ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2013. Вып. 43

УДК 531.38

©2013. **Д.А. Данилюк**

ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПА ГЕССА В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА–ГАМИЛЬТОНА

Уравнения движения твердого тела, имеющего неподвижную точку, записаны в специальных осях с использованием параметров Родрига–Гамильтона. Рассмотрена задача построения решения этих уравнений, соответствующего решению Гесса. Поставленная задача сведена к дифференциальному уравнению второго порядка и в дальнейшем – к соотношениям, связывающим параметры Родрига–Гамильтона. Для случая нулевой постоянной интеграла площадей решение задачи выражено через эллиптические функции времени.

Ключевые слова: *решение Гесса, параметры Родрига–Гамильтона, углы Эйлера.*

Введение. Задача о колебаниях твердого тела, имеющего неподвижную точку и находящегося в поле силы тяжести, играет важную роль в динамике твердого тела. Значительный вклад в ее решение внесли работы [1, 2], в которых рассматривались нелинейные колебания около устойчивого положения равновесия. В последние годы исследование этих вопросов продолжено с применением параметров Родрига–Гамильтона [3]. Настоящая работа опирается на исследования [3, 4] и использует, в дополнение к специальной неподвижной системе координат, специальные подвижные оси [5], успешно примененные в статье [2]. Уравнения движения твердого тела записаны в специальных осях в параметрах Родрига–Гамильтона. Для изучения колебаний в общем случае выбран гироскоп Гесса, движение которого удобно рассматривать в специальной подвижной системе координат. В случае, когда постоянная k интеграла кинетического момента равна нулю, движения, соответствующие решению Гесса, носят колебательный характер [4]. Построено аналитическое решение поставленной задачи через эллиптические квадратуры в виде соотношений, связывающих параметры Родрига–Гамильтона.

1. Постановка задачи. Для описания движения твердого тела, имеющего неподвижную точку и находящегося в поле силы тяжести, в качестве подвижной системы координат, жестко связанной с телом, выбирается специальная система координат, введенная П.В. Харламовым [5]. Обозначим через x, y, z проекции вектора момента количества движения тела (кинетического момента) на выбранные оси; $\omega_i, \nu_i, e_i,\ i = 1, 2, 3$ – проекции на эти оси векторов угловой скорости, единичного вектора вертикали, направленного вверх, и единичного вектора $\mathbf{e}$, идущего из неподвижной точки в центр масс тела; a, a_1, a_2, b_1, b_2 – компоненты гирационного тензора в специальных осях; Γ – произведение веса тела на расстояние между центром масс и неподвижной точкой. Начало координат берется в неподвижной точке, первая ось проводится через центр масс тела, вторая и третья оси направляются так, чтобы выражение кинетической энергии имело вид $2T = ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2x(b_1y + b_2z)$.

В качестве неподвижной системы, следуя [4], выберем декартову систему координат с центром в неподвижной точке таким образом, чтобы проекции ν'_i вектора $\boldsymbol{\nu}$ на эти оси имели значения $\nu'_i = -e_i,\ i = 1, 2, 3$. Ее положение задается по таблице направляющих косинусов углов между неподвижной и специальной системами координат [6] через углы Эйлера ψ, ϑ, φ. Для фазовых переменных ω_i, ν_i в специальной системе координат принимаем следующие выражения [5]:

$$\begin{gathered} \nu_1 = \cos\vartheta, \qquad \nu_2 = \sin\varphi\sin\vartheta, \qquad \nu_3 = \cos\varphi\sin\vartheta; \\ \omega_1 = ax + b_1y + b_2z, \qquad \omega_2 = a_1y + b_1x, \qquad \omega_3 = a_2z + b_2x. \end{gathered} \tag{1}$$

Для введеных по Лурье [6] параметров Родрига–Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ с помощью соответствующей им таблицы косинусов имеем

$$\nu_1 = \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \quad \nu_2 = 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \quad \nu_3 = 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3). \tag{2}$$

Дифференциальные уравнения движения получим, подставив формулы (1), (2) в динамические уравнения П.В. Харламова [5]

$$\begin{gathered} \dot{x} = y(a_2z + b_2x) - z(a_1y + b_1x), \\ \dot{y} = z(ax + b_1y + b_2z) - x(a_2z + b_2x) - 2\Gamma(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \\ \dot{z} = -y(ax + b_1y + b_2z) + x(a_1y + b_1x) + 2\Gamma(\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3) \end{gathered} \tag{3}$$

и в кинематические уравнения для параметров Родрига–Гамильтона [6]

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1(ax + b_1y + b_2z) - \lambda_2(a_1y + b_1x) - \lambda_3(a_2z + b_2x), \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0(ax + b_1y + b_2z) + \lambda_2(a_2z + b_2x) - \lambda_3(a_1y + b_1x), \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0(a_1y + b_1x) + \lambda_3(ax + b_1y + b_2z) - \lambda_1(a_2z + b_2x), \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0(a_2z + b_2x) + \lambda_1(a_1y + b_1x) - \lambda_2(ax + b_1y + b_2z). \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнения (3), (4) допускают три первых интеграла: энергии, постоянства кинетического момента и геометрический:

$$\begin{gathered} ax^2 + a_1y^2 + a_2z^2 + 2(b_1y + b_2z)x - 2\Gamma(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 2E, \\ x(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) + 2y(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + 2z(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = k, \\ \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1. \end{gathered}$$

2. Гироскоп Гесса. Гироскоп Гесса характеризуется следующим распределением масс:

$$a_1 = a_2 = a_*, \quad b_2 = 0. \tag{5}$$

При условиях (5) В. Гессом было найдено инвариантное соотношение для системы (3), (4):

$$x = 0. \tag{6}$$

При $b_1 = 0$ приходим к случаю Лагранжа, поэтому в дальнейшем считаем $b_1 \neq 0$. Пусть $b_1 > 0$. Введем безразмерные переменные

$$y = \sqrt{\frac{\Gamma}{b_1}} y', \qquad z = \sqrt{\frac{\Gamma}{b_1}} z', \qquad \omega_i = a_* \sqrt{\frac{\Gamma}{b_1}} \omega_i', \qquad t = \frac{\tau}{\sqrt{\Gamma b_1}}$$

и параметры

$$c = \frac{2b_1}{a_*}, \qquad h = \frac{E}{\Gamma}, \qquad k' = 2k\sqrt{\frac{b_1}{\Gamma}}.$$

Тогда уравнения (3), (4) примут следующий вид (для сокращения записи штрихи у безразмерных величин опускаем)

$$\begin{gathered} \dot{y} = yz - 2(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \qquad \dot{z} = -y^2 + 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \\ c\dot{\lambda}_0 = -\Big(\frac{c}{2}\lambda_1 + \lambda_2\Big)y - \lambda_3 z, \quad c\dot{\lambda}_1 = \Big(\frac{c}{2}\lambda_0 - \lambda_3\Big)y + \lambda_2 z, \\ c\dot{\lambda}_2 = \Big(\lambda_0 + \frac{c}{2}\lambda_3\Big)y - \lambda_1 z, \quad c\dot{\lambda}_3 = \Big(\lambda_1 - \frac{c}{2}\Big)y + \lambda_0 z, \\ y^2 + z^2 - c(\lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) = ch, \\ 2y(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + 2z(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) = k, \qquad \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \end{gathered} \tag{7}$$

а компоненты вектора угловой скорости равны

$$\omega_1 = \frac{c}{2}y, \qquad \omega_2 = y, \qquad \omega_3 = z. \tag{8}$$

Выразив величины b_1 и a_* через компоненты тензора инерции и применив неравенства, связывающие моменты инерции, получим, что областью изменения параметра c является интервал $(0, 2]$.

Первые два уравнения системы (7), введя полярные координаты $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, преобразуем в систему двух дифференциальных уравнений [7], где зависимость ρ от φ определяется из уравнения

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\rho^3\cos\varphi - k}{\rho\sqrt{\rho^2\left[1 - \left(\frac{\rho^2}{c} - h\right)^2\right] - k^2}}. \tag{9}$$

Заменой $y = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ равенство (9) приводится к уравнению Рикатти [7], сводящегося к линейному дифференциальному уравнению второго порядка, коэффициенты которого есть полиномы от ρ.

3. Случай k=0. При нулевой константе площадей ($k = 0$) уравнение (9) интегрируется [7]. В этом случае имеем $\rho = \sqrt{c(h + \cos\vartheta)}$, где

$$\vartheta = \frac{2}{c}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + n\right],$$

n – постоянная интегрирования, а значит, известны и компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижной цилиндрической системе координат α, ρ, φ, зависящие от λ_i.

Находим величины $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, входящие в уравнения (7). Так как при $k = 0$ имеем [6, с. 68]

$$\dot{\psi} = \frac{2}{c \sin\vartheta}(\omega_2 \sin\varphi + \omega_3 \cos\varphi) = \frac{2\big[y(-\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + z(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3)\big]}{c(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)} = 0,$$

то положим $\psi = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда получаем соотношения для проекций вектора угловой скорости на оси, связанные с телом [6]:

$$\omega_1 = \frac{c}{2}\dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \frac{c}{2}\dot{\vartheta}\cos\varphi, \quad \omega_3 = -\frac{c}{2}\dot{\vartheta}\sin\varphi, \quad \frac{c^2}{4}\dot{\vartheta}^2 = \omega_2^2 + \omega_3^2 = (y^2 + z^2). \tag{10}$$

Его проекции на неподвижные оси равны $\Omega_1 = \dfrac{c}{2}\dot{\varphi}\cos\vartheta$, $\Omega_2 = \dfrac{c}{2}\dot{\varphi}\sin\vartheta$, $\Omega_3 = \dfrac{c}{2}\dot{\vartheta}$. Отсюда находим

$$\frac{c}{2}\dot{\varphi} = \omega_1, \qquad \frac{c}{2}\dot{\vartheta} = \Omega_3, \qquad \dot{\vartheta}^2 = c\,(h + \cos\vartheta)\,, \qquad \dot{\varphi} - \frac{c}{2}\dot{\vartheta}\cos\varphi = 0. \tag{11}$$

В итоге справедливы соотношения

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 = \omega_1^2, \qquad \Omega_3^2 = \omega_2^2 + \omega_3^2, \qquad \omega_1 - \frac{c}{2}\omega_2 = 0, \qquad \Omega_3^2 = c\left(h + \frac{\Omega_1}{\omega_1}\right).$$

Так же при $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ получим из таблиц косинусов [6] соотношения, выражающие углы Эйлера ϑ, φ через параметры Родрига–Гамильтона:

$$\begin{aligned} \sin\vartheta &= 2\,(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)\,, & \cos\vartheta &= \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \\ \sin\varphi &= \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - \lambda_0^2 - \lambda_2^2, & \cos\varphi &= 2\,(\lambda_0\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2) \end{aligned} \tag{12}$$

и равенство

$$\lambda_0\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3 = 0. \tag{13}$$

Известны следующие уравнения для параметров Родрига–Гамильтона в подвижной и неподвижной системах координат [6]:

$$\begin{aligned} c\dot{\lambda}_0 &= -\,(\omega_2\lambda_1 + \omega_3\lambda_2 + \omega_1\lambda_3)\,, & c\dot{\lambda}_0 &= -\,(\Omega_2\lambda_1 + \Omega_3\lambda_2 + \Omega_1\lambda_3)\,, \\ c\dot{\lambda}_1 &= \omega_2\lambda_0 + \omega_1\lambda_2 - \omega_3\lambda_3, & c\dot{\lambda}_1 &= \Omega_2\lambda_0 + \Omega_3\lambda_3 - \Omega_1\lambda_2, \\ c\dot{\lambda}_2 &= \omega_3\lambda_0 + \omega_2\lambda_3 - \omega_1\lambda_1, & c\dot{\lambda}_2 &= \Omega_3\lambda_0 + \Omega_2\lambda_2 - \Omega_2\lambda_3, \\ c\dot{\lambda}_3 &= \omega_1\lambda_0 + \omega_3\lambda_1 - \omega_2\lambda_2; & c\dot{\lambda}_3 &= \Omega_1\lambda_0 + \Omega_1\lambda_1 - \Omega_3\lambda_1. \end{aligned}$$

Отсюда находим геометрический интеграл

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Далее из [6, с. 119] с учетом (11) имеем

$$\dot\varphi = 2\left(\lambda_0\dot{\lambda_3} - \lambda_3\dot{\lambda_0} + \lambda_2\dot{\lambda_1} - \lambda_1\dot{\lambda_2}\right), \qquad \dot\vartheta = 2\left(\lambda_0\dot{\lambda_2} - \lambda_2\dot{\lambda_0} + \lambda_1\dot{\lambda_3} - \lambda_3\dot{\lambda_1}\right)$$

и, следовательно, в силу (13) получаем два уравнения

$$\dot\varphi = 2\left(\lambda_0^2 + \lambda_2^2\right)\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right)^{\cdot}, \qquad \dot\vartheta = 2\left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{\cdot}, \tag{14}$$

которые, с учетом (12), вместе с уравнением $\dot\varphi - \dfrac{c}{2}\dot\vartheta\cos\varphi = 0$ из (11) легко интегрируются:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_0} - \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{c}\ln C_0\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right|\right\} = 0, \quad \vartheta - \vartheta_0 = \frac{2}{c}\ln C_0\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\right|, \quad \frac{\lambda_3}{\lambda_0} = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Продифференцировав $\operatorname{tg}\dfrac{\vartheta}{2} = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$, в силу (11) находим эллиптическую квадратуру для $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_0}$:

$$\left[\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)^{\cdot}\right]^2 = \frac{c}{4}\left(1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0^2}\right)\left[2 + (h-1)\left(1 + \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0^2}\right)\right]. \tag{15}$$

Для $\lambda_0^2 + \lambda_3^2 = \cos^2\dfrac{\vartheta}{2}$ имеем аналогичное уравнение

$$\left[\left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2\right)^{\cdot}\right]^2 = c\left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2\right)\left(1 - \lambda_0^2 - \lambda_3^2\right)\left[h - 1 + 2\left(\lambda_0^2 + \lambda_3^2\right)\right].$$

Таким образом, задача свелась к дифференциальному уравнению (15), которое имеет решение, выражаемое в эллиптических функциях времени.

Воспользуемся результатами и обозначениями работы [8], тогда в случае $h \in (-1, 1)$ получаем

$$\begin{gathered}
\widetilde\lambda_0 = \frac{\sqrt2}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{dn}\tau, \qquad \widetilde\lambda_1 = \frac{\sqrt2}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \kappa\operatorname{sn}\tau, \\
\widetilde\lambda_2 = \frac{\sqrt2}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \kappa\operatorname{sn}\tau, \qquad \widetilde\lambda_3 = \frac{\sqrt2}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{dn}\tau, \\
\sigma = c(\varepsilon\arccos\operatorname{dn}\tau - \vartheta_0), \quad \kappa = \sqrt{(h+1)/2}, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(\operatorname{sn}\tau), \quad \tau = t - t_0.
\end{gathered} \tag{16}$$

В случае $h > 1$ получаем

$$\begin{gathered}
\widetilde\lambda_0 = \frac{\sqrt2}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{cn}\tau, \quad \widetilde\lambda_1 = \frac{\sqrt2}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{sn}\tau, \\
\widetilde\lambda_2 = \frac{\sqrt2}{2}(1 - \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{sn}\tau, \quad \widetilde\lambda_3 = \frac{\sqrt2}{2}(1 + \operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{cn}\tau, \\
\sigma = c(\arccos\operatorname{cn}\tau - \vartheta_0), \quad \kappa = \sqrt{2/(h+1)}, \quad \tau = \kappa^{-1}(t - t_0), \quad \varepsilon = \pm 1.
\end{gathered} \tag{17}$$

Пусть $h = 1$, тогда имеем движение твердого тела в окрестности неустойчивого положения равновесия:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\lambda}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{ch}^{-1}\tau, &&\widetilde{\lambda}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{th}\tau,\\ &\widetilde{\lambda}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{th}\tau, &&\widetilde{\lambda}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\operatorname{th}\sigma)^{1/2}\ \operatorname{ch}^{-1}\tau,\\ &\sigma = c(2\operatorname{arctg}\{e^{\tau}\} - \vartheta_0), &&\tau = t - t_0, \qquad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned} \tag{18}$$

В формулах κ – модуль эллиптической функции ($|\kappa| < 1$), период T не зависит от параметров $c \in (0,2]$ и $\vartheta_0 \in [0,\infty)$.

В работах [3, 4] используется специальная неподвижная система координат, предназначенная для изучения нормальных колебаний тела в окрестности положения равновесия. Параметры Родрига–Гамильтона λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 такой системы связаны с $\widetilde{\lambda}_i$ из (16)–(18) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = \mu_0\widetilde{\lambda}_0 - \mu_3\widetilde{\lambda}_3, &&\lambda_1 = \mu_0\widetilde{\lambda}_1 - \mu_3\widetilde{\lambda}_2,\\ &\lambda_2 = \mu_0\widetilde{\lambda}_2 - \mu_3\widetilde{\lambda}_1, &&\lambda_3 = \mu_0\widetilde{\lambda}_3 + \mu_3\widetilde{\lambda}_0, \end{aligned} \tag{19}$$

где μ_i [6, с. 110] – параметры конечного поворота системы координат из [8] к данной, при этом $e_3 = 0$, $2\mu_0\mu_3 = -e_2$, $\mu_0^2 - \mu_3^2 = -e_1$, $\mu_0^2 + \mu_3^2 = 1$.

Итак, получены формулы (16)–(18), выраженные через эллиптические функции времени, которые описывают движение гироскопа Гесса при нулевой константе площадей и установлена их связь с формулами работ [3, 4].

1. *Старжинский В.М.* Колебания тяжелого твердого тела с закрепленной точкой около нижнего положения равновесия в общем случае // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – Вып. 4. – С. 121–128.
2. *Илюхин А.А., Ковалев А.М.* Нормальные колебания твердого тела около положения устойчивого равновесия // Механика твердого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 65–71.
3. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Нелинейные колебания тяжелого твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 21–26.
4. *Ковалев А.М., Данилюк Д.А.* Линейные нормальные колебания твердого тела в параметрах Родрига–Гамильтона // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 3–9.
5. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд. НГУ, 1965. – 221 с.
6. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
7. *Ковалев А.М.* О движении тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 12–27.
8. *Гашененко И.Н.* Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 12–20.
9. *Козлов В.В.* Уравнение Гамильтона задачи о движении твердого тела с неподвижной точкой в избыточных координатах // Теор. и прикл. механика. – 1982. – Вып. 8. – С. 59–65.

D.A. Daniljuk

The motion of the Hess gyroscope in the Rodrigues-Hamilton parameters

The equations of motion for a rigid body with a fixed point are recorded in terms of the tensor components referred to some special basis using the Rodrigues–Hamilton parameters. The objective is to obtain a solution of these equations that corresponds to the Hess solution. The posed problem is reduced to the second-order differential equation and relations between the Rodrigues–Hamilton parameters. When the constant of the area integral is zero, the solution is expressed by elliptic functions.

Keywords: *the Hess solution, the Rodrigues–Hamilton parameters, Euler's angles.*

Д.А. Данилюк

Рухи гіроскопа Гесса в параметрах Родріга–Гамільтона

Рівняння руху твердого тіла, що має нерухому точку, записано в спеціальних вісях з використанням параметрів Родріга–Гамільтона. Розглянуто задачу побудови розв'язку цих рівнянь, який відповідає розв'язку Гесса. Поставлену задачу зведено до диференціального рівняння другого степеня і надалі – до співвідношень, що зв'язують параметри Родріга–Гамільтона. Для випадку нульової постійної інтеграла площ розв'язок задачі виражено через еліптичні функції часу.

Ключові слова: *розв'язок Гесса, параметри Родріга–Гамільтона, кути Ейлера.*

Ин-т прикл. математики и механики НАНУ, Донецк Получено 01.03.13

daniljuk@bk.ru