УДК 531.38

©2012. **Н.Ф. Гоголева, Я.В. Зиновьева**

УРАВНЕНИЯ АКСОИДОВ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Выведены уравнения аксоидов (подвижного и неподвижного) задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром. Эти уравнения обобщают полученные ранее [1, гл. 12] уравнения аксоидов тел, соединенных сферическим шарниром.

Ключевые слова: *система гироскопов Лагранжа, подвижный и неподвижный аксоиды, неголономный шарнир.*

Введение. Реализация метода годографов [2] в общем случае наталкивается на принципиальную трудность: для получения уравнения аксоидов необходимы компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела и скорости $\mathbf{v}$ некоторой точки тела в осях, связанных с телом, и в неподвижных осях. Но $\boldsymbol{\omega}$ по Эйлеру определена своими компонентами в осях, связанных с телом, а $\mathbf{v}$ – в неподвижных осях. Поэтому при выводе уравнений аксоидов М.П. Харламов [3] связал эти уравнения через горловые линии. И хотя этот путь в общей постановке был естественным, при решении конкретных задач он оказался непростым. М.Е. Лесина [1] значительно упростила эту процедуру, предложив другие уравнения аксоидов для задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром. В задаче о движении двух тел, соединенных сферическим шарниром [4], предложено в качестве направляющих линий аксоидов использовать кривые, получаемые соответствующими преобразованиями траектории сферического шарнира. Такой подход существенно упрощает и построение, и исследование аксоидов.

Задачу о движении гироскопов Лагранжа S и S_0, сочлененных неголономным шарниром, будем рассматривать в постановке [1], привлекая и некоторые из введенных там обозначений, а также и некоторые формулы, снабжая их звездочкой. Учитывая специфику рассматриваемой задачи, оказалось возможным получить компоненты абсолютной скорости точки O пересечения осей динамической симметрии тел в полуподвижном базисе. Благодаря такому подходу, уравнения аксоидов были выведены без дополнительных квадратур, компьютерная визуализация движения существенно упростилась.

1. Кинематические соотношения. Основные переменные задачи – это компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ полуподвижного базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и компоненты $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ полуподвижного базиса $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$. Угловые скорости $\boldsymbol{\omega}_*, \boldsymbol{\Omega}_*$ тел S и S_0 таковы:

$$\boldsymbol{\omega}_* = \boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi}\mathbf{e}_3 = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + (\omega_3 + \dot{\varphi})\mathbf{e}_3, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\Phi}\mathbf{e}_3^0 = \Omega_1\mathbf{e}_1 + \Omega_2\mathbf{e}_2^0 + (\Omega_3 + \dot{\Phi})\mathbf{e}_3^0. \tag{2}$$

Отметим, что векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ связаны соотношением

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \dot{\theta}\mathbf{e}_1. \tag{3}$$

Запишем разложение векторов $\boldsymbol{\omega}_*, \boldsymbol{\Omega}_*$ в неизменно связанных с телами базисах $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1^*\mathbf{e}_1^* + \omega_2^*\mathbf{e}_2^* + (\omega_3 + \dot{\varphi})\mathbf{e}_3, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1^*\mathbf{e}_1^{0*} + \Omega_2^*\mathbf{e}_2^{0*} + (\Omega_3 + \dot{\Phi})\mathbf{e}_3^0. \tag{5}$$

В монографии [1] указаны формулы перехода от одного базиса к другому. Приведем их здесь [1, (5.5)∗, (5.30)∗, (5.35)∗]

$$\mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_2 \cos\theta + \mathbf{e}_3 \sin\theta, \tag{6}$$

$$\mathbf{e}_3^0 = -\mathbf{e}_2 \sin\theta + \mathbf{e}_3 \cos\theta; \tag{7}$$

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1 \cos\Phi + \mathbf{e}_2^0 \sin\Phi, \qquad \mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1 \sin\Phi + \mathbf{e}_2 \cos\Phi. \tag{8}$$

Приведем и формулы обратных переходов между базисными векторами

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^0 \cos\theta - \mathbf{e}_3^0 \sin\theta, \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^0 \sin\theta + \mathbf{e}_3^0 \cos\theta; \tag{10}$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^* \cos\varphi - \mathbf{e}_2^* \sin\varphi, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^* \sin\varphi + \mathbf{e}_2^* \cos\varphi; \tag{11}$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{0*} \cos\Phi - \mathbf{e}_2^{0*} \sin\Phi, \quad \mathbf{e}_2^0 = \mathbf{e}_1^{0*} \sin\Phi + \mathbf{e}_2^{0*} \cos\Phi. \tag{12}$$

Подставив (11) в (1), учтем (4) и получим

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi.$$

Аналогично, вносим (12) в (2) и с учетом (5) находим

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \qquad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi.$$

Подставив (6), (7), (3) в (2), получим

$$\Omega_1 = \omega_1 + \dot{\theta}, \tag{13}$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos\theta + \omega_3 \sin\theta, \quad \Omega_3 = -\omega_2 \sin\theta + \omega_3 \cos\theta. \tag{14}$$

Уравнение (13) служит для определения зависимости θ от t (после того, как станут известны $\omega_1(\theta)$, $\Omega_1(\theta)$), а (14) устанавливают связь между четырьмя искомыми величинами ω_2, ω_3, Ω_2, Ω_3.

Приведем циклические интегралы [1, (5.11)∗]

$$\omega_3 + \dot{\varphi} = n/J = \tilde{n}, \tag{15}$$

$$\Omega_3 + \dot{\Phi} = n_0/J_0 = \tilde{n}_0. \tag{16}$$

2. Подвижный аксоид тела S. Уравнение подвижного аксоида тела S [1, (12.9)*] имеет вид

$$\boldsymbol{\xi}(\theta,\mu)=\mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*(\theta)}{\omega_*(\theta)}+\frac{\boldsymbol{\omega}_*(\theta)\times\mathbf{v}(\theta)}{\omega_*^2(\theta)}. \tag{17}$$

Запишем разложение этого вектора в базисах $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$:

$$\boldsymbol{\xi}(\theta,\mu)=\xi_1(\theta,\mu)\mathbf{e}_1+\xi_2(\theta,\mu)\mathbf{e}_2+\xi_3(\theta,\mu)\mathbf{e}_3=\xi_1^*(\theta,\mu)\mathbf{e}_1^*+\xi_2^*(\theta,\mu)\mathbf{e}_2^*+\xi_3(\theta,\mu)\mathbf{e}_3,$$

и для ξ_1^*, ξ_2^* с учетом (11) имеем

$$\begin{aligned}\xi_1^*(\theta,\mu)&=\xi_1(\theta,\mu)\cos\varphi+\xi_2(\theta,\mu)\sin\varphi,\\ \xi_2^*(\theta,\mu)&=-\xi_1(\theta,\mu)\sin\varphi+\xi_2(\theta,\mu)\cos\varphi.\end{aligned} \tag{18}$$

Скорость $\mathbf{v}$ точки O имеет вид [1, (5.24)*]

$$\mathbf{v}=-a(\omega_2\mathbf{e}_1-\omega_1\mathbf{e}_2)-a_0(\Omega_2\mathbf{e}_1-\Omega_1\mathbf{e}_2^0), \tag{19}$$

где $a=\dfrac{ml}{m+m_0}$, $a_0=\dfrac{m_0l_0}{m+m_0}$. С учетом (6) запишем ее разложение в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{v}=\mathbf{e}_1(-a\omega_2-a_0\Omega_2)+\mathbf{e}_2(a\omega_1+a_0\Omega_1\cos\theta)+\mathbf{e}_3a_0\Omega_1\sin\theta. \tag{20}$$

Вносим векторы (1), (20) в уравнение (17), с учетом (15) имеем

$$\begin{aligned}\xi_1(\theta,\mu)&=\mu\frac{\omega_1(\theta)}{\omega_*(\theta)}+\frac{1}{\omega_*^2(\theta)}[-a\tilde{n}\omega_1(\theta)+a_0\Omega_1(\theta)(\omega_2(\theta)\sin\theta-\tilde{n}\cos\theta)],\\ \xi_2(\theta,\mu)&=\mu\frac{\omega_2(\theta)}{\omega_*(\theta)}+\frac{1}{\omega_*^2(\theta)}[-a\tilde{n}\omega_2(\theta)-a_0(\Omega_1(\theta)\omega_1(\theta)\sin\theta+\tilde{n}\Omega_2(\theta))],\end{aligned} \tag{21}$$

$$\xi_3(\theta,\mu)=a+\mu\frac{\tilde{n}}{\omega_*(\theta)}+\frac{1}{\omega_*^2(\theta)}[-a\tilde{n}^2+a_0(\Omega_1(\theta)\omega_1(\theta)\cos\theta+\Omega_2(\theta)\omega_2(\theta))]. \tag{22}$$

Компоненты ξ_1^*, ξ_2^* подвижного аксоида в неизменно связанном с телом базисе получим, подставив (21) в (18):

$$\begin{aligned}\xi_1^*(\theta,\mu)&=\mu\frac{\omega_1^*(\theta)}{\omega_*(\theta)}+\frac{1}{\omega_*^2(\theta)}\{-a\tilde{n}\omega_1^*(\theta)+a_0\Omega_1(\theta)(\omega_2\sin\theta-\tilde{n}\cos\theta)\cos\varphi-\\ &\quad-a_0(\Omega_1\omega_1\sin\theta+\tilde{n}\Omega_2)\sin\varphi\},\\ \xi_2^*(\theta,\mu)&=\mu\frac{\omega_2^*(\theta)}{\omega_*(\theta)}+\frac{1}{\omega_*^2(\theta)}\{-a\tilde{n}\omega_2^*(\theta)-a_0\Omega_1(\theta)(\omega_2\sin\theta-\tilde{n}\cos\theta)\sin\varphi-\\ &\quad-a_0(\Omega_1\omega_1\sin\theta+\tilde{n}\Omega_2)\cos\varphi\},\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\omega_*^2(\theta) = \omega_1^2(\theta) + \omega_2^2(\theta) + \tilde{n}^2, \qquad \varphi = \varphi_0 - \int \frac{\tilde{n} - \omega_3(\theta)}{\Omega_1(\theta) - \omega_1(\theta)} d\theta. \tag{24}$$

Таким образом, подвижный аксоид тела S определен уравнениями (22) – (24).

3. Неподвижный аксоид тела S**.** Уравнение неподвижного аксоида тела S [1, (12.12)∗, (12.9)∗] имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}(t,\mu) = \mathbf{r}_*(t) + \mu \frac{\boldsymbol{\omega}_*(t)}{\omega_*(t)} + \frac{1}{\omega_*^2(t)} [\boldsymbol{\omega}_*(t) \times \mathbf{v}(t)]. \tag{25}$$

В нем $\mathbf{r}_*(t)$ – вектор с началом в центре масс системы C_*, указывающий точку O:

$$\mathbf{r}_*(t) = -a\mathbf{e}_3 - a_0\mathbf{e}_3^0. \tag{26}$$

Представим этот вектор в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$, используя формулу (7):

$$\mathbf{r}_* = \mathbf{e}_2 a_0 \sin\theta - \mathbf{e}_3(a + a_0\cos\theta). \tag{27}$$

Введем цилиндрическую систему координат [6] $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$ с началом в точке C_*. Тогда

$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\mathbf{g}}{g}, \qquad \mathbf{e}_\rho = \frac{g\boldsymbol{\omega}_* - \omega_\nu \mathbf{g}}{g\omega_\rho}, \qquad \mathbf{e}_\alpha = \frac{\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}_*}{g\omega_\rho}, \tag{28}$$

$$\omega_\nu = (\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\omega}_*)/g, \qquad \omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \tilde{n}^2 - \omega_\nu^2,$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\mathbf{g}\cdot(\boldsymbol{\omega}_* \times \dot{\boldsymbol{\omega}}_*)}{g\omega_\rho^2}. \tag{29}$$

В правой части уравнения (29) векторы $\mathbf{g}, \boldsymbol{\omega}_*$ заданы в неизменно связанном с телом S базисе. Вектор $\mathbf{g}$ имеет вид [1, (5.15) ∗ –(5.17)∗]

$$\mathbf{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3, \tag{30}$$

$$G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1,$$

$$G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \tag{31}$$

$$G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n + n_0\cos\theta.$$

Используя (30), (31), (9), (10), представим вектор $\mathbf{g}$ в базисе $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$

$$\mathbf{g} = G_1\mathbf{e}_1 + G_2^0\mathbf{e}_2^0 + G_3^0\mathbf{e}_3^0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} G_2^0 &= G_2\cos\theta + G_3\sin\theta = (A_0 - N\cos\theta)\Omega_2 + (A\cos\theta - N)\omega_2 + n\sin\theta, \\ G_3^0 &= -G_2\sin\theta + G_3\cos\theta = -(A\omega_2 - N\Omega_2)\sin\theta + n\cos\theta + n_0. \end{aligned} \tag{33}$$

Из (29) находим

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{g\omega_\rho^2}\big[G_3(\omega_1\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1\omega_2) - \tilde{n}(G_1\dot{\omega}_2 - G_2\dot{\omega}_1) + \dot{\tilde{n}}(G_1\omega_2 - G_2\omega_1) + \dot{\varphi}(g\tilde{n}\omega_\nu - G_3\omega_*^2)\big]. \tag{34}$$

Угол α определяется квадратурой из уравнения (34).

Базисы $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_\rho = \mathbf{E}_2\cos\alpha + \mathbf{E}_3\sin\alpha, \quad \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{E}_2\sin\alpha + \mathbf{E}_3\cos\alpha, \tag{35}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_\nu, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_\rho\cos\alpha - \mathbf{e}_\alpha\sin\alpha, \quad \mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_\rho\sin\alpha + \mathbf{e}_\alpha\cos\alpha. \tag{36}$$

Представим вектор $\boldsymbol{\zeta}$ своим разложением в базисе $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta_\nu\mathbf{e}_\nu + \zeta_\rho\mathbf{e}_\rho + \zeta_\alpha\mathbf{e}_\alpha, \tag{37}$$

где

$$\begin{gathered}\zeta_\nu = \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{e}_\nu = \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{g}/g,\\ \zeta_\rho = \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{e}_\rho = (g\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\omega}_* - \omega_\nu\boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{g})/g\omega_\rho,\\ \zeta_\alpha = \boldsymbol{\zeta}\cdot\mathbf{e}_\alpha = \boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*)/g\omega_\rho.\end{gathered} \tag{38}$$

Подставив (26), (27), (20), (1), (15), (30), (31) в (38), с учетом (32), (33) получим

$$\zeta_\nu = \frac{\omega_\nu}{\omega_*^2}(\mu\boldsymbol{\omega}_* - a\tilde{n}) + \frac{a_0}{g\omega_*^2}[G_3^0\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\boldsymbol{\omega}_* - g(\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{g})\boldsymbol{\omega}_*\cdot\mathbf{e}_3^0 - G_3^0\omega_*^2],$$

$$\zeta_\rho = \frac{\omega_\rho}{\omega_*^2}(\mu\boldsymbol{\omega}_* - a\tilde{n}) + \frac{a_0}{g\omega_\rho}\left[\omega_\nu G_3^0\left(1 - \frac{\boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{\Omega}_*}{\omega_*^2}\right) - g(\boldsymbol{\omega}_*\cdot\mathbf{e}_3^0)\left(1 - \frac{\omega_\nu(\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{g})}{\omega_*^2}\right)\right],$$

$$\begin{aligned}\zeta_\alpha = \frac{a_0}{g\omega_\rho}\Big\{&-G_1(\tilde{n} - \omega_3)\sin\theta - G_2^0(\Omega_1 - \omega_1) + \\ &+\frac{g\omega_\nu}{\omega_*^2}[-\Omega_2\omega_1 + \Omega_1(\omega_2\cos\theta + \tilde{n}\sin\theta)]\Big\},\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1\omega_1 + \omega_2(\Omega_2\cos\theta - \tilde{n}_0\sin\theta) + \tilde{n}(\Omega_2\sin\theta + \tilde{n}_0\cos\theta).$$

Вносим (35) в (37) и находим компоненты неподвижного аксоида тела S в базисе $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$:

$$\begin{gathered}\zeta_1(\theta,\mu) = \zeta_\nu(\theta,\mu),\\ \zeta_2(\theta,\mu) = \zeta_\rho(\theta,\mu)\cos\alpha(\theta) - \zeta_\alpha(\theta)\sin\alpha(\theta),\\ \zeta_3(\theta,\mu) = \zeta_\rho(\theta,\mu)\sin\alpha(\theta) + \zeta_\alpha(\theta)\cos\alpha(\theta),\end{gathered} \tag{39}$$

в которых $\alpha(\theta)$ определено квадратурой из (34).

Скорость скольжения v_c вдоль общей образующей $\boldsymbol{\omega}_*$ подвижного аксоида по неподвижному равна $(\boldsymbol{\omega}_* \cdot \mathbf{v})/\omega_*$ и с учетом (1), (15), (20) такова

$$v_c = a_0[-\omega_1\Omega_2 + \Omega_1(\omega_2\cos\theta + \tilde{n}\sin\theta)]/\omega_*. \tag{40}$$

При движении тела S подвижный аксоид (23) катится по неподвижному (39), это качение сопровождается скольжением вдоль общей образующей $\boldsymbol{\omega}_*$ со скоростью (40).

4. Направляющая линия неподвижного аксоида тела S. Роль направляющей линии выполняет траектория шарнира – вектор $\mathbf{r}_*$, который необходимо представить в базисе $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$. Сначала запишем его в базисе $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$:

$$\mathbf{r}_* = r_\nu\mathbf{e}_\nu + r_\rho\mathbf{e}_\rho + r_\alpha\mathbf{e}_\alpha,$$

где $r_\nu = (\mathbf{r}_*\cdot\mathbf{g})/g$, $r_\rho = [g(\mathbf{r}_*\cdot\boldsymbol{\omega}_*) - \omega_\nu(\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}_*)]/g\omega_\rho$, $r_\alpha = \mathbf{r}_*\cdot(\mathbf{g}\times\boldsymbol{\omega}_*)/g\omega_\rho$.

Запишем компоненты $\mathbf{r}_*$ с учетом (1), (15), (30)–(33), (26), (27)

$$r_\nu = -(aG_3 + a_0G_3^0)/g,$$

$$r_\rho = \frac{1}{g\omega_\rho}[\omega_\nu(aG_3 + a_0G_3^0) - ag\tilde{n} + a_0g(\omega_2\sin\theta - \tilde{n}\cos\theta)],$$

$$r_\alpha = \frac{1}{g\omega_\rho}\left\{-a(G_1\omega_2 - G_2\omega_1) + a_0[(G_3\omega_1 - G_1\tilde{n})\sin\theta - (G_1\omega_2 - G_2\omega_1)\cos\theta]\right\}.$$

Обозначим координаты вектора $\mathbf{r}_*$ в неподвижном базисе через x, y, z:

$$\mathbf{r}_* = x\mathbf{E}_1 + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3.$$

Используя равенства (36), получим

$$x = r_\nu, \quad y = r_\rho\cos\alpha - r_\alpha\sin\alpha, \quad z = r_\rho\sin\alpha + r_\alpha\cos\alpha.$$

Отметим, что координаты x, y, z связаны уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 2aa_0\cos\theta + a_0^2.$$

5. Матрица вложения базиса $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$ в неподвижное пространство. Неподвижный базис $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ связан с базисом $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$ соотношениями (36). Подставив (1), (15), (30) в (28), выразим $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho\mathbf{e}_\alpha$ через $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_\nu = \kappa_{11}\mathbf{e}_1 + \kappa_{12}\mathbf{e}_2 + \kappa_{13}\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_\rho = \kappa_{21}\mathbf{e}_1 + \kappa_{22}\mathbf{e}_2 + \kappa_{23}\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}_\alpha = \kappa_{31}\mathbf{e}_1 + \kappa_{32}\mathbf{e}_2 + \kappa_{33}\mathbf{e}_3,\end{gathered} \tag{41}$$

где $\kappa_{11} = G_1/g$, $\kappa_{12} = G_2/g$, $\kappa_{13} = G_3/g$,

$$\kappa_{21} = \frac{g\omega_1 - G_1\omega_\nu}{g\omega_\rho},\ \kappa_{22} = \frac{g\omega_2 - G_2\omega_\nu}{g\omega_\rho},\ \kappa_{23} = \frac{g\tilde{n} - G_3\omega_\nu}{g\omega_\rho},$$

$$\kappa_{31} = \frac{G_2\tilde{n} - G_3\omega_2}{g\omega_\rho},\ \kappa_{32} = \frac{G_3\omega_1 - G_1\tilde{n}}{g\omega_\rho},\ \kappa_{33} = \frac{G_1\omega_2 - G_2\omega_1}{g\omega_\rho}.$$

Теперь $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ выразим через $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, внеся (41) в (36)

$$\mathbf{E}_1 = \kappa_{11}\mathbf{e}_1 + \kappa_{12}\mathbf{e}_2 + \kappa_{13}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{E}_2 = (\kappa_{21}\cos\alpha - \kappa_{31}\sin\alpha)\mathbf{e}_1 + (\kappa_{22}\cos\alpha - \kappa_{32}\sin\alpha)\mathbf{e}_2 +$$

$$+(\kappa_{23}\cos\alpha - \kappa_{33}\sin\alpha)\mathbf{e}_3, \tag{42}$$

$$\mathbf{E}_3 = (\kappa_{21}\sin\alpha + \kappa_{31}\cos\alpha)\mathbf{e}_1 + (\kappa_{22}\sin\alpha + \kappa_{32}\cos\alpha)\mathbf{e}_2 +$$

$$+(\kappa_{23}\sin\alpha + \kappa_{33}\cos\alpha)\mathbf{e}_3.$$

Подставив в (42) выражения (11), получим формулы, связывающие базисы $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3$: $\mathbf{E}_i = E_{i1}\mathbf{e}_1^* + E_{i2}\mathbf{e}_2^* + E_{i3}\mathbf{e}_3$; здесь

$$\begin{aligned}
&E_{11} = \kappa_{11}\cos\varphi + \kappa_{12}\sin\varphi, \quad E_{12} = -\kappa_{11}\sin\varphi + \kappa_{12}\cos\varphi, \quad E_{13} = \kappa_{13};\\
&E_{21} = (\kappa_{21}\cos\alpha - \kappa_{31}\sin\alpha)\cos\varphi + (\kappa_{22}\cos\alpha - \kappa_{32}\sin\alpha)\sin\varphi,\\
&E_{22} = -(\kappa_{21}\cos\alpha - \kappa_{31}\sin\alpha)\sin\varphi + (\kappa_{22}\cos\alpha - \kappa_{32}\sin\alpha)\cos\varphi,\\
&E_{23} = \kappa_{23}\cos\alpha - \kappa_{33}\sin\alpha; \quad E_{33} = \kappa_{23}\sin\alpha + \kappa_{33}\cos\alpha,\\
&E_{31} = (\kappa_{21}\sin\alpha + \kappa_{31}\cos\alpha)\cos\varphi + (\kappa_{22}\sin\alpha + \kappa_{32}\cos\alpha)\sin\varphi,\\
&E_{32} = -(\kappa_{21}\sin\alpha + \kappa_{31}\cos\alpha)\sin\varphi + (\kappa_{22}\sin\alpha + \kappa_{32}\cos\alpha)\cos\varphi.
\end{aligned} \tag{43}$$

Отметим, что матрица E_{ij} – единичная: $E_{ij}E_{jk} = \delta_{ik}$, поэтому имеют место соотношения

$$\mathbf{e}_1^* = E_{11}\mathbf{E}_1 + E_{21}\mathbf{E}_2 + E_{31}\mathbf{E}_3, \qquad \mathbf{e}_2^* = E_{12}\mathbf{E}_1 + E_{22}\mathbf{E}_2 + E_{23}\mathbf{E}_3,$$
$$\mathbf{e}_3^* = E_{13}\mathbf{E}_1 + E_{23}\mathbf{E}_2 + E_{33}\mathbf{E}_3.$$

Матрица E_{ij} называется матрицей вложения неизменно связанного с телом S базиса $\mathbf{e}_1^*\mathbf{e}_2^*\mathbf{e}_3$ в неподвижное пространство, определяемое базисом $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$.

6. Подвижный аксоид тела S_0. Уравнение подвижного аксоида тела S_0 аналогично уравнению (17)

$$\boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu) = \mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)}{\Omega_*(\theta)} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(\theta)\times\mathbf{v}(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}. \tag{44}$$

Запишем разложение $\boldsymbol{\xi}^0$ в базисах $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2^0\mathbf{e}_3^0$ и $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$

$$\boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu) = \xi_1^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_1^0 + \xi_2^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_2^0 + \xi_3^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_3^0;$$

$$\boldsymbol{\xi}^0(\theta,\mu) = \xi_1^{0*}(\theta,\mu)\mathbf{e}_1^{0*} + \xi_2^{0*}(\theta,\mu)\mathbf{e}_2^{0*} + \xi_3^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_3^0,$$

где
$$\xi_1^{0*} = \xi_1^0 \cos\Phi + \xi_2^0 \sin\Phi, \qquad \xi_2^{0*} = -\xi_1^0 \sin\Phi + \xi_2^0 \cos\Phi. \tag{45}$$

Подставив (2), (16), (19), (9) в (44), находим

$$\begin{aligned}
\xi_1^0(\theta,\mu) &= \left[\frac{\mu}{\Omega_*(\theta)} - \frac{a_0\tilde{n}_0(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}\right]\Omega_1(\theta) - \frac{a\omega_1(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}[\Omega_2(\theta)\sin\theta + \tilde{n}_0\cos\theta],\\
\xi_2^0(\theta,\mu) &= \left[\frac{\mu}{\Omega_*(\theta)} - \frac{a_0\tilde{n}_0(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}\right]\Omega_2(\theta) + \\
&\qquad + \frac{a}{\Omega_*^2(\theta)}[\Omega_1(\theta)\omega_1(\theta)\sin\theta - \tilde{n}_0(\theta)\omega_2(\theta)],\\
\xi_3^0(\theta,\mu) &= a_0 + \left[\frac{\mu}{\Omega_*(\theta)} - \frac{a_0\tilde{n}_0(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}\right]\tilde{n}_0(\theta) + \\
&\qquad + \frac{a}{\Omega_*^2(\theta)}[\Omega_1(\theta)\omega_1(\theta)\cos\theta + \Omega_2(\theta)\omega_2(\theta)].
\end{aligned} \tag{46}$$

Здесь $\Omega_*^2(\theta) = \Omega_1^2(\theta) + \Omega_2^2(\theta) + \tilde{n}_0^2(\theta)$.

Угол Φ находим из (16)
$$\Phi(\theta) = \Phi_0 + \int \frac{\Omega_3(\theta) - \tilde{n}_0(\theta)}{\Omega_1(\theta) - \omega_1(\theta)} d\theta. \tag{47}$$

Подвижный аксоид тела S_0 определен соотношениями (45)–(47).

7. Неподвижный аксоид тела S_0. Его уравнение аналогично уравнению (25)
$$\boldsymbol{\zeta}^0(t,\mu) = \mathbf{r}_*(t) + \mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*(t)}{\Omega_*(t)} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*(t)\times\mathbf{v}(t)}{\Omega_*^2(t)}. \tag{48}$$

Свяжем с телом S_0 цилиндрическую систему координат $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\alpha^0$ с началом в точке C_*. Тогда
$$\mathbf{e}_\nu = \frac{\mathbf{g}}{g}, \qquad \mathbf{e}_\rho^0 = \frac{g\boldsymbol{\Omega}_* - \Omega_\nu\mathbf{g}}{g\Omega_\rho}, \qquad \mathbf{e}_\alpha^0 = \frac{\mathbf{g}\times\boldsymbol{\Omega}_*}{g\Omega_\rho}, \tag{49}$$

где $\quad \Omega_\nu = \dfrac{\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{g}}{g}, \quad \Omega_\rho^2 = \Omega_*^2 - \Omega_\nu^2,$
$$\dot{\gamma} = \frac{\mathbf{g}\cdot(\boldsymbol{\Omega}_*\times\dot{\boldsymbol{\Omega}}_*)}{g\Omega_\rho^2}. \tag{50}$$

В правой части уравнения (50) векторы $\mathbf{g}$, $\mathbf{\Omega}_*$ должны быть записаны в базисе $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$. Воспользовавшись формулами перехода (8), представим (50) в виде

$$g\Omega_\rho^2\dot{\gamma} = \begin{vmatrix} G_1 & G_2^0 & G_3^0 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \tilde{n}_0 \\ \dot{\Omega}_1 & \dot{\Omega}_2 & \dot{\tilde{n}}_0 \end{vmatrix} + \dot{\Phi}(\tilde{n}_0 g\Omega_\nu - G_3^0\Omega_*^2). \tag{51}$$

Из уравнения (51) квадратурой определяем угол γ.

Запишем разложение вектора $\boldsymbol{\zeta}_0$ в цилиндрической системе координат

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu) = \zeta_\nu^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_\nu + \zeta_\rho^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_\rho^0 + \zeta_\alpha^0(\theta,\mu)\mathbf{e}_\alpha^0,$$

здесь

$$\zeta_\nu^0 = \boldsymbol{\zeta}^0 \cdot \mathbf{e}_\nu, \quad \zeta_\rho^0 = \boldsymbol{\zeta}^0 \cdot \mathbf{e}_\rho^0, \quad \zeta_\alpha^0 = \boldsymbol{\zeta}^0 \cdot \mathbf{e}_\alpha^0. \tag{52}$$

Подставив (48), (26), (19), (2), (16), (49), (32) в (52), получим

$$\zeta_\nu^0(\theta,\mu) = \left[\frac{\mu}{\Omega_*(\theta)} - \frac{a_0\tilde{n}_0(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}\right]\Omega_\nu(\theta) + \frac{a}{g\Omega_*^2(\theta)}\{G_3(\theta)[\boldsymbol{\omega}_*(\theta)\mathbf{\Omega}_*(\theta) - \Omega_*^2(\theta)] -$$
$$-g\omega_\nu(\theta)[\Omega_2(\theta)\sin\theta + \tilde{n}_0(\theta)\cos\theta]\}, \tag{53}$$

$$\zeta_\rho^0(\theta,\mu) = \left[\frac{\mu}{\Omega_*(\theta)} - \frac{a_0\tilde{n}_0(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}\right]\Omega_\rho(\theta) + \frac{a}{g\Omega_\rho(\theta)\Omega_*^2(\theta)}\{-g[\Omega_2(\theta)\sin\theta +$$
$$+\tilde{n}_0(\theta)\cos\theta][\Omega_*^2(\theta) - \Omega_\nu(\theta)\omega_\nu(\theta)] + G_3(\theta)\Omega_\nu(\theta)\left[\Omega_*^2(\theta) - \boldsymbol{\omega}_*\cdot\mathbf{\Omega}_*(\theta)\right]\}, \tag{54}$$

$$\zeta_\alpha^0(\theta,\mu) = \frac{a}{g\Omega_\rho(\theta)}\{G_1(\theta)[\tilde{n}_0(\theta) - \Omega_3(\theta)]\sin\theta + G_2(\theta)[\Omega_1(\theta) - \omega_1(\theta)] +$$
$$+\frac{g\Omega_\nu(\theta)}{\Omega_*^2(\theta)}(\omega_1(\theta)[\Omega_2(\theta)\cos\theta - \tilde{n}_0(\theta)\sin\theta] - \omega_2(\theta)\Omega_1(\theta))\},$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_*(\theta)\cdot\mathbf{\Omega}_*(\theta) = \Omega_1(\theta)\omega_1(\theta) + [\Omega_2(\theta)\cos\theta - \tilde{n}_0(\theta)\sin\theta]\omega_2(\theta) +$$
$$+[\Omega_2(\theta)\sin\theta + \tilde{n}_0(\theta)\cos\theta]\tilde{n}(\theta). \tag{55}$$

Введем неподвижный базис $\mathbf{C}_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^0\mathbf{E}_3^0$, который связан с базисом $\mathbf{e}_\nu\mathbf{e}_\rho^0\mathbf{e}_\alpha^0$ так

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{e}_\rho^0 = \mathbf{E}_2^0\cos\gamma + \mathbf{E}_3^0\sin\gamma, \quad \mathbf{e}_\alpha^0 = -\mathbf{E}_2^0\sin\gamma + \mathbf{E}_3^0\cos\gamma,$$

и запишем теперь разложение вектора $\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu)$ в неподвижном базисе

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\theta,\mu)=\zeta_1^0(\theta,\mu)\mathbf{E}_1+\zeta_2^0(\theta,\mu)\mathbf{E}_2^0+\zeta_3^0(\theta,\mu)\mathbf{E}_3^0,$$

в котором

$$\begin{gathered}\zeta_1^0(\theta,\mu)=\zeta_\nu^0(\theta,\mu),\qquad \zeta_2^0(\theta,\mu)=\zeta_\rho^0(\theta,\mu)\cos\gamma-\zeta_\alpha^0(\theta)\sin\gamma,\\ \zeta_3^0(\theta,\mu)=\zeta_\rho^0(\theta,\mu)\sin\gamma+\zeta_\alpha^0(\theta)\cos\gamma,\end{gathered}\tag{56}$$

а угол γ определен квадратурой из (51).

При движении тела S_0 его подвижный аксоид (45)–(46) катится по неподвижному (56), (53)–(55), (51), причем это качение сопровождается скольжением вдоль общей образующей $\boldsymbol{\Omega}_*$ аксоидов со скоростью $v_c^0=\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\mathbf{v}_*/\Omega_*$, или с учетом (2), (16), (19), (9) имеем

$$v_c^0=\frac{a}{\Omega_*(\theta)}\{-\Omega_1(\theta)\omega_2(\theta)+\omega_1(\theta)[\Omega_2(\theta)\cos\theta-\tilde{n}_0(\theta)\sin\theta]\}.\tag{57}$$

Отметим, что в общем случае $a\neq 0$, $a_0\neq 0$ и скорости скольжения аксоидов (40), (57) отличны от нуля. Если же одно из тел системы закреплено в центре масс (например, $a=0$), то качение подвижного аксоида тела S_0 по неподвижному происходит без скольжения.

Неподвижный базис $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^0\mathbf{E}_3^0$ повернут вокруг оси $\mathbf{E}_1$ по отношению к базису $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$ на угол δ: $\cos\delta=\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\alpha^0$.

Внесем (28), (47) в правую часть (54) и получим

$$\cos\delta=\frac{\boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{\Omega}_*-\omega_\nu\Omega_\nu}{\omega_\rho\Omega_\rho},$$

где $\boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{\Omega}_*$ определено соотношением (55). Матрица вложения неизменно связанного с телом S_0 базиса $\mathbf{e}_1^{0*}\mathbf{e}_2^{0*}\mathbf{e}_3^0$ в неподвижное пространство $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^0\mathbf{E}_3^0$ имеет аналогичный (43) вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_1^{0*}=E_{11}^0\mathbf{E}_1+E_{21}^0\mathbf{E}_2^0+E_{31}^0\mathbf{E}_3^0,\qquad \mathbf{e}_2^{0*}=E_{12}^0\mathbf{E}_1+E_{22}^0\mathbf{E}_2^0+E_{32}^0\mathbf{E}_3^0,\\ \mathbf{e}_3^{0*}=E_{13}^0\mathbf{E}_1+E_{23}^0\mathbf{E}_2^0+E_{33}^0\mathbf{E}_3^0.\end{gathered}$$

Здесь $E_{11}^0=\sigma_{11}\cos\Phi+\sigma_{12}\sin\Phi,\ \ E_{12}^0=-\sigma_{11}\sin\Phi+\sigma_{12}\cos\Phi,\ \ E_{13}^0=\sigma_{13},$

$$E_{21}^0=(\sigma_{21}\cos\gamma-\sigma_{31}\sin\gamma)\cos\Phi+(\sigma_{22}\cos\gamma-\sigma_{32}\sin\gamma)\sin\Phi,$$

$$E_{22}^0=-(\sigma_{21}\cos\gamma-\sigma_{31}\sin\gamma)\sin\Phi+(\sigma_{22}\cos\gamma-\sigma_{32}\sin\gamma)\cos\Phi,$$

$$E_{23}^0=\sigma_{23}\cos\gamma-\sigma_{33}\sin\gamma,\ \ E_{33}^0=\sigma_{23}\sin\gamma+\sigma_{33}\cos\gamma,$$

$$E_{31}^0=(\sigma_{21}\sin\gamma+\sigma_{31}\cos\gamma)\cos\Phi+(\sigma_{22}\sin\gamma+\sigma_{32}\cos\gamma)\sin\Phi,$$

$$E_{32}^0=-(\sigma_{21}\sin\gamma+\sigma_{31}\cos\gamma)\sin\Phi+(\sigma_{22}\sin\gamma+\sigma_{32}\cos\gamma)\cos\Phi;$$

$$\sigma_{11}=G_1/g,\quad \sigma_{12}=G_2^0/g,\quad \sigma_{13}=G_3^0/g,$$

$$\sigma_{21}=\frac{g\Omega_1-G_1\Omega_\nu}{g\Omega_\rho},\ \ \sigma_{22}=\frac{g\Omega_2-G_2^0\Omega_\nu}{g\Omega_\rho},\ \ \sigma_{23}=\frac{g\tilde{n}_0-G_3\Omega_\nu}{g\Omega_\rho},$$

$$\sigma_{31} = \frac{G_2^0\tilde{n}_0 - G_3^0\Omega_2}{g\Omega_\rho}, \quad \sigma_{32} = \frac{G_3^0\Omega_1 - G_1\tilde{n}_0}{g\Omega_\rho}, \quad \sigma_{33} = \frac{G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1}{g\Omega_\rho}.$$

Указанный алгоритм построения аксоидов тел S и S_0 применим для *любого решения*, полученного в задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным шарниром [7, 8].

В случае сферического шарнира имеют место циклические интегралы (величины $\tilde{n}$ и $\tilde{n}_0$ постоянны), в формулах (34), (51) $\dot{\tilde{n}} = 0$, $\dot{\tilde{n}}_0 = 0$, а углы φ и Φ изменяются независимо.

1. *Лесина М.Е.* Точные решения двух новых задач аналитической динамики систем сочлененных тел. – Донецк: ДонГТУ, 1996. – 238 с.
2. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.
3. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. – 1980. – Вып. 12. – С. 3-8.
4. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Новый подход к построению аксоидов в задаче о движении системы двух связанных тел // Там же. – 1993. – Вып. 25. – С. 30-42.
5. *Жуковский Н.Е.* О значении геометрического истолкования в теоретической механике. – Полн. собр. соч. Механика: цели, идеи, задачи приложения. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – Т. IX. – С. 181-187.
6. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 3. – С. 502-507.
7. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 15-21.
8. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Там же. – С. 1-7.

N.F. Gogoleva, Ya.V. Zinovjeva

Equations of axoids for the problem of motion of two Lagrange gyros jointed by a nonholonomic hinge

Equalizations of axoids (loose and fixed) task are in-process shown out about motion of two gyroscopes of Lagrange, connected by a resilient and nonholonomic hinge. These equalizations are summarized by the equalizations of axoids bodies, connected by only a resilient hinge got before.

Keywords: *system of Lagrange gyros, loose and fixed axoids, nonholonomic hinge.*

Н.Ф. Гоголєва, Я.В. Зінов'єва

Рівняння аксоїдів задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром

Отримано рівняння аксоїдів (рухомого і нерухомого) задачі про рух двох гіроскопів Лагранжа, сполучених неголономним шарніром. Ці рівняння узагальнюють отримані раніше рівняння аксоїдів тіл, сполучених сферичним шарніром.

Ключові слова: *система гіроскопів Лагранжа, рухомі і нерухомі аксоїди, неголономний шарнір.*

Донецкий национальный техн. ун-т Получено 03.09.12

yana.zinovjeva@yandex.ru