УДК 517.9

©2012. **В.Н. Неспирный**

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ СО ЗНАКОПОСТОЯННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В СИЛУ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ ГЛАДКОСТИ

Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений доказана теорема о существовании функции, имеющей знакопостоянную производную. Показано, что для любого m такая функция может быть выбрана в классе непрерывно дифференцируемых до m-го порядка включительно. Доказательство является конструктивным и дает один из способов построения функции со знакопостоянной производной. В качестве примера рассмотрен класс систем, являющийся обобщением примера Арцтейна.

Ключевые слова: *автономные системы, функции Ляпунова.*

1. Введение. Функции со знакопостоянной производной играют важную роль при исследовании устойчивости динамических систем. В частности, первая теорема Ляпунова [1] утверждает, что существование такой функции в классе знакоопределенных противоположного по знаку производной является достаточным условием устойчивости. Е.А. Барбашин и Н.Н. Красовский [2] доказали, что для обеспечения асимптотической устойчивости достаточно потребовать, чтобы множество обращения производной в нуль не содержало инвариантного подмножества. Новые результаты, использующие знакопостоянную производную, были получены в связи с развитием метода дополнительных функций [3]. Этот метод дал возможность для любой системы, имеющей функцию со знакопостоянной производной, за конечное число шагов построить функцию Ляпунова, производная которой обращается в нуль лишь на инвариантном множестве, содержащем начало координат [4], что позволило анализировать устойчивость динамических систем, выделяя устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные. В связи с этими результатами возникла задача существования и построения функций со знакопостоянной производной.

Указанная задача тесно связана с вопросами обращения теорем второго метода Ляпунова. Первые достаточно общие результаты в решении этих вопросов были получены Х.Л. Массерой [5], который доказал существование непрерывно дифференцируемой функции Ляпунова (положительно определенной с отрицательно определенной производной) для системы с периодическими по времени правыми частями и асимптотически устойчивым тривиальным решением. Практически одновременно с работой [5] вышла статья Е.А. Барбашина [6], где было доказано существования такой функции с непрерывными частными производными до m-го порядка включительно для автономных систем с правыми частями, имеющими ту же степень гладкости. И.Г. Малкиным [7] результат Массеры был обобщен на произвольные неавтономные системы. Наиболее полный результат в обращении теоремы об асимптотической устойчивости был получен Я. Курцвейлем [8]. Он доказал существование сколь угодно гладких функций Ляпунова в предположении лишь непрерывности правых частей. Следующим шагом стало обращение теорем о неустойчивости, в связи с чем было снято требование знакоопределенности функции. Н.Н. Красовским [9, 10] было установлено, что для существования функции со знакоопределенной производной в силу системы необходимым и достаточным условием является отсутствие целых траекторий в достаточно малой окрестности начала координат.

Как показано в [11, 12], для существования функции со знакопостоянной производной достаточно потребовать наличия у системы хотя бы одной траектории, проходящей как угодно близко к началу координат и покидающей его окрестность в прямом или обратном времени. Однако, если для неавтономной системы полученная функция будет достаточно гладкой [11], то для автономных систем гарантируется лишь существование непрерывной производной в силу системы [12]. В настоящей работе ставится вопрос о построении для автономной системы дифференциальных уравнений функции со знакопостоянной производной с наперед заданной степенью гладкости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор, функция $f : R^n \to R^n$ имеет непрерывные частные производные до m-го порядка включительно, $f(0) = 0$, что обеспечивает существование нулевого решения. Будем рассматривать уравнение в некоторой области M, содержащей начало координат как внутреннюю точку. Предполагается, что, кроме начала координат, других особых точек в области M нет, т.е. $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Кроме того, для любой точки x_0 в M гарантируется существование и единственность решения $x(t; x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $x(0) = x_0$. Будем также предполагать, что граница области M является настолько гладкой, что функция $\varphi(x)$, определяющая эту границу, является непрерывно дифференцируемой m раз.

Под производной в силу системы (1) функции $V : R^n \to R$ понимается функция $\dot{V} : R^n \to R$, определяемая выражением [1]

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x) = \sum_{i=\overline{1,n}} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x).$$

Рассмотрим задачу о построении функции $V(x)$, определенной в некоторой открытой окрестности начала координат, обращающейся в нуль в начале координат, но не равной нулю тождественно, и производная которой вдоль траекторий системы (1) является положительно-постоянной. В работе [12] показано, что такая функция существует по крайней мере в классе непрерывных при условии, что множество, являющееся объединением интегральных кривых, лежащих целиком в окрестности начала координат, не содержит точку нуль в качестве внутренней. Поставим вопрос о том, насколько гладкой может быть эта функция.

Основной результат может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Существует функция V, имеющая непрерывные частные производные до m-го порядка включительно во всех точках, быть может за исключением начала координат, производная которой в силу системы (1) является положительно-постоянной в некоторой окрестности начала координат.

3. Классификация траекторий. Определим ε-окрестность множества M

$$M^{\varepsilon} = \{x : d(x, M) < \varepsilon\}. \tag{2}$$

Разобьем M на подмножества в зависимости от характера поведения траекторий, проходящих через точки этих подмножеств:

$$\begin{aligned}
M_1 =&\{x_0 \in M : \exists t_1 \leqslant 0,\ \varepsilon_0 > 0 :\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0\ x(t_1 - \varepsilon) \notin M, \\
&\forall t > t_1\ x(t; x_0) \in M,\ \lim_{t \to +\infty} x(t; x_0) = 0\}; \\
M_2 =&\{x_0 \in M : \exists t_2 \geqslant 0, \varepsilon_0 > 0 :\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0\ x(t_2 + \varepsilon) \notin M, \\
&\forall t < t_2\ x(t; x_0) \in M,\ \lim_{t \to -\infty} x(t; x_0) = 0\}; \\
M_3 =&\{x_0 \in M : \exists t_1 \leqslant 0, t_2 \geqslant 0, \varepsilon_0 > 0 : \\
&\forall \varepsilon < \varepsilon_0\ x(t_1 - \varepsilon; x_0) \notin M,\ x(t_2 + \varepsilon) \notin M,\ \forall t : t_1 < t < t_2\ x(t; x_0) \in M\}; \\
M_0 =&M \backslash M_{123}, \qquad M_{123} = M_1 \cup M_2 \cup M_3.
\end{aligned} \tag{3}$$

Множества M_i, $i = \overline{1,3}$, совпадают с одноименными множествами, определенными в работе [9]. Однако, поскольку нет гарантии отсутствия целых траекторий на множестве M, притяжение к началу координат мы требуем явно.

Множества M_i инвариантны, так как определяются свойствами траекторий. Если множество M_0 пусто, то в области M нет целых траекторий и можно построить функцию V со знакоопределенной производной [9]. В противном случае траектория, исходящая из произвольной точки $x_0 \in M$, будет иметь предельный цикл (в прямом или обратном времени). Для предельных циклов же можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть V определена, непрерывна на M, а ее производная $\dot{V}$ вдоль траекторий системы (1) положительно-постоянна на том же множестве. Пусть $x(t; x_0)$ – траектория системы (1), причем $x(t; x_0) \in M$ при $t \in (a; b)$. Если $\lim_{t \to a} x(t; x_0) = \lim_{t \to b} x(t; x_0)$, то $\dot{V}(x) = 0$ для всех точек x траектории $x(t; x_0)$ при $t \in (a; b)$.

Доказательство. Обозначим $x^* = \lim_{t\to a} x(t;x_0) = \lim_{t\to b} x(t;x_0)$. Поскольку V непрерывна на M, то $\lim_{t\to a} V(x(t;x_0)) = \lim_{t\to b} V(x(t;x_0)) = V(x^*)$. Проинтегрируем $\dot V(x)$ вдоль траектории $x(t;x_0)$:

$$\int_a^b \dot V(x(t;x_0))dt = V(x)|_{x=a}^{x=b} = V(x^*) - V(x^*) = 0. \tag{4}$$

Так как производная знакопостоянна, то $\dot V(x) \geqslant 0$ при $x \in M$. Тогда достаточно показать, что не существует такого $t' \in (a,b)$, при котором $\dot V(x(t';x_0)) > 0$. Пусть такое t' существует и $\dot V(x(t';x_0)) = c > 0$. В силу непрерывности имеется окрестность $[t'-\delta, t'+\delta]$, где $\dot V(x(t,x_0)) > c/2$. Тогда

$$\int_a^b \dot V(x(t;x_0))dt = \int_a^{t'-\delta} + \int_{t'-\delta}^{t'+\delta} + \int_{t'+\delta}^{b}.$$

Первый и третий интегралы неотрицательны, а второй не меньше $c\delta$ и потому строго положителен. Значит интеграл по всему отрезку должен быть также положительным, что противоречит равенству (4). Следовательно, точек x с положительным значением производной $\dot V$ на траектории $x(t;x_0)$ при $t \in (a,b)$ быть не может. □

4. Принцип построения функции. Определим функцию $V(x)$ в виде произведения двух функций:

$$V(x) = \gamma(x)V_0(x), \qquad V_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in M_0, \\ \int_0^{+\infty} G(|\phi(t;x)|)dt, & x \in M_1, \\ \int_0^{-\infty} G(|\phi(t;x)|)dt, & x \in M_2, \\ \int_T^{0} G(|\phi(t;x)|)dt, & x \in M_3. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь функция $V_0(x)$ определяется на M_{123} так же, как и в [9]. Там же было показано, что за счет выбора функции G можно гарантировать непрерывность и гладкость функции V_0 на множестве M_{123}. Однако, после доопределения этой функции нулевым значением на множестве M_0, на стыке множеств M_0 и M_{123} могут возникнуть разрывы. Функция $\gamma(x)$, определенная на всем множестве M, должна выбираться так, чтобы сгладить эти разрывы и сделать функцию V гладкой на M.

Введем функцию $\bar{\gamma}$, определенную на $M^* = \partial M$:

$$\begin{aligned}
&\bar{\gamma}(x) : M^* \to R; && \bar{\gamma} \in C^m, \\
&\bar{\gamma}(x) = 0, \quad \frac{\partial^k \bar{\gamma}(x)}{\partial x^k} = 0 && \text{при } x \in M_0^*, \quad k = \overline{1, m}, \\
&\bar{\gamma}(x) > 0 && \text{при } x \in M_1^* \cup M_2^* \cup M_3^*, \\
&\bar{\gamma}(x(t_1, x_0)) = \gamma(x(t_2, x_0)) && \forall x_0 \in M_3,
\end{aligned} \tag{6}$$

и определим

$$\gamma(x_0) = \begin{cases} 0, & x_0 \in M_0, \\ \bar{\gamma}(x(t_1; x_0)), & x_0 \in M_1, \\ \bar{\gamma}(x(t_2; x_0)), & x_0 \in M_2, \\ \bar{\gamma}(x(t_1, x_0)) = \bar{\gamma}(x(t_2, x_0)), & x_0 \in M_3, \end{cases} \tag{7}$$

где $t_1 < 0$, $t_2 > 0$ – моменты времени, когда траектория $x(t, x_0)$ достигает M^*.

Утверждение 2. Функция $\gamma(x)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные до m-го порядка включительно в $M \setminus \{0\}$.

Доказательство. Выберем произвольную точку $x_0 \in M \setminus \{0\}$. Возможны следующие случаи:

1. Если x_0 является внутренней точкой M_0, то существует окрестность, в которой $\gamma(x) \equiv 0$. Очевидно, что в этой точке функция будет дифференцируемой сколько угодно раз.

2. Пусть x_0 является внутренней точкой множества M_{123}. Тогда функция V_0 m раз непрерывно дифференцируема в этой точке, и достаточно показать, что функция $\gamma(x)$ обладает тем же свойством.

Поскольку $x_0 \in M_{123}$, то существует момент времени t_0^*, когда траектория $x(t; x_0)$ достигает границы области M, т.е. $\varphi(x(t_0^*, x_0)) = 0$. Возьмем такую окрестность B точки x_0, которая целиком содержится в множестве M_{123}. Рассмотрим траектории $x(t; x_1)$, проходящие через точки $x_1 \in B$. В силу того, что правая часть системы (1) имеет непрерывные производные до m-го порядка, функция $x(t; x_1)$ будет непрерывно дифференцируема $m + 1$ раз по своему первому аргументу t в B. Дифференцируемость по второму аргументу следует из теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости системы дифференциальных уравнений от параметров (в случае аналитических правых частей, согласно теореме Пуанкаре–Ляпунова [13, с.197], эта зависимость будет аналитической в точке x_0). Определим момент времени t_1^*, когда траектория $x(t; x_1)$ достигает M^*. Он должен удовлетворять соотношению $\varphi(x(t_1^*; x_1)) = 0$. Поскольку $\varphi(x)$ и $x(t_1^*; x_1)$ – непрерывно дифференцируемые m раз функции, то их композиция имеет такой же порядок гладкости. В силу гладкости поверхности $\varphi(x) = 0$ и отсутствия особых точек, кроме нуля, якобиан композиции будет отличен от нуля. Следовательно, по теореме о неявной функции, существует m раз непрерывно дифференцируемая функция

$t^*(x_1)$, такая, что $\varphi(x(t^*(x_1); x_1)) = 0$ для любого $x_1 \in B$. По определению $\gamma(x_1) = \bar{\gamma}(x(t^*(x_1); x_1))$. Все функции, входящие в правую часть, непрерывно дифференцируемы m раз в точке x_0, значит, этим свойством обладает и их композиция $\gamma(x_1)$.

3. В любой окрестности точки x_0 есть как точки множества M_{123}, так и множества M_0. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_i\} \in M$ такую, что $\lim_{i\to\infty} x_i = x_0$. Рассмотрим отдельно члены, принадлежащие множеству M_0, и отдельно те, которые принадлежат множеству M_{123}. По крайней мере одно из этих множеств будет бесконечным и, значит, будет образовывать подпоследовательность, сходящуюся все так же к x_0. Если эта подпоследовательность будет состоят из точек M_0, то и функция $\gamma(x)$, и все ее производные любого порядка в этих точках будут равны нулю.

Предположим теперь, что выбранная подпоследовательность состоит из точек M_{123}. Построим тогда последовательность $\{x_i^*\}$, где $x_i^* = x(t^*(x_i), x_i)$, и выберем из нее подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке x_0^*. В силу непрерывности функции $\bar{\gamma}(x)$ и ее производных до m-го порядка, имеем для $k \leqslant m$

$$\frac{\partial^k \bar{\gamma}(x_i^*)}{\partial x^k} \to \frac{\partial^k \bar{\gamma}(x_0^*)}{\partial x^k}.$$

В силу открытости множества M_{123}, точка x_0 не может принадлежать этому множеству, а, значит, и $x_0^* \in M_0^*$. По условию функция $\bar{\gamma}$ вместе со всеми производными обращается в нуль в точке $x_0^* \in M_0^*$. Значит, производные $\dfrac{\partial^k \bar{\gamma}(x_i^*)}{\partial^k x}$ стремятся к нулю при $i \to \infty$. Производные функции γ, как производные от композиции, будут содержать множителем соответствующие производные от функции $\bar{\gamma}$ и, следовательно, в точке x_0 будут равны нулю.

Итак, мы показали, что у всех сходящихся подпоследовательностей $\left\{\dfrac{\partial^k \gamma(x_i)}{\partial^k x}\right\}$ пределы совпадают. Следовательно, сходится и вся последовательность. Поскольку $\{x_i\}$ выбиралась произвольно, делаем вывод о непрерывности и m-кратной дифференцируемости функции γ в точке x_0. $\square$

Утверждение 3. Функция $\bar{\gamma}(x)$, определенная формулой (6), существует для системы (1) на поверхности M^*.

Доказательство. В работе [12] показано, что функцию $\bar{\gamma}_0(x)$, удовлетворяющую на M^* всем необходимым требованиям из (6), быть может за исключением дифференцируемости в граничных точках M_0^*, можно построить в следующем виде:

$$\bar{\gamma}_0(x) = \min_{x' \in M_0^*} d(x, x'), \tag{8}$$

где $d(x, x')$ – определенным образом выбранная метрика на многообразии M^*. Для того, чтобы сгладить функцию $\bar{\gamma}(x)$, проинтегрируем ее вдоль геодезической линии, соединяющей точку x с точкой, доставляющей минимум в формуле (8). Получим дифференцируемую функцию $\bar{\gamma}_1$, причем не только сама функция, но и ее частные производные будут обращаться в нуль в граничных точках M_0^*. Повторяя эту операцию m раз, получим функцию $\bar{\gamma}_m(x)$, которая будет удовлетворять всем условиям, определяемым формулой (6). $\square$

Итак, если построить функцию $V(x)$ в виде (5), непрерывность ее частных производных обеспечит утверждение 2 везде, за исключением точки $x = 0$. Тем не менее следует отметить, что функция $V(x)$ будет по крайней мере непрерывной при $x = 0$, что доказано в [12].

Поскольку $\dot{\gamma}(x) = 0$ при $x \in M$ по построению, то производная $V(x)$ в силу системы (1) равна $\dot{V}(x) = \gamma(x)\dot{V}_0(x)$. Так как, согласно (6), $\gamma(x) \geqslant 0$ и по условию $\dot{V}_0(x) \geqslant 0$, имеем $\dot{V}(x) \geqslant 0$. Таким образом, теорема полностью доказана.

5. Пример. В качестве примера рассмотрим следующую двумерную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \cos\frac{k\pi}{2}, \\ \dot{y} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \sin\frac{k\pi}{2}, \end{aligned} \qquad n \geqslant 2. \tag{9}$$

Система (9) является обобщением примера Арцтейна [14] (последний получается при $n = 2$). Ее особенность заключается в наличии траекторий, которые проходят вдоль луча, образующего угол $\dfrac{k\pi}{n-1}$ с положительным направлением оси Ox. При этом, если начальная точка находится на таком луче, соответствующем четному значению k, то траектория в прямом времени уходит на бесконечность (причем за конечное время), а в обратном времени асимптотически стремится к нулю. При нечетных k траектории уходят на бесконечность в обратном времени и стремятся к нулю в прямом.

Для доказательства перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, в которых система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \rho^n \cos(n-1)\varphi, \\ \dot{\varphi} &= \rho^{n-1}\sin(n-1)\varphi. \end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда легко получить первый интеграл

$$\frac{\sin(n-1)\varphi}{\rho^{n-1}} = C, \tag{11}$$

из которого следует, что все траектории с начальным условием $\sin(n-1)\varphi \neq 0$ ограничены. В силу того, что $\sin(n-1)\varphi$ сохраняет знак, $\varphi(t)$ монотонно возрастает или убывает (см. второе уравнение (10)), приближаясь к значению, для которого $\sin(n-1)\varphi = 0$. Но в этом случае, согласно (11), ρ обязано так

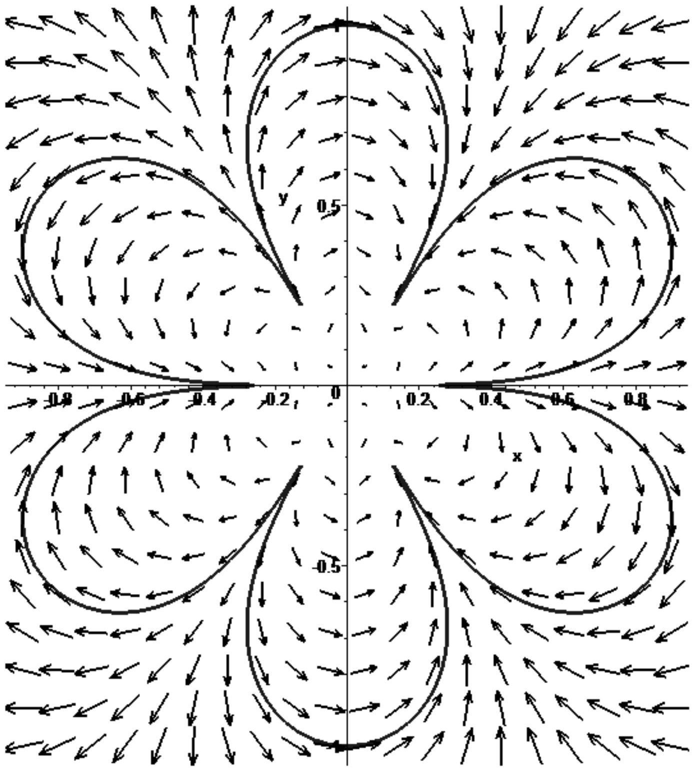

Рис. 1. Фазовый портрет системы (9) *при n=4.*

же стремиться к нулю. Причем это свойство, как видно из рис. 1, имеет место как в прямом, так и в обратном времени.

Несмотря на глобальное притяжение почти всех траекторий, существование лучей с четным k уже гарантирует неустойчивость системы (9). Более того, выбирая начальные условия достаточно близко к таким лучам и оставаясь в окрестности нуля, с течением времени можно получить как угодно большие значения ρ.

Построим теперь функцию со знакопостоянной производной в области $M = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$. Определим сначала множества M_i. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}
&M_0 = \{(x, y) : r^{n-1}|\sin(n-1)\varphi| \leqslant \rho^{n-1}\},\\
&M_1 = \{(x, y) : r^{n-1}|\sin(n-1)\varphi| > \rho^{n-1}, \quad \cos(n-1)\varphi < 0\},\\
&M_2 = \{(x, y) : r^{n-1}|\sin(n-1)\varphi| > \rho^{n-1}, \quad \cos(n-1)\varphi > 0\},\\
&M_3 = \emptyset.
\end{aligned}$$

Положим $\bar{\gamma}(x, y) = \cos^2(n-1)\varphi$, которая, очевидно, удовлетворяет всем требованиям, накладываемым уравнением (6). Для того, чтобы функция $V(x)$ из

(5) была полностью определена, достаточно теперь построить лишь функцию $G(\rho)$. Для этого, следуя Массере, найдем оценку ρ в момент времени t при начальных условиях из множества M_1, равномерную по всему этому множеству. Поскольку на M_1 величина $\cos(n-1)\varphi$ отрицательна, то $\rho(t;\rho_0,\varphi_0)$ убывает с течением времени t, а, значит, максимальное значение ρ имеет смысл искать при максимальном значении ρ_0, т. е. при $\rho_0 = r$. При фиксированном значении ρ_0 максимум ρ будет достигаться тогда, когда $\cos(n-1)\varphi_0$ будет максимальным (т.е. равным 0), так как $d/dt(\cos(n-1)\varphi)$ всегда отрицательно. Итак, получаем, что $\rho(t;\rho_0,\varphi_0) \leqslant \rho(t; r, (\pi/2+k\pi)/(n-1))$. При таких начальных значениях имеем $\operatorname{ctg}(n-1)\varphi = -\dfrac{(n-1)r^{n-1}t}{\sin(\pi/2+k\pi)} + \operatorname{ctg}(\pi/2+k\pi)$, и значит, $\cos(n-1)\varphi = -(1+((n-1)r^{n-1}t)^{-2})^{-1/2}$. Подставив полученное выражение в первое уравнение (10) и проинтегрировав его, получим окончательную верхнюю оценку решения $\rho(t;\rho_0,\varphi_0)$ в виде $\rho(t) = r(((n-1)r^{n-1}t)^2+1)^{-\frac{1}{2(n-1)}}$.

Обратим функцию $\rho(t)$. Имеем $t(\rho) = \sqrt{\rho^{-2(n-1)} - r^{-2(n-1)}}/(n-1)$. Полученная функция $t(\rho)$ определена при $\rho \leqslant r$, является убывающей по своему аргументу, как и требуется в лемме Массеры. Поэтому функция $G(\rho)$ может быть определена как

$$G(\rho) = \exp(-t(\rho)) = \exp\left(-\frac{1}{n-1}\sqrt{\rho^{-2(n-1)} - r^{-2(n-1)}}\right).$$

Абсолютно такая же функция G строится и для множества M_2. Подставляя указаннные функции $\bar{\gamma}$ и G в формулу (5), получим функцию $V(x)$, непрерывную на всем множестве M, имеющую непрерывные частные производные любого порядка на $M \setminus \{0\}$ и знакопостоянную производную вдоль траекторий системы (9).

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 476 с.
2. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
3. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина-Красовского // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
4. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелийненых систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3–28.
5. *Massera J.L.* On Liapounoff's conditions of stability // Annals Math. 2 Ser. – 1949. – **50**, 3. – P. 705—721.
6. *Барбашин Е.А.* О существовании гладких решений некоторых линейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, №3. – С. 445–447.
7. *Малкин И.Г.* К вопросу об обращении теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости // Прикл. математика и механика. – 1952. – **18**, вып. 2. – С. 129–138.
8. *Курцвейль Я.* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости // Чехослов. матем. журнал. – 1956. – **6** (81), № 2. – С. 217–259; № 4. – С. 455–484.
9. *Красовский Н.Н.* Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 5. – С. 513–532.

10. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения – М.: Гос. изд-во физматлит, 1959. – 211 с.
11. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н., Суйков А.С.* Существование функции со знакопостоянной производной для неавтономных систем дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 3–10.
12. *Ковалев А.М., Неспирный В.Н., Суйков А.С.* Существование функции со знакопостоянной производной для автономных систем дифференциальных уравнений // Доп. НАН України. – 2012. – № 9. – С. 13–18.
13. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979. – 744 с.
14. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // J. Nonlin. Anal. – 1983. – **7**, № 11. – P. 1163–1173.

V.N. Nespirnyy

Construction of functions with semidefinite derivative along trajectories of autonomous systems with arbitrary order of smoothness

For autonomous systems of ordinary differential equations the theorem of existence of function having semidefinite derivative is proved. It is shown that for any m such function can be chosen from the class of continuously differentiable up to order m inclusively. The proof is constructive and gives some approach for constructing a function with semidefinite derivative. A class of systems generalizing Artstein's circle is considered as an example.

Keywords: *autonomous systems, Lyapunov function.*

В.М. Неспірний

Побудова функцій зі знакосталою похідною в силу автономної системи з довільним степенем гладкості

Для автономних систем звичайних диференціальних рівнянь доведено теорему про існування функції, яка має знакосталу похідну. Показано, що для будь-якого m таку функцію можна вибрати у класі неперервно диференційовних функцій до m-го порядку включно. Доведення є конструктивним і дає один із способів побудови функції зі знакосталою похідною. Як приклад розглянуто клас систем, який є узагальненням прикладу Арцтейна.

Ключові слова: *автономні системи, функції Ляпунова.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 29.08.12

vetal_n@mail.ru