неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$ лежит в плоскости $\zeta = 1$. Подвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$ найдем из первой формулы системы (3):

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{1}{\omega_\zeta(t)}\sum_{j=1}^{3}\omega_j(t)\boldsymbol{i}_j. \tag{9}$$

Движение тела воспроизводится качением годографа (9) по годографу (8). В [7] движение тела представлено качением эллипсоида инерции по неподвижной плоскости.

Укажем еще один способ представления вектора $\boldsymbol{b}(t)$. Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные моменты инерции тела. Запишем уравнение эллипсоида Пуансо

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = \sigma_0^2, \tag{10}$$

где x, y, z – координаты точек, принадлежащих эллипсоиду инерции, σ_0^2 – постоянная.

Пусть вектор $\boldsymbol{b}(t)$ в подвижном базисе имеет разложение

$$\boldsymbol{b}(t) = \sum_{j=1}^{3} b_j(t)\boldsymbol{i}_j. \tag{11}$$

Найдем функцию $b(t)$ из формулы (7) с учетом того, что ω_j – известные функции времени, а компоненты b_j вектора (11) удовлетворяют уравнению (10). Тогда

$$b(t) = \frac{\sigma_0^2}{\sqrt{A_1\omega_1^2(t) + A_2\omega_2^2(t) + A_3\omega_3^2(t)}}. \tag{12}$$

В силу (5), (7), (11) подвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$ определим из соотношения

$$\boldsymbol{b}(t) = b(t)\big[\omega_1(t)\boldsymbol{i}_1 + \omega_2(t)\boldsymbol{i}_2 + \omega_3(t)\boldsymbol{i}_3\big], \tag{13}$$

а неподвижный годограф – из соотношения

$$\boldsymbol{b}(t) = b(t)\big[\omega_\rho(t)\cos\alpha(t)\text{э}_1 + \omega_\rho(t)\sin\alpha(t)\text{э}_2 + \omega_\zeta(t)\text{э}_3\big]. \tag{14}$$

Здесь $b(t)$ имеет вид (12).

Движение тела будем воспроизводить качением подвижного годографа (13) по неподвижному годографу (14).

2. Решение Бобылева–Стеклова [9, 10]. Пусть в уравнениях (1) $\boldsymbol{e} = (1,0,0)$, $A = \mathrm{diag}\,(2A_2, A_2, A_3)$, а в интегралах (2) – $2E = A_1\varkappa^2 + H$, $k = 2A_2H/s$, где $\varkappa, H$ – параметры. Решение Бобылева–Стеклова уравнений (1) запишем в обозначениях [4]:

$$\begin{gathered}\omega_1 = \varkappa, \qquad \omega_3 = 0, \qquad \nu_1 = \frac{1}{s}\left(\frac{A_2}{2}\omega_2^2 + H\right), \qquad \nu_2 = -\frac{\varkappa A_2}{s}\omega_2, \\ \nu_3 = \frac{1}{s}\sqrt{f(\omega_2)}, \qquad \frac{d\omega_2}{dt} = -\frac{1}{A_2}\sqrt{f(\omega_2)},\end{gathered} \tag{15}$$

где $\varkappa$ – произвольная постоянная и

$$f(\omega_2) = -\frac{A_2^2}{4}\omega_2^4 - A_2(\varkappa^2 A_2 + H)\omega_2^2 + s^2 - H^2. \tag{16}$$

Из (15), (16) вытекает, что подвижный годограф угловой скорости – отрезок прямой, а решение выражается посредством эллиптических функций Якоби [10].

Видоизменяя подход В.А. Стеклова [10], примем в качестве вспомогательной переменной ν_1. Тогда решение (15), (16) можно записать так:

$$\omega_1 = \varkappa, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2s}{A_2}\left(\nu_1 - \nu_1^{(1)}\right)}, \quad \omega_3 = 0, \quad \left(\nu_1^{(1)} = \frac{H}{s}\right), \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\nu_2 = -\varkappa\sqrt{\frac{2A_2}{s}\left(\nu_1 - \nu_1^{(1)}\right)}, \quad \nu_3 = \frac{1}{s}\sqrt{\varphi(\nu_1)}, \\ \frac{d\nu_1}{dt} = -\sqrt{\frac{2}{A_2 s}}\sqrt{\left(\nu_1 - \nu_1^{(1)}\right)\varphi_1(\nu_1)}, \\ \varphi_1(\nu_1) = -s^2\nu_1^2 - 2\varkappa^2 A_2 s\nu_1 + 2\varkappa^2 A_2 H + s^2.\end{gathered} \tag{18}$$

Параметр $s > 0$, чего можно добиться выбором подвижной системы координат. Для действительности решения (17), (18) полагаем

$$-s < H < s. \tag{19}$$

Переменная ν_1 изменяется в промежутке

$$\nu_1^{(1)} \le \nu_1 \le \nu_1^{(2)}, \tag{20}$$

где $\nu_1^{(1)}$ указано в (17), а $\nu_1^{(2)}$ – положительный корень уравнения $\varphi_1(\nu_1) = 0$:

$$\nu_1^{(2)} = \frac{1}{s}\left(-\varkappa^2 A_2 + \sqrt{\varkappa^4 A_2^2 + 2\varkappa^2 A_2 H + s^2}\right). \tag{21}$$

В силу (18) зависимость $\nu_1(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{\nu}_1 = -\sqrt{\frac{2}{A_2}}\sqrt{(\nu_1 - \nu_1^{(1)})(\nu_1^{(2)} - \nu_1)(\nu_1 - \nu_1^{(3)})}, \tag{22}$$

здесь

$$\nu_1^{(3)} = \frac{1}{s}\left(-\varkappa^2 A_2 - \sqrt{\varkappa^4 A_2^2 + 2\varkappa^2 A_2 H + s^2}\right). \tag{23}$$

Применяя стандартную процедуру нахождения $\nu_1(t)$ из (22), получим

$$\nu_1(t) = \nu_1^{(2)} - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*), \tag{24}$$

где

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{s\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)}{A_2}}, \quad \kappa_*^2 = \frac{\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}}{\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}}. \tag{25}$$

В выражениях для λ_0 и κ_* из (25) величины $\nu_1^{(2)}$, $\nu_1^{(3)}$ имеют вид (21), (23). Параметр H в этих формулах изменяется в промежутке (19) (случаи кратных корней $\nu_1^{(2)} = \nu_1^{(3)}$, $\nu_1^{(2)} = \nu_1^{(1)}$ исключаем). Внесем (24) в выражения (17):

$$\begin{gathered}\omega_1 = \varkappa, \quad \omega_2 = \lambda_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\,(\lambda_0 t, \kappa_*), \quad \omega_3 = 0, \quad \nu_2 = -\frac{\varkappa A_2}{s}\lambda_0\sqrt{2}\,\mathrm{cn}\,(\lambda_0 t, \kappa_*), \\ \nu_3 = \sqrt{\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)}\,\mathrm{dn}\,(\lambda_0 t, \kappa_*)\mathrm{sn}\,(\lambda_0 t, \kappa_*).\end{gathered} \tag{26}$$

Найдем из (4) уравнения неподвижного годографа для решения Бобылева–Стеклова, используя явные зависимости (26):

$$\omega_\zeta(t) = \varkappa\left[\left(\nu_1^{(2)} - 2\nu_1^{(1)}\right) - \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\mathrm{sn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)\right], \tag{27}$$

$$\omega_\rho^2(t) = \left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}\right)\left(\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(3)}\right)\left[\lambda_0^2\mathrm{cn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*) + \varkappa^2\mathrm{dn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)\mathrm{sn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)\right], \tag{28}$$

$$\alpha(t) = -\frac{s\varkappa}{A_2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{dn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)\mathrm{sn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)dt}{\left[\lambda_0^2\mathrm{cn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*) + \varkappa^2\mathrm{dn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)\mathrm{sn}^2(\lambda_0 t, \kappa_*)\right]}. \tag{29}$$

Правые части равенств (27), (28) и подынтегральная функция в (29) являются периодическими функциями t с периодом $T = \dfrac{2K}{\lambda_0}$, где

$$K = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - \kappa_*^2\sin^2 u}} \tag{30}$$

– полный эллиптический интеграл первого рода. Из формулы (29) следует, что

$$\alpha = -\frac{s\varkappa}{A_2}g_0 + \psi(t), \tag{31}$$

где $\psi(t)$ – периодическая функция с периодом $\dfrac{2K}{\lambda_0}$ (K – выражается по формуле (30)), а g_0 – среднее значение, имеющее вид

$$g_0 = \frac{\lambda_0}{2K} \int\limits_0^{\frac{2K}{\lambda_0}} F(t)dt. \tag{32}$$

Здесь $F(t)$ – подынтегральная функция интеграла (29).

Запишем неподвижный годограф в векторном виде, используя (27), (28) и (31):

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_\xi(t)\text{э}_1 + \omega_\eta(t)\text{э}_2 + \omega_\zeta(t)\text{э}_3, \tag{33}$$

где

$$\omega_\xi(t) = \omega_\rho \cos\left(-\frac{\varkappa s}{A_2} g_0 + \psi(t)\right), \quad \omega_\eta(t) = \omega_\rho \sin\left(-\frac{\varkappa s}{A_2} g_0 + \psi(t)\right). \tag{34}$$

Кинематическое истолкование движения тела прямым методом Пуансо в случае Бобылева–Стеклова дано в [4].

Представим движение тела для этого решения методом [8]. Из (9), подставив решения (26), имеем уравнение подвижного годографа

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{\varkappa}{\omega_\zeta(t)}\boldsymbol{i}_1 + \frac{\lambda_0\sqrt{2}\mathrm{cn}\,(\lambda_0 t, \kappa_*)}{\omega_\zeta(t)}\boldsymbol{i}_2, \tag{35}$$

где $\omega_\zeta(t)$ определено формулой (27).

Неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$ в силу (8) является плоской кривой, заключенной между двумя окружностями с общими центрами. Из формулы (29) следует, что угол $\alpha(t)$ при $\varkappa < 0$ монотонно возрастает, при $\varkappa > 0$ – монотонно убывает.

Исследуем кривую (35). Она так же, как и неподвижный годограф, является плоской кривой. Обозначим компоненты b_i вектора $\boldsymbol{b}(t)$ из (11) через x, y, z. Из (35) следует

$$x = \frac{\varkappa}{\omega_\zeta(t)}, \qquad y = \frac{\lambda_0\sqrt{2}\mathrm{cn}\,(\lambda_0 t, \kappa_*)}{\omega_\zeta(t)}, \qquad z = 0. \tag{36}$$

Используя формулу (27), исключим переменную t из соотношений (36):

$$4H^2\left(x - \frac{s}{2H}\right)^2 - 2A_2 y^2 H = s^2. \tag{37}$$

Так как в силу постановки задачи $\omega_\zeta \neq 0$, то считаем выполненным одно из неравенств

$$\begin{gathered} H > \frac{1}{4}\left(\varkappa^2 A_2 + \sqrt{\varkappa^4 A_2^2 + 4s^2}\right), \\ H < -\frac{1}{4}\left(\varkappa^2 A_2 + \sqrt{\varkappa^4 A_2^2 + 4s^2}\right) \quad \left(s > \frac{2}{3}\varkappa^2 A_2\right). \end{gathered} \tag{38}$$

Когда выполнено первое условие из (38), кривая (37) является гиперболой, когда выполнено второе условие – эллипсом. Следовательно, при кинематическом истолковании с помощью качения кривой (36) по кривой (8) получим в первом случае качение гиперболы (37) по кривой (8), а во втором – качение эллипса по кривой (8).

Рассмотрим второй подход в истолковании движения гироскопа Бобылева–Стеклова. Используя формулы (10)–(12), а также соотношения $A_1 = 2A_2$ и (15), получим

$$b(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{s\nu_1(t) + h_0}} \qquad \left(\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}}, \quad h_0 = A_2\varkappa^2 - H\right), \tag{39}$$

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{s\nu_1(t) + h_0}} \left(\varkappa \boldsymbol{i}_1 - \sqrt{\frac{2}{A_2}(s\nu_1(t) - H)}\boldsymbol{i}_2\right). \tag{40}$$

В формулах (39), (40) $s\nu_1(t) + h_0 > 0$, что вытекает из условий действительности решения (17), (18). Пусть, как и ранее, $\boldsymbol{b}(t) = x\boldsymbol{i}_1 + y\boldsymbol{i}_2$. Тогда подвижный годограф является частью кривой

$$2x^2 + y^2 = \frac{\sigma_0^2}{A_2}. \tag{41}$$

Выпишем неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$. Для этой цели воспользуемся формулами (27), (31):

$$\boldsymbol{b}(t) = b(t)\big[\omega_\xi(t)\boldsymbol{\mathfrak{e}}_1 + \omega_\eta(t)\boldsymbol{\mathfrak{e}}_2 + \omega_\zeta(t)\boldsymbol{\mathfrak{e}}_3\big]. \tag{42}$$

Здесь $b(t)$ имеет вид (39), а функции $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ – вид (34). Движение гироскопа Бобылева–Стеклова можно представить качением без скольжения кривой (41) по кривой (42).

Обозначим через ξ, η, ζ компоненты вектора $\boldsymbol{b}(t)$ в неподвижном пространстве. Используя формулы (34), (39), (42), получим уравнение поверхности, на которой лежит конец вектора (42):

$$A_2\varkappa^2[R^2(A_2\varkappa^2 + H) - 4\sigma_1^2 H]^2 + h_0 s^2\zeta^2(R^2 - 2\sigma_1^2) = 0, \tag{43}$$

где $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

Таким образом, движение эллипсоида инерции в неподвижном пространстве можно представить качением без скольжения кривой (40) по кривой (42). При этом кривая (42) лежит на поверхности четвертого порядка, которая является поверхностью вращения.

3. Решение А.И. Докшевича. Как было показано в [11], решение А.И. Докшевича [12] характеризуется свойством прецессионности. Рассмотрим в подвижной системе координат единичный вектор $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$. Компоненты тензора инерции и координаты вектора $\boldsymbol{e}$ в этой системе удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} A_{23} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad 4A_{13}^4 + A_{13}^2 c_1(A_{11} + 3A_{22} - 4A_{33}) - A_{11}A_{33}c_2 = 0, \\ e_2 = 0, \quad e_1 A_{13}[2A_{13}^2 + c_1(A_{22} - 2A_{33})] + e_3 c_1 c_2 = 0, \end{gathered} \tag{44}$$

где $c_1 = A_{11} - A_{22}$, $c_2 = A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2$.

Примем для постоянных первых интегралов (2) следующие значения:

$$k = 0, \qquad E = -\frac{a_0 s}{A_{13}}(e_1 A_{33} + e_3 A_{13}), \tag{45}$$

где a_0 – параметр ($|a_0| < 1$). Тогда уравнения (1) допускают решение [11]

$$\begin{gathered}\omega_1 = a_0'\dot\psi\sin\varphi, \quad \omega_2 = a_0'\dot\psi\cos\varphi, \quad \omega_3 = \dot\varphi + a_0\dot\psi,\\ \nu_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0,\end{gathered} \tag{46}$$

где $a_0' = \sqrt{1 - a_0^2}$ и

$$\dot\varphi = \sqrt{\beta_1 + \beta_2\sin\varphi}, \quad \dot\psi = \frac{\beta}{\dot\varphi}, \tag{47}$$

$$\begin{gathered}\beta_1 = \frac{2e_1 a_0 s(2A_{13}^2 - A_{33}c_1)}{A_{13}c_2}, \quad \beta_2 = \frac{2e_1 a_0' s c_1}{c_2}, \quad \beta = -\frac{2e_1 s A_{13}}{c_2},\\ \operatorname{ctg}^2\theta_0 = -\frac{A_{22}A_{13}^2}{c_2 A_{33}}.\end{gathered} \tag{48}$$

Из последнего равенства системы (46) следует, что $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nu} = \cos\theta_0$. То есть в процессе движения гироскопа Докшевича угол θ_0 между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ постоянен. Первые три равенства из (46) дают следующее значение для вектора $\boldsymbol{\omega}$: $\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{a} + \dot\psi\boldsymbol{\nu}$. Следовательно, прецессионное движение (46) является прецессией общего вида [11], причем в силу (47) произведение $\dot\varphi\dot\psi$ не изменяется с течением времени.

Для нахождения из равенства (47) зависимости $\varphi(t)$ полагаем, что параметры (44) удовлетворяют условиям $\beta_1 > -\beta_2 > 0$. Тогда из (47) получим

$$\begin{gathered}\dot\varphi = 2\mu_1 \operatorname{dn}\mu_1 t, \quad \varphi = 2\operatorname{am}\mu_1 t - \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \arccos\frac{\operatorname{cn}\mu_1 t}{\operatorname{dn}\mu_1 t},\\ \sin\varphi = -1 + 2\operatorname{sn}^2\mu_1 t, \quad \cos\varphi = 2\operatorname{sn}\mu_1 t\operatorname{cn}\mu_1 t.\end{gathered} \tag{49}$$

Модуль эллиптических функций $\operatorname{am}\mu_1 t$, $\operatorname{sn}\mu_1 t$, $\operatorname{cn}\mu_1 t$, $\operatorname{dn}\mu_1 t$ равен $k_2 = \sqrt{2\beta_2/(\beta_2 - \beta_1)}$, а параметр $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}$.

Используя соотношения (46), (49), запишем разложение вектора $\boldsymbol{\omega}$ в подвижной системе координат

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2\mu_1\operatorname{dn}\mu_1 t}[a_0'\beta(2\operatorname{sn}^2\mu_1 t - 1)\boldsymbol{i}_1 + 2a_0'\beta\operatorname{sn}\mu_1 t\operatorname{cn}\mu_1 t\boldsymbol{i}_2 + (a_0\beta + 4\mu_1^2\operatorname{dn}^2\mu_1 t)\boldsymbol{i}_3]. \tag{50}$$

Для определения $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной системе координат воспользуемся формулами (4)

$$\boldsymbol{\omega} = 2a_0'\mu_1\operatorname{cn}\mu_1 t\,\text{э}_1 + 2a_0'\mu_1 k_2'\operatorname{sn}\mu_1 t\,\text{э}_2 + \frac{\beta + 4a_0\mu_1^2\operatorname{dn}\mu_1 t}{2\mu_1\operatorname{dn}\mu_1 t}\text{э}_3, \tag{51}$$

где $k_2' = \sqrt{1 - k_2^2}$ – сопряженный модуль.

Пусть компоненты вектора (7) $b_1 = x$, $b_2 = y$, $b_3 = z$ удовлетворяют уравнению (10). Тогда

$$b(t) = \frac{\mu_0}{\sqrt{m_0 + n_0 \mathrm{sn}^2 \mu_1 t}} \tag{52}$$

$$\left(\mu_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{A_{13}}{2a_0 s e_1}}, \quad n_0 = -a_0 A_{33} - a_0' A_{13}, \quad m_0 = 2a_0' A_{13}\right).$$

Запишем на основе соотношений (50)–(52) выражения для вектора $\boldsymbol{b(t)}$, соответственно, в подвижном и неподвижном пространстве:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}(t) = \frac{b(t)}{2\mu_1 \mathrm{dn}\, \mu_1 t}[a_0'\beta(2\mathrm{sn}^2 \mu_1 t - 1)\boldsymbol{i}_1 + 2a_0'\beta \mathrm{sn}\, \mu_1 t \mathrm{cn}\, \mu_1 t \boldsymbol{i}_2 + \\ + (a_0\beta + 4\mu_1^2 \mathrm{dn}^2 \mu_1 t)\boldsymbol{i}_3]; \end{aligned} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{b}(t) = b(t)\left[2a_0'\mu_1 \mathrm{cn}\, \mu_1 t \text{э}_1 + 2a_0'\mu_1 k_2' \mathrm{sn}\, \mu_1 t \text{э}_2 + \frac{\beta + 4a_0\mu_1^2 \mathrm{dn}^2 \mu_1 t}{2\mu_1 \mathrm{dn}\, \mu_1 t}\text{э}_3\right]. \tag{54}$$

Рассмотрим компоненты x, y, z вектора (53). Исключим параметр t из уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$l_0^2 y^2 = [(a_0\beta + 4\mu_1^2)x + a_0'\beta z][-(4\mu_1 k_2'^2 + a_0\beta)x + a_0'\beta z]. \tag{55}$$

Здесь $l_0 = a_0\beta + 2\mu_0^2(2 - k^2)$. Следовательно, подвижный годограф вектора (53) – линия пересечения эллипсоида инерции (10) и конуса (55). Обозначим через ξ, η, ζ компоненты вектора (54). Исключим из уравнений $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, $\zeta = \zeta(t)$ переменную t:

$$m_0 k_2'^2 \xi^2 + (n_0 + m_0)\eta^2 = 4a_0'^2 \mu_1^2 k_2'^2 \mu_0'^2, \tag{56}$$

$$p_0^2 \zeta^2 (\xi^2 + \eta^2) = (q_0 \xi^2 + r_0 \eta^2)^2, \tag{57}$$

где $p_0^2 = 16a_0'^2 \mu_1^4 k_2'^4$, $q_0 = k_2'^2(\beta + 4a_0\mu_1^2)$, $r_0 = \beta + 4a_0^2\mu_1^2 k_2'^2$.

Таким образом, неподвижный годограф вектора (54) – линия пересечения цилиндра (56) и поверхности четвертого порядка (57).

Движение эллипсоида инерции можно представить посредством качения без скольжения кривой, которая является линией пересечения эллипсоида инерции и (55), по кривой – линии пересечения поверхностей (56) и (57).

Для изучения уравнения (57) введем цилиндрические координаты

$$\zeta = \zeta, \quad \xi = \rho \cos\psi, \quad \eta = \rho \sin\psi. \tag{58}$$

Подставим выражения (58) в уравнение (57)

$$\zeta = \frac{\rho}{p_0}(q_0 \cos^2\psi + r_0 \sin^2\psi). \tag{59}$$

Пусть при $\zeta = \zeta_0$ поверхности (56), (57) пересекаются. Запишем при $\zeta = \zeta_0$ уравнение (59)

$$\rho = \frac{p_0\zeta_0}{q_0\cos^2\psi + r_0\sin^2\psi}. \tag{60}$$

Уравнение (60) описывает в плоскости $\zeta = \zeta_0$ кривую, которая аффинным преобразованием может быть приведена к лемнискате Бута [13].

4. Решение В.А. Стеклова [14]. Это решение уравнений Эйлера–Пуассона (1) получено при условиях $e_3 = e_2 = 0$ и имеет вид [15]

$$\begin{aligned}
&\frac{A_3 - A_2}{A_1}\omega_2^2 = \frac{A_1 - A_3}{2A_2 - A_1}\omega_1^2 + \frac{2A_3 - A_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}H,\\
&\frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_3^2 = \frac{A_1 - A_2}{2A_3 - A_1}\omega_1^2 + \frac{2A_2 - A_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}H,\\
&\nu_1\Gamma = \frac{A_1(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{(2A_2 - A_1)(2A_3 - A_1)}\omega_1^2 + H,\\
&\nu_2\Gamma = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{2A_3 - A_1}\omega_1\omega_2,\\
&\nu_3\Gamma = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)}{2A_2 - A_1}\omega_1\omega_3, \quad \dot\omega_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_2\omega_3,
\end{aligned} \tag{61}$$

где $H = \pm s$, A_i – главные моменты инерции тела.

Для примера рассмотрим случай $H = -s$. Следуя [15], запишем решение Стеклова (61) в виде

$$\omega_1 = p_{10}\mathrm{cn}\,\chi t, \qquad \omega_2 = -p_{20}\mathrm{sn}\,\chi t, \qquad \omega_3 = p_{30}\mathrm{dn}\,\chi t, \tag{62}$$

где

$$\begin{aligned}
&p_{10} = \sqrt{\frac{(1-2c)(2b-1)}{(1-c)^2(b-1)}}, \qquad p_{20} = \sqrt{\frac{1-2c}{(1-c)(b-1)(b-c)}},\\
&p_{30} = \sqrt{\frac{2b-1}{(1-c)^2(b-1)}}, \qquad \chi = \sqrt{\frac{b-c}{(1-c)(b-1)}},\\
&k_3 = \sqrt{\frac{b-1}{b-c}}, \qquad b = \frac{A_2}{A_1}, \qquad c = \frac{A_3}{A_1}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Величины p_{10}, p_{20}, p_{30} характеризуют вид подвижного годографа (62).

Неподвижный годограф вектора угловой скорости выражается по формулам [15]

$$\omega_\xi = p_{30}\mathrm{dn}\,\chi t, \quad \omega_\eta = p_{20}\mathrm{sn}\,\chi t, \quad \omega_\zeta = -p_{10}\mathrm{cn}\,\chi t. \tag{64}$$

В [15] дано истолкование движения гироскопа Стеклова с помощью метода годографов, в [8] движение этого гироскопа было представлено качением без скольжения кривых, заданных векторами

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{p_{10}\mathrm{cn}\,\chi t}{\mathrm{dn}\,\chi t}\boldsymbol{i}_1 - \frac{p_{20}\mathrm{sn}\,\chi t}{\mathrm{dn}\,\chi t}\boldsymbol{i}_2 + p_{30}\boldsymbol{i}_3,$$

$$\boldsymbol{b}(t) = p_{30}\boldsymbol{э}_1 + \frac{p_{20}\mathrm{sn}\,\chi t}{\mathrm{dn}\,\chi t}\boldsymbol{э}_2 - \frac{p_{10}\mathrm{cn}\,\chi t}{\mathrm{dn}\,\chi t}\boldsymbol{э}_3,$$

и показано, что обе указанные кривые являются эллипсами.

Запишем вектор (13) для случая (62). С точностью до постоянного множителя, который не влияет на общность задачи, получим

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{1+\mu_0\mathrm{sn}^2\chi t}}(p_{10}\mathrm{cn}\,\chi t, -p_{20}\mathrm{sn}\,\chi t, p_{30}\mathrm{dn}\,\chi t), \qquad (65)$$

где $\beta_0 = \mathrm{const}$, $\mu_0 = \dfrac{2(1-b)}{2b-1}$, а χ и p_{i0} $(i = \overline{1,3})$ имеют значения из (63).

Из (65) вытекает, что компоненты x, y $(b_1(t), b_2(t))$ удовлетворяют уравнению

$$x^2p_{20}^2 + (1+\mu_0)y^2p_{10}^2 = \beta_0^2p_{10}^2p_{20}^2. \qquad (66)$$

Второе уравнение, которому удовлетворяют компоненты вектора (65) для случая Стеклова, найдем из соотношения (10), полагая $A_2 = bA_1$, $A_3 = cA_1$:

$$x^2 + by^2 + cz^2 = \sigma_1^2, \qquad (67)$$

где σ_1 – постоянная. Таким образом, подвижный годограф вектора (65) является линией пересечения цилиндра (66) и эллипсоида инерции (67).

Неподвижный годограф вектора $\boldsymbol{b}(t)$ в силу равенства (64) имеет вид

$$\boldsymbol{b}(t) = \frac{\beta_0}{\sqrt{1+\mu_0\mathrm{sn}^2\chi t}}(p_{30}\mathrm{dn}\,\chi t, p_{20}\mathrm{sn}\,\chi t, -p_{10}\mathrm{cn}\,\chi t). \qquad (68)$$

Движение гироскопа Стеклова можно воспроизвести качением без скольжения годографа (65) по годографу (68), который является также линией пересечения эллипсоида инерции и цилиндра. Следовательно, движение эллипсоида инерции в рассматриваемом случае представимо качением по эллипсоиду, определяемому, аналогично эллипсоиду (67), с помощью компонент неподвижного вектора (68).

1. *Poinsot L.* Théorie nouvelle de la rotation des corps // J. Math. Pures et Appl. – 1851. – Bd. 1, № 16. – P. 289–336.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – К.: Наук. думка, 1978. – 294 с.
3. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 158–159.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-е Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.

5. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-е ДонНУ, 2010. – 364 с.
6. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
7. *Гашененко И.Н.* Кинематическое истолкование по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 12–20.
8. *Горр Г.В.* Об одном подходе в применении теоремы Пуансо кинематического истолкования движения тела с неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 26–36.
9. *Бобылев Д.К.* Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1896. – **8**, вып. 2. – С. 21–25.
10. *Стеклов В.А.* Один случай движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1896. – **8**, вып. 2. – С. 19–21.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: Изд-е ДонНУ, 2009. – 222 с.
12. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона. – К.: Наук. думка, 1992. – 168 с.
13. *Савелов А.А.* Плоские кривые. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 144 с.
14. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, № 1. – С. 1–3.
15. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 1986. – 296 с.

A.I. Synenko

On kinematic interpretation of motion of a heavy rigid body using Poinsot's method

According to the modification of Poinsot's method, the motion of a heavy rigid body in the particular cases of integrability of the Euler–Poinsot equations is represented as rolling without slipping of the movable godograph of some vector which belongs to the inertia ellipsoid, upon the fixed godograph.

Keywords: *kinematic interpretation, Poinsot's method, particular solution.*

А.І. Синенко

Про кінематичне тлумачення руху важкого твердого тіла методом Пуансо

На основі методу Пуансо та його модифікації рух важкого твердого тіла в окремих випадках інтегровності рівнянь Ейлера–Пуассона подано коченням без ковзання рухомого годографа вектора, що належить еліпсоїду інерції, по нерухомому годографу цього вектора.

Ключові слова: *кінематичне тлумачення, метод Пуансо, частинні розв'язки.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`forjobmain@gmail.com`

Получено 02.09.13