

УДК 531.38+517.938.5

©2013. И.И. Харламова, М.П. Харламов, А.Ю. Савушкин

## ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ДВУХЧАСТОТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА

С точки зрения визуализации движений рассматривается случай интегрируемости, найденный М.П. Харламовым (Механика твердого тела, 2002, вып. 32). Фазовое пространство задано двумя инвариантными соотношениями в общей интегрируемой неприводимой системе с тремя степенями свободы. Для почти всех наборов постоянных первых интегралов подвижный и неподвижный годографы всюду плотно заполняют двумерные поверхности. Получены явные параметрические уравнения этих поверхностей и матрицы ориентации, где в качестве параметров выступают переменные разделения. Указано правило, позволяющее избавиться от двузначных радикалов с целью вывода формул, применимых для компьютерной визуализации. Построены иллюстрации основных типов поверхностей. Сделаны выводы о характере движений.

**Ключевые слова:** *твердое тело, метод годографов, визуализация движения.*

**Введение.** В классических задачах динамики твердого тела (поле силы тяжести, центральное ньютоновское поле, движение тела в жидкости) подвижный годограф угловой скорости есть образ соответствующего решения уравнений Эйлера–Пуассона (или аналогичных им уравнений Кирхгофа) в пространстве угловых скоростей, отнесенных к подвижным осям. Для нахождения неподвижного годографа требуется дополнительная квадратура. Естественный способ записи уравнений неподвижного годографа и исследования семейства неподвижных годографов в зависимости от существующих параметров предложен П.В. Харламовым [1] и известен как метод годографов построения прямого геометрического истолкования движения твердого тела. Если подвижный годограф – замкнутая кривая (периодическое решение уравнений Эйлера–Пуассона), то неподвижный годограф лежит на двумерной поверхности и, как правило, заполняет всюду плотно некоторую область на ней. П.В. Харламов показал, что эта поверхность есть поверхность вращения, меридиан которой полностью определен подвижным годографом с использованием только конечных уравнений, а угловая координата неподвижного годографа находится интегрированием заданной функции времени. Однако для произвольных движений в интегрируемой задаче с осесимметричным силовым полем (в так называемой *приводимой* системе) подвижный годограф будет, вообще говоря, двухчастотной вектор-функцией времени, а следовательно, неподвижный годограф почти всегда будет заметать всюду плотно трехмерную область в неподвижном пространстве. Исследованию годографов в таких задачах (в том числе, в классических задачах Ковалевской и Горячева–Чаплыгина) посвящен ряд работ И.Н. Гашененко [2]–[8]. В частности, методами теории чисел и Фурье-анализа определяются классы движений в ин-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и ПВО (грант № 13-01-97025).

тегрируемых приводимых системах, для которых и координаты вектора угловой скорости в неподвижном пространстве являются двоякопериодическими функциями времени или, иначе говоря, однозначными функциями на регулярном двумерном торе Лиувилля приведенной системы (связной компоненте регулярного интегрального многообразия уравнений Эйлера – Пуассона).

В настоящей работе рассматривается случай, когда потенциал не обладает осью симметрии, но в шестимерном фазовом пространстве выделяются инвариантные четырехмерные многообразия, на которых индуцированная (а не приведенная) система имеет две степени свободы и интегрируема. Подобные системы возникают, например, как критические подсистемы в системах с тремя степенями свободы, а их исследование является необходимым этапом в анализе исходной задачи в целом. Регулярные интегральные многообразия состоят из двумерных торов Лиувилля, а оба годографа, как подвижный, так и неподвижный, принадлежат двумерным поверхностям в соответствующих пространствах (гладким проекциям торов из шестимерного пространства в трехмерное) и, для почти всех начальных данных, заполняют эти поверхности всюду плотно.

**1. Изучаемая система.** Рассматривается система с двумя степенями свободы, найденная в [9]. Ее явное решение в разделенных переменных указано в [10]. Там же представлены классификация решений и грубый топологический анализ этой системы. Запишем решение в обозначениях, удобных для целей настоящей работы. Предположим, что твердое тело с тензором инерции, удовлетворяющим условиям Ковалевской, помещено в двойное постоянное силовое поле, причем центры приложения полей расположены в экваториальной плоскости тела. Пусть  $O$  – неподвижная точка тела,  $\{e_1, e_2, e_3\}$  – подвижный ортонормированный базис главных осей инерции, а тензор инерции (после перехода к безразмерным величинам) имеет вид  $\text{diag}\{2, 2, 1\}$ . Как показано в [11], силы можно считать взаимно ортогональными, а центры приложений сил выбрать на главных осях инерции. Пусть  $\alpha, \beta$  – неподвижные в пространстве единичные направляющие векторы силовых полей, представленные своими координатами в подвижном базисе. Тогда геометрические интегралы имеют вид  $\alpha^2 = 1, \beta^2 = 1, \alpha \cdot \beta = 0$ , а полная энергия (гамильтониан) системы такова:

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (a\alpha_1 + b\beta_2).$$

Скалярные характеристики действия силового поля можно без ограничения общности считать подчиненными условию  $a > b > 0$  (в предельных случаях  $b = 0$  и  $b = a$  задача в целом приводится к двум степеням свободы понижением порядка по Раусу). При произвольных  $a, b$  интегрируемость общей неприводимой системы с тремя степенями свободы доказана в [12]. Из двух параметров  $a, b$  существенным является лишь один, но мы сохраним оба для большей симметричности полученных выражений.

Пространство переменных  $\omega_i, \alpha_j, \beta_k$  в силу геометрических интегралов шестимерно. В работе [9] указаны два инвариантных соотношения, определяющие рассматриваемую здесь систему. Далее для краткости говорим о си-

стеме  $\mathfrak{N}$ , подразумевая соответствующее четырехмерное инвариантное подмногообразии фазового пространства с индуцированной на нем динамикой. Система  $\mathfrak{N}$  является критической подсистемой [11] общей задачи Реймана–Семенова–Тян–Шанского. В дополнение к интегралу  $\{H = h\}$  система  $\mathfrak{N}$  имеет указанный в [9] частный интеграл  $\{M = m\}$ . Имеет место разделение переменных [10]. Приведем явные формулы для решения.

Положим

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \quad r = \sqrt{a^2 - b^2} > 0, \quad \ell = \sqrt{2p^2m^2 + 2hm + 1} \geq 0, \\ \Psi(s_1, s_2) &= 4ms_1s_2 - 2\ell(s_1 + s_2) + \frac{1}{m}(\ell^2 - 1), \quad \Phi(s) = \Psi(s, s), \\ F_1 &= \sqrt{-\Phi(s_1)}, \quad G_1 = \sqrt{s_1^2 - a^2}, \quad F_2 = \sqrt{\Phi(s_2)}, \quad G_2 = \sqrt{b^2 - s_2^2}. \end{aligned}$$

Выражения для фазовых переменных таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2a(s_1 - s_2)^2} [(s_1s_2 - a^2)\Psi + G_1G_2F_1F_2], \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2a(s_1 - s_2)^2} [(s_1s_2 - a^2)F_1F_2 - \Psi G_1G_2], \\ \beta_1 &= \frac{1}{2b(s_1 - s_2)^2} [\Psi G_1G_2 - (s_1s_2 - b^2)F_1F_2], \\ \beta_2 &= \frac{1}{2b(s_1 - s_2)^2} [(s_1s_2 - b^2)\Psi + G_1G_2F_1F_2], \\ \alpha_3 &= \frac{r G_1}{a(s_1 - s_2)}, \quad \beta_3 = \frac{r G_2}{b(s_1 - s_2)}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\omega_1 = \frac{r(\ell - 2ms_1)F_2}{2(s_1 - s_2)}, \quad \omega_2 = \frac{r(\ell - 2ms_2)F_1}{2(s_1 - s_2)}, \quad \omega_3 = -\frac{G_2F_1 + G_1F_2}{s_1 - s_2}. \tag{2}$$

Зависимость  $s_1, s_2$  от времени задана уравнениями

$$2\dot{s}_1 = F_1G_1, \quad 2\dot{s}_2 = F_2G_2. \tag{3}$$

Обозначим через  $h_a^\pm, h_b^\pm$  значения  $h$ , при которых хотя бы один из многочленов под радикалами в правых частях уравнений (3) имеет кратный корень:

$$h_a^\pm = r^2m \pm 2a, \quad h_b^\pm = -r^2m \pm 2b.$$

Эти прямые вместе с кривой  $\ell = 0$  определяют разбиение области существования решений на плоскости  $(m, h)$  на подобласти I–VI с регулярными интегральными многообразиями [10]:

$$\begin{aligned} I) &: \max(h_a^-, h_b^-) < h < \min(h_a^+, h_b^+); \\ II) &: \max(h_a^-, h_b^+) < h < h_a^+; \\ III) &: \max(h_a^+, h_b^-) < h < h_b^+; \\ IV) &: h_a^+ < h < \ell, \quad m > -1/(2a); \\ V) &: \max(h_a^+, h_b^+) < h < \ell, \quad -1/(2b) < m < -1/(2a); \\ VI) &: h_b^+ < h < \ell, \quad m < -1/(2b). \end{aligned}$$

**2. Поверхности годографов и геометрические свойства движений.** В дополнение к подвижному базису выберем ортонормированный базис  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  в неподвижном пространстве. Арифметическое трехмерное пространство разложений всевозможных векторов угловой скорости по подвижному (неподвижному) базису назовем  $P$ -пространством (соответственно,  $\Pi$ -пространством). Фиксируем значения всех имеющихся первых интегралов. Образ связной компоненты интегрального многообразия в  $P$ -пространстве ( $\Pi$ -пространстве) назовем  $P$ -поверхностью [2] (соответственно,  $\Pi$ -поверхностью [5]).

Положению тела сопоставим матрицу  $Q$  направляющих косинусов, определенную так, что  $\mathbf{n}_i = Q_{ik}\mathbf{e}_k$ . Физическому вектору угловой скорости отвечают арифметические векторы  $\boldsymbol{\omega}$  в  $P$ -пространстве и  $\boldsymbol{\Omega}$  в  $\Pi$ -пространстве, связанные соотношением  $\boldsymbol{\Omega} = Q\boldsymbol{\omega}$ . Особенность точных решений неприводимых систем состоит в том, что само решение включает в себя выражение для матрицы ориентации  $Q$ . Действительно, в рассматриваемой системе  $\mathfrak{M}$  в силу геометрических интегралов можно взять  $\mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{n}_2 = \boldsymbol{\beta}$ . Тогда, по определению, две первые строки  $Q$  заданы выражениями (1), а элементы третьей строки находим как координаты вектора  $\mathbf{n}_3 = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{r(s_2 G_1 \Psi + s_1 G_2 F_1 F_2)}{2ab(s_1 - s_2)^2}, & \gamma_2 &= -\frac{r(s_2 G_1 F_1 F_2 - s_1 G_2 \Psi)}{2ab(s_1 - s_2)^2}, \\ \gamma_3 &= -\frac{a^2 s_2 - b^2 s_1}{2ab(s_1 - s_2)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначая через  $\Omega_i$  координаты угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  в неподвижных осях, получим из (1), (4)

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{r}{2a(s_1 - s_2)^2} [G_1 G_2 F_1 - (a^2 + s_1 s_2 - 2s_1^2) F_2], \\ \Omega_2 &= -\frac{r}{2b(s_1 - s_2)^2} [G_1 G_2 F_2 + (b^2 + s_1 s_2 - 2s_2^2) F_1], \\ \Omega_3 &= -\frac{1}{2ab(s_1 - s_2)^2} \{ [b^2 s_1 + a^2 (s_1 - 2s_2)] F_1 G_2 - \\ &\quad - [a^2 s_2 - b^2 (2s_1 - s_2)] F_2 G_1 \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения (2) и (5) дают аналитическую основу для компьютерной визуализации  $P$ - и  $\Pi$ -поверхностей. Необходимо, однако, избавиться от устранимых особенностей, связанных с геометрией вспомогательных переменных, а также от двузначных алгебраических радикалов, некоторые из которых должны периодически менять знак вдоль фазовой траектории.

Как следует из (1)–(3), переменные  $s_1, s_2$  осциллируют в промежутках, определенных неравенствами  $G_i^2(s_i) \geq 0$ ,  $F_i^2(s_i) \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ). При  $m < 0$  область осцилляции переменной  $s_1$  неограничена, поскольку в первом уравнении (3) под радикалом стоит многочлен 4-й степени с положительным старшим коэффициентом. Очевидно, что все особенности, связанные с прохожде-

нием  $s_1$  через бесконечность, устранимы. Так как условия  $G_i^2(s_i) \geq 0$  равносильны неравенствам  $|s_1| \geq a$ ,  $|s_2| \leq b$ , выполним подстановку  $s_1 = au_1^{-1}$ ,  $s_2 = bu_2$  ( $|u_1| \leq 1$ ,  $|u_2| \leq 1$ ). Тогда

$$\begin{aligned} F_1(s_1) &= u_1^{-1}T_1(u_1), & F_2(s_2) &= T_2(u_2), \\ G_1(s_1) &= au_1^{-1}S_1(u_1), & G_2(s_2) &= bS_2(u_2). \end{aligned}$$

Здесь введены новые алгебраические радикалы

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{-4m\theta_1\theta_2(u_1 - \tau_1)(u_1 - \tau_2)}, & S_1 &= \sqrt{1 - u_1^2}, \\ T_2 &= b\sqrt{4m(u_2 - \sigma_1)(u_2 - \sigma_2)}, & S_2 &= \sqrt{1 - u_2^2} \end{aligned}$$

и параметры

$$\theta_1 = \frac{\ell + 1}{2m}, \quad \theta_2 = \frac{\ell - 1}{2m}, \quad \tau_i = \frac{a}{\theta_i}, \quad \sigma_i = \frac{\theta_i}{b} \quad (i = 1, 2).$$

Из определения областей регулярности в плоскости  $(m, h)$  устанавливаем условия на корни  $\tau_i, \sigma_i$  многочленов  $T_i^2, S_i^2$  и находим промежутки осцилляции переменных  $u_1, u_2$  (см. табл. 1).

Таблица 1

Номер обл.	Условия на $\tau_i$	Условия на $\sigma_i$	$u_1 \in$	$u_2 \in$
I	$0 < \tau_1 < 1,  \tau_2  > 1$	$\sigma_1 > 1,  \sigma_2  < 1$	$[\tau_1, 1]$	$[-1, \sigma_2]$
II	$ \tau_1  < 1, \tau_2 > 1$	$ \sigma_1  > 1, \sigma_2 > 1$	$[\tau_1, 1]$	$[-1, 1]$
III	$\tau_1 < -1,  \tau_2  > 1$	$\sigma_1 < -1,  \sigma_2  < 1$	$[-1, 1]$	$[-1, \sigma_2]$
IV	$ \tau_1  < 1, 0 < \tau_2 < 1$	$ \sigma_1  > 1, \sigma_2 > 1$	$[\tau_1, \tau_2]$	$[-1, 1]$
V	$\tau_1 < -1, \tau_2 > 1$	$\sigma_1 < -1, \sigma_2 > 1$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
VI	$\tau_1 < -1,  \tau_2  > 1$	$-1 < \sigma_1 < 0,  \sigma_2  < 1$	$[-1, 1]$	$[\sigma_1, \sigma_2]$

Для построения  $P$ - и  $\Pi$ -поверхностей преобразуем (2) и (5) в уравнения без особенностей. Подвижный годограф примет вид

$$\omega_1 = \frac{r(\ell u_1 - 2ma)T_2}{2(a - bu_1u_2)}, \quad \omega_2 = \frac{r(\ell - 2mbu_2)T_1}{2(a - bu_1u_2)}, \quad \omega_3 = -\frac{aS_1T_2 + bS_2T_1}{a - bu_1u_2}. \quad (6)$$

Координаты неподвижного годографа запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -\frac{r\{bS_1S_2T_1 + [a(2 - u_1^2) - bu_1u_2]T_2\}}{2(a - bu_1u_2)^2}, \\ \Omega_2 &= -\frac{r\{[bu_1(1 - 2u_2^2) + au_2]T_1 + au_1S_1S_2T_2\}}{2(a - bu_1u_2)^2}, \\ \Omega_3 &= -\frac{(p^2 - 2abu_1u_2)S_2T_1 - (p^2u_1u_2 - 2ab)S_1T_2}{2(a - bu_1u_2)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

После этого выполним тригонометрическую подстановку

$$u_1 = a_1 \sin^2 \varphi_1 + b_1 \cos^2 \varphi_1, \quad u_2 = a_2 \sin^2 \varphi_2 + b_2 \cos^2 \varphi_2, \quad (8)$$

где  $a_i, b_i$  – конечные границы изменения переменных  $u_i$  из табл. 1. Тогда для радикалов, периодически меняющих знак, получим представление

$$\sqrt{b_i - u_i} = \sqrt{b_i - a_i} \sin \varphi_i, \quad \sqrt{u_i - a_i} = \sqrt{b_i - a_i} \cos \varphi_i. \quad (9)$$

Правило определения общего периода  $K_i$  всех зависимостей от переменной  $\varphi_i$  следующее: если  $a_i, b_i$  – корни одного и того же многочлена из  $S_i^2, T_i^2$ , то период равен  $\pi$ , если же это корни разных многочленов, то период равен  $2\pi$ . Величины периодов сведены в табл. 2. Число  $N = 4\pi^2/(K_1 K_2)$  в последнем столбце указывает количество  $P$ - и  $\Pi$ -поверхностей при заданных константах интегралов.

Таблица 2

Номер обл.	$K_1$ (период по $\varphi_1$ )	$K_2$ (период по $\varphi_2$ )	$N$ (к-во компонент)
<i>I</i>	$2\pi$	$2\pi$	1
<i>II</i>	$2\pi$	$\pi$	2
<i>III</i>	$\pi$	$2\pi$	2
<i>IV</i>	$\pi$	$\pi$	4
<i>V</i>	$\pi$	$\pi$	4
<i>VI</i>	$\pi$	$\pi$	4

Отметим, что образ интегрального многообразия (всех связных компонент в целом) как в  $P$ -пространстве, так и в  $\Pi$ -пространстве симметричен относительно координатных плоскостей. Так, чтобы изменить знак только координат  $\omega_1, \Omega_1$ , изменим одновременно знаки радикалов  $S_1, T_2$ , для координат  $\omega_2, \Omega_2$  изменим знаки  $S_2, T_1$ , а для координат  $\omega_3, \Omega_3$  изменим знаки  $S_1, S_2$ . Кроме того, любая  $P$ - и  $\Pi$ -поверхность (связная компонента) симметрична относительно плоскостей  $\omega_1 = 0$  и  $\Omega_1 = 0$  для областей *I, III, VI*, относительно плоскостей  $\omega_2 = 0$  и  $\Omega_2 = 0$  для областей *I, II, IV* и относительно плоскостей  $\omega_3 = 0$  и  $\Omega_3 = 0$  для областей *I, II, III, V*. Таким образом, если при заданных константах интегралов поверхностей несколько, то все они получаются одна из другой отражением относительно некоторой координатной плоскости, а значит, при визуализации достаточно ограничиться каким-либо одним выбором знаков тех радикалов, которые вдоль фазовой траектории знака не меняют.

В табл. 3 представлен результат компьютерной визуализации по формулам (6)–(9) поверхностей, несущих подвижный и неподвижный годографы. Движение тела представляется качением  $P$ -поверхности “сквозь”  $\Pi$ -поверхность таким образом, что некоторая кривая (образ условно-периодической обмотки тора) на  $P$ -поверхности катится без проскальзывания по аналогичной кривой на  $\Pi$ -поверхности.

Таблица 3

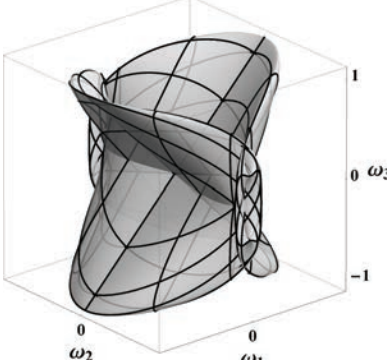
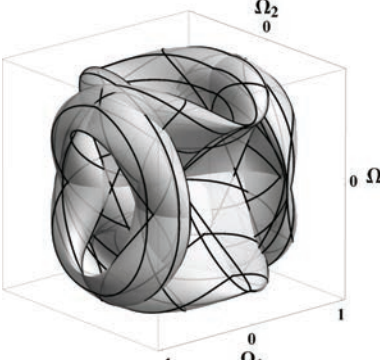
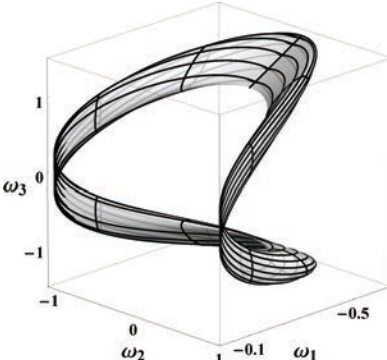
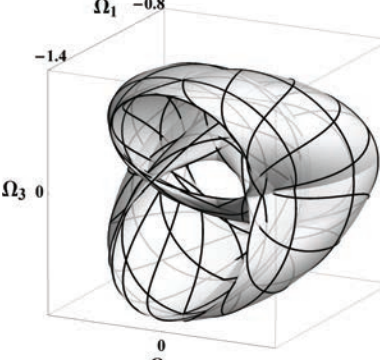
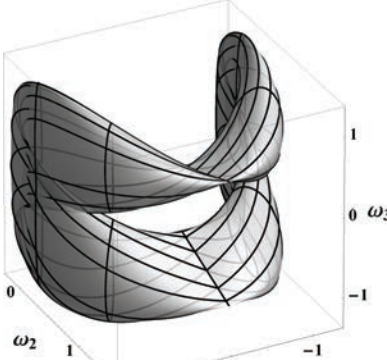
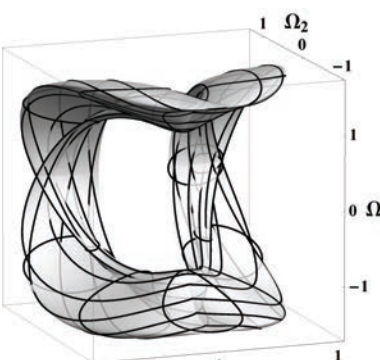
Номер обл.	<i>P</i> -поверхность	II-поверхность
I	 <p>3D plot of the <i>P</i>-surface for region I. The surface is a complex, twisted structure. The axes are labeled <math>\omega_1</math>, <math>\omega_2</math>, and <math>\omega_3</math>. The <math>\omega_3</math> axis ranges from -1 to 1. The <math>\omega_1</math> and <math>\omega_2</math> axes range from 0 to 1.</p>	 <p>3D plot of the II-surface for region I. The surface is a complex, twisted structure. The axes are labeled <math>\Omega_1</math>, <math>\Omega_2</math>, and <math>\Omega_3</math>. The <math>\Omega_3</math> axis ranges from -1 to 1. The <math>\Omega_1</math> and <math>\Omega_2</math> axes range from -1 to 1.</p>
II	 <p>3D plot of the <i>P</i>-surface for region II. The surface is a complex, twisted structure. The axes are labeled <math>\omega_1</math>, <math>\omega_2</math>, and <math>\omega_3</math>. The <math>\omega_3</math> axis ranges from -1 to 1. The <math>\omega_1</math> axis ranges from -0.5 to 1, and the <math>\omega_2</math> axis ranges from 0 to 1.</p>	 <p>3D plot of the II-surface for region II. The surface is a complex, twisted structure. The axes are labeled <math>\Omega_1</math>, <math>\Omega_2</math>, and <math>\Omega_3</math>. The <math>\Omega_3</math> axis ranges from -1.4 to 0. The <math>\Omega_1</math> axis ranges from -0.8 to 0, and the <math>\Omega_2</math> axis ranges from 0 to 1.</p>
III	 <p>3D plot of the <i>P</i>-surface for region III. The surface is a complex, twisted structure. The axes are labeled <math>\omega_1</math>, <math>\omega_2</math>, and <math>\omega_3</math>. The <math>\omega_3</math> axis ranges from -1 to 1. The <math>\omega_1</math> and <math>\omega_2</math> axes range from 0 to 1.</p>	 <p>3D plot of the II-surface for region III. The surface is a complex, twisted structure. The axes are labeled <math>\Omega_1</math>, <math>\Omega_2</math>, and <math>\Omega_3</math>. The <math>\Omega_3</math> axis ranges from -1 to 1. The <math>\Omega_1</math> and <math>\Omega_2</math> axes range from -1 to 1.</p>



Таблица 3 (продолжение)

Номер обл.	$P$ -поверхность	$\Pi$ -поверхность
IV		
V		
VI		

Заметим, что согласно (6) характер изменения координат подвижного го-



дографа определяется радикалами  $T_1, T_2$  и выражением  $aS_1T_2 + bS_2T_1$ . Ясно, что в целом  $\omega_i$  являются двоякопериодическими функциями времени, но движение по отношению к соответствующей оси может быть охарактеризовано как “колебание”, если координата знакопеременна, и как “вращение”, если она знакопостоянна. Естественно, что эта характеристика весьма условна и не носит здесь какого-либо точного математического содержания. Более строгий подход к описанию геометрии движений по отношению к главным осям, основанный на введении понятий декомпозиции движений и частного движения в системе с разделенными переменными, предложен в работе [13].

Из табл. 1 следует, что выражение  $T_1$  знакопеременно в областях  $I, II, IV$  и знакопостоянно в областях  $III, V, VI$ , а  $T_2$  знакопеременно в областях  $I, III, VI$  и знакопостоянно в областях  $II, IV, V$ . Аналогично, выражение  $S_1$  знакопеременно во всех областях, кроме  $IV$ , а  $S_2$  знакопеременно во всех областях, кроме  $VI$ . В частности, выражение  $aS_1T_2 + bS_2T_1$  знакопеременно во всех областях, кроме  $IV$  и  $VI$ . В каждой из двух последних областей одно из выражений  $S_2T_1$  или  $S_1T_2$  оказывается знакопостоянным. Таким образом, за исключением областей  $IV$  и  $VI$  движение носит колебательный характер по отношению к оси динамической симметрии. Вид движения относительно первой главной оси инерции (несущей центр приложения силы с большей интенсивностью) определяется радикалом  $T_2$ , а движение характеризуется как *колебание* в областях  $I, III, VI$  и *вращение* в областях  $II, IV, V$ . Движение относительно второй главной оси инерции (несущей центр приложения силы с меньшей интенсивностью), согласно поведению радикала  $T_1$ , является *колебанием* в областях  $I, II, IV$  и *вращением* в областях  $III, V, VI$ . Эти свойства также объясняют расположение проиллюстрированных выше поверхностей, несущих подвижный и неподвижный годографы, относительно координатных плоскостей. Подчеркнем, что данное описание относится к сомножителям в координатах подвижного годографа, которые определяются радикалами (знакопеременными или знакопостоянными). Более точные утверждения требуют анализа произведений этих радикалов на однозначные несимметричные функции двух разделенных переменных (функции на торах Лиувилля).

1. Харламов П.В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
2. Гашененко И.Н. Подвижный годограф вектора угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина // Механика твердого тела. – 1986. – Вып. 18. – С. 3–9.
3. Гашененко И.Н. О неподвижном годографе угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина // Механика твердого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 29–34.
4. Гашененко И.Н. Характерные свойства годографов угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина // Механика твердого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 9–18.
5. Гашененко И.Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 1–10.
6. Гашененко И.Н. Движение гироскопа Ковалевской при нулевой постоянной интеграла площадей // Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 7–16.
7. Гашененко И.Н. Подвижный годограф угловой скорости в решении С.В. Ковалевской // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26(1). – С. 1–9.

8. *Gashenenko I.N.* Angular velocity of the Kovalevskaya top // Regular and Chaotic Dynamics. – 2000. – 5, № 1. – P. 107–116.
9. *Харламов М.П.* Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 32–38.
10. *Харламов М.П., Савушкин А.Ю.* Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской // Укр. мат. вестник. – 2004. – 1, № 4. – С. 564–582.
11. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
12. *Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А.* Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функц. анализ и его приложения. – 1988. – 22, вып. 2. – С. 87–88.
13. *Kharlamova I.I., Savushkin A.Y.* On the geometry of motions in one integrable problem of the rigid body dynamics // Submitted to J. of Geom. and Phys. – Preprint arXiv:1312.6774.

### I.I. Kharlamova, M.P. Kharlamov, A.Y. Savushkin

#### Visualization of one class of two-frequency motions of a rigid body

The integrable case found by M.P. Kharlamov (Mekh. Tverd. Tela, 2002, No. 32) is considered from the point of view of the visualization of motion. The phase space is defined by two invariant relations in a general integrable case with three degrees of freedom and, for almost all integral constants, the moving and fixed hodographs densely fill two-dimensional surfaces. We derive the explicit equations of these surfaces and the orientation matrix in terms of the separated variables, supply the rule of eliminating the two-valued radicals to get the formulas applicable for computer visualization. The main types of the hodographs surfaces are illustrated and some conclusions on the geometry of motion are made.

**Keywords:** *rigid body, hodograph method, visualization of motions.*

### I.I. Харламова, М.П. Харламов, О.Ю. Савушкін

#### Візуалізація одного класу двочастотних рухів твердого тіла

З точки зору візуалізації рухів розглядається випадок інтегровності, знайдений М.П. Харламовим (Механіка твердого тіла, 2002, вип. 32). Фазовий простір визначено двома інваріантними співвідношеннями в загальному інтегровному випадку з трьома степенями вільності. Для майже всіх наборів сталих перших інтегралів рухомий і нерухомий годографи всюди щільно заповнюють двовимірні поверхні. Отримано явні параметричні рівняння цих поверхонь і матриці орієнтації, в яких як параметри виступають змінні розділення. Указано правило, що дозволяє позбавитися від двозначних радикалів з метою виведення формул, що застосовуються для комп'ютерної візуалізації. Побудовано ілюстрації основних типів поверхонь. Зроблено висновки про характер рухів.

**Ключові слова:** *тверде тіло, метод годографів, візуалізація руху.*