УДК 62-50:519.7

©2012. **В.Ф. Щербак**

ИНВАРИАНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрена задача определения вектора постоянных параметров динамической системы по информации о значениях ее фазового вектора. Предложена схема построения асимптотического идентификатора для неизвестных параметров. Используется метод синтеза инвариантных многообразий, разработанный для решения обратных задач теории управления. Метод позволяет находить конечные соотношения между переменными, которые на траекториях системы определяют искомые неизвестные как функции от известных величин.

Ключевые слова: *идентификация, инвариантные многообразия, гиростат.*

Для многих задач управления динамическими системами характерна ситуация, когда часть параметров системы неизвестна. В таких случаях возникает задача идентификации, которая состоит в определении неизвестных параметров по значениям выхода – известной информации о движении. Возможность решения задачи идентификации – свойство идентифицируемости – существенным образом зависит от аналитической структуры правых частей уравнений динамики и доступной информации [1].

Целью данной работы является распространение метода синтеза инвариантных многообразий в задачах управления [2, 3] на задачи идентификации динамических систем. Чтобы не усложнять изложение метода особенностями, возникающими при идентификации систем общего вида, рассмотрим относительно простой случай, а именно: предположим, что выходом исходной системы является фазовый вектор, а сама система линейно зависит от неизвестных параметров. Обобщения на более общие конструкции систем "вход–выход", в том числе и с привлечением информации о выходе, полученной на нескольких траекториях, могут быть проведены с использованием описанного ниже подхода и представляют предмет отдельного исследования.

1. Дополнительные соотношения в задаче идентификации. Рассмотрим динамическую систему, правые части которой линейно зависят от вектора неизвестных параметров a:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)a, \quad x(0) = x_0; \quad x \in R^n, \quad a \in R^k. \tag{1}$$

Полагаем, что функция $f(x)$ и матрица $g(x)$ размером $(n \times k)$ удовлетворяют условиям теоремы о существовании и единственности решения $x(t)$ системы (1). Предполагается также, что значения $x(t)$ – функции выхода – измеряются

Работа выполнена при поддержке проекта украинско-австрийского сотрудничества (гос. рег. № 0111U007275).

и известны для любого $t \geq 0$. Задача идентификации состоит в определении по этой информации вектора постоянных параметров a.

При $k \leq n$ достаточные условия идентифицируемости системы (1) в некоторой области $D \subseteq R^n$ имеют вид [1]

$$\forall x \in D \quad \text{rank}\ \left(g, \frac{\partial f}{\partial x} g, \ldots, \frac{\partial f^{n-1}}{\partial x^{n-1}} g\right) = k. \tag{2}$$

Далее будем полагать, что эти условия выполнены в области D, которой принадлежит наблюдаемая траектория $x(t)$.

Дополним исходную систему (1) уравнениями для искомых параметров a и вектора $A(t)$, который будем использовать для их оценки:

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{A} = u(A, x). \tag{3}$$

Здесь $u(A, x) \in R^k$ – некоторое управление. Будем рассматривать дифференциальные уравнения (3) как динамическое расширение системы (1). Отметим, что если вектор-функция $u(A, x)$ выбрана и задано начальное значение $A_0 = A(0)$, то вектор $A(t)$ может быть найден в результате решения задачи Коши. При выполнении этих условий значения $A(t)$ будем считать известными.

Обозначим через $e(t) = A(t) - a$, тогда из (3) следует, что $\dot{e} = u(x, A)$. Основная идея предлагаемого подхода – выразить неизвестные a как некоторые функции от известных. В нашем случае известными считаются $x(t), A(t)$. Для этого переформулируем задачу следующим образом. Будем подбирать управление $u(A, x)$ так, чтобы система дифференциальных уравнений (1),(3) имела инвариантное многообразие M, которое в пространстве переменных x, e описывалось бы системой k равенств

$$e - \Phi(x) = 0 \tag{4}$$

с некоторой функцией $\Phi(x)$. Тогда, если начальные условия x_0, A_0 выбраны так, что траектория системы (1), (3) принадлежит M, то при известной функции $\Phi(x)$ по формуле (4) можно вычислить значения $e(t) = A(t) - a$ или, что то же самое, найти параметры a.

В общем случае начальные условия не принадлежат M, но если указанное многообразие будет обладать свойством глобального асимптотического притяжения для всех траекторий расширенной системы (1), (3), то в случае непрерывности функции $\Phi(x)$ с помощью соотношений (4) может быть получена асимптотическая оценка параметров a.

Введем вектор η – отклонение траекторий от многообразия (4) по формуле $\eta = e - \Phi(x)$. Дифференцируя в силу системы (1),(3), получаем дифференциальные уравнения для отклонений η:

$$\dot{\eta} = u(A, x) - \Phi_x(x)[f(x) + g(x)(A - \Phi(x))] + \Phi_x(x)g(x)\eta, \tag{5}$$

где через Φ_x обозначена якобиева матрица $\partial\Phi(x)/\partial x$. Выберем управление $u(A, x)$ таким, что

$$u(x, A) = \Phi_x(x)[f(x) + g(x)(A - \Phi(x))]. \tag{6}$$

При таком управлении дифференциальные уравнения (5) становятся линейными и однородными относительно η

$$\dot{\eta} = \Phi_x(x)g(x)\eta, \tag{7}$$

т.е. функция $\eta(t) \equiv 0$ удовлетворяет (7). Тем самым доказано

Утверждение. *Для всякой дифференцируемой функции* $\Phi(x)$ *система дифференциальных уравнений (1),(3) с управлением (6) обладает инвариантным многообразием* M*, которое описывается формулой* (4).

Равенства (4) образуют систему дополнительных алгебраических соотношений, с помощью которых на траекториях, принадлежащих M, может быть найден вектор искомых параметров a. Чтобы (4) можно было использовать на любом решении системы (1), (3), а не только на тех, которые принадлежат инвариантному многообразию M, требуется из множества функций $\Phi(x)$ выбрать такую, для которой соответствующее ей многообразие обладает свойством глобального притяжения. Иными словами, функция $\Phi(x)$ должна быть такой, чтобы тривиальное решение (7) обладало свойством асимптотической устойчивости в области D.

Таким образом, предлагаемая схема решения задачи идентификации параметров системы (1) предполагает выбор дифференцируемой функции $\Phi(x)$, при которой решение задачи Коши с произвольным начальным условием A_0 для системы (3) с правой частью, определяемой (6), является ограниченным.

Для оценки параметров a используется формула

$$a = A(t) - \Phi(x(t)) - \eta(t). \tag{8}$$

Первые два слагаемые в правой части (8) известны. Остается открытым вопрос о синтезе такой функции $\Phi(x)$, для которой третье слагаемое – решение системы дифференциальных уравнений (7) – стремится к нулю.

Проблема обеспечения глобальной асимптотической устойчивости неавтономной системы дифференциальных уравнений (7) является сложной. В описанном способе решения задачи идентификации предполагается, что она рассматривается для каждой конкретной динамической системы отдельно, в зависимости от аналитического вида матрицы $g(x)$. В частности, если $g(x)$ является невырожденной якобиевой матрицей, то в качестве функции $\Phi(x)$ можно использовать функцию, якобиева матрица которой равна

$$\Phi_x(x) = Bg^T(x), \tag{9}$$

где $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ – диагональная матрица, $b_i < 0$, $i = \overline{1, k}$; T означает операцию транспонирования матрицы. Для случая $k = 1$ функция $\Phi(x)$

находится простым интегрированием выражения $Bg^T(x)$. Если же $k > 1$, то функции $\Phi(x)$, удовлетворяющей (9), в общем случае не существует.

В качестве примеров применения описанной схемы идентификации рассмотрим задачи определения параметров осесимметричного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки и гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

2. Идентификация параметра, характеризующего распределение масс в осесимметричном твердом теле. Запишем уравнения Эйлера для осесимметричного твердого тела, вращающегося вокруг своего центра масс. Обозначим A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции тела, и пусть $A_1 = A_2$. Тогда уравнения для угловой скорости $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеют вид

$$\dot{\omega}_1 = a\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = -a\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = 0, \tag{10}$$

где $a = (A_2 - A_3)/A_1$. Система (10) идентифицируема, если для любых моментов времени $\omega_3 \neq 0$, ${\omega_1}^2(t) + {\omega_2}^2(t) \neq 0$.

Рассмотрим задачу идентификации параметра a, считая известными значения вектора $\omega(t)$. Дополним систему (10) уравнением $\dot{a} = 0$ и введем уравнение для идентификатора $A(t)$ переменной a

$$\dot{A} = u(A, \omega). \tag{11}$$

Здесь $u(A, \omega) \in R$ – неопределенная пока функция. Функция $A(t)$ будет использована далее для оценки параметра a. Предлагаемый в работе подход заключается в оценивании искомых неизвестных (в данном случае параметра a) с помощью некоторых функций от известных величин. Введем в рассмотрение такую функцию $\Phi(\omega)$. В силу произвола $\Phi(\omega(t))$ на траекториях системы (10), (11) выполнено равенство (8)

$$A(t) - a = \Phi(\omega(t)) + \eta(t), \tag{12}$$

где η – некоторая величина, характеризующая отклонение.

Наложим ограничения на функции $u(A, \omega)$ и $\Phi(\omega)$. Выберем эти функции таким образом, что $\dot{\eta} = k\eta$, где константа $k < 0$. В этом случае формула (12) может быть использована для оценки параметра a. Действительно, значения $\Phi(\omega(t))$ известны, одно из неопределенных слагаемых – отклонение $\eta(t)$ – экспоненциально стремится к нулю с показателем затухания, равным k, а значения другого – $A(t)$ – находятся в процессе решения дифференциального уравнения (11) с любым начальным условием $A(0) = A_0$.

Уравнение $\dot{\eta} = k\eta$ с учетом (10)–(12) принимает вид

$$u(A, \omega) - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}(A - \Phi - \eta)\omega_2\omega_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2}(A - \Phi - \eta)\omega_1\omega_3 - k\eta = 0.$$

В частности, последнее равенство будет выполнено, если потребуем выполнения следующих двух соотношений:

$$u(A, \omega) = (A - \Phi)(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}\omega_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2}\omega_1)\omega_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}\omega_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2}\omega_1 = \frac{k}{\omega_3}.$$

Первое из них определяет вид управления $u(A, \omega)$, а второе – дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$. Его частным решением является

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = \frac{k}{\omega_3} \mathrm{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{13}$$

Зная аналитический вид функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$, находим правую часть уравнения (11) для идентификатора

$$\dot{A} = k\big(A - \frac{k}{\omega_3} \mathrm{arctg} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}\big). \tag{14}$$

Окончательно получаем равенство

$$a = A(t) - \frac{k}{\omega_3} \mathrm{arctg} \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} - \eta_0 \exp(kt), \tag{15}$$

где $A(t)$ – решение задачи Коши для уравнения (14) с $A(0) = A_0$. Формула (15) задает экспоненциальную оценку параметра a.

3. Определение компонент вектора гиростатического момента. Рассмотрим задачу идентификации двух компонент вектора гиростатического момента. В качестве уравнения движения гиростата возьмем уравнения [4]

$$\begin{aligned} A_1\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2, \\ A_2\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1, \end{aligned} \tag{16}$$

где A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости носителя, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – постоянный вектор гиростатического момента, у которого компоненты λ_1, λ_2 неизвестны. Полагая известными угловую скорость $\omega(t)$ и параметр λ_3, рассмотрим задачу идентификации параметров λ_1, λ_2 по имеющейся информации. Достаточные условия идентифицируемости системы (16) таковы: для любых моментов времени $\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) \neq 0$, а переменная $\omega_3(t)$ не меняет знак, $\omega_3(t) \neq 0$.

В соответствии с излагаемой методикой добавим к системе дифференциальных уравнений (16) уравнения $\dot{\lambda}_1 = 0$, $\dot{\lambda}_2 = 0$ и введем в рассмотрение переменные Λ_1, Λ_2, используемые далее для получения оценок параметров λ_1, λ_2. Полагаем

$$\dot{\Lambda}_1 = u_1(\omega), \quad \dot{\Lambda}_2 = u_2(\omega). \tag{17}$$

Выразим соответствующие отклонения в виде (8):

$$\Lambda_1 - \lambda_1 = \Phi_1(A_2\omega_2) + \eta_1, \quad \Lambda_2 - \lambda_2 = \Phi_2(A_1\omega_1) + \eta_2. \tag{18}$$

Заменим переменные λ_1, λ_2 в уравнениях (16) соотношениями $\lambda_i = \Lambda_i - \Phi_i - \eta_i, \quad i = 1, 2$.

Для того, чтобы использовать равенства (18) для получения асимптотических оценок параметров λ_1, λ_2, достаточно с помощью функций u_i, Φ_i, $i = 1, 2$, обеспечить асимптотическое стремление переменных η_1, η_2 к нулю. Дифференцируя (18) в силу (16), (17), получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{\eta_1} + \acute{\Phi}_1(A_2\omega_2)[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_3\omega_1 + (\Lambda_1 - \Phi_1 - \eta_1)\omega_3], \\ u_2 &= \dot{\eta_2} + \acute{\Phi}_2(A_1\omega_1)[(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \lambda_3\omega_2 - (\Lambda_2 - \Phi_2 - \eta_2)\omega_3], \end{aligned} \tag{19}$$

штрих означает дифференцирование Φ_1, Φ_2 соответственно по ω_2, ω_1.

Потребуем, чтобы для части слагаемых правых частей (19) были выполнены равенства

$$\dot{\eta_1} - \omega_3\acute{\Phi}_1(A_2\omega_2)\eta_1 = 0, \quad \dot{\eta_2} + \omega_3\acute{\Phi}_2(A_1\omega_1)\eta_2 = 0, \tag{20}$$

которые формируют дифференциальные уравнения для отклонений η_i, $i = 1, 2$. При выполнении (20) уравнения (19) определяют управления

$$\begin{aligned} u_1 &= \acute{\Phi}_1(A_2\omega_2)[(A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_3\omega_1 + (\Lambda_1 - \Phi_1)\omega_3], \\ u_2 &= \acute{\Phi}_2(A_1\omega_1)[(A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \lambda_3\omega_2 - (\Lambda_2 - \Phi_2)\omega_3]. \end{aligned} \tag{21}$$

Для нахождения из уравнений (20) отклонений η_1, η_2, полагаем

$$\Phi_1 = -\mathrm{sign}(\omega_3)A_2\omega_2, \quad \Phi_2 = \mathrm{sign}(\omega_3)A_1\omega_1, \tag{22}$$

тогда решение системы (20) таково

$$\eta_i(t) = \eta_i(0)\exp\{-\int_0^t |\omega_3(\tau)|d\tau\}, \quad i = 1, 2. \tag{23}$$

Из формул (18) получаем, что неизвестные параметры λ_1, λ_2 удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Lambda_1(t) + \mathrm{sign}(\omega_3(t))A_2\omega_2(t) - \eta_1(t), \\ \lambda_2 &= \Lambda_2(t) - \mathrm{sign}(\omega_3(t))A_1\omega_1(t) - \eta_2(t), \end{aligned} \tag{24}$$

где $\Lambda_1(t), \Lambda_2(t)$– любое решение системы дифференциальных уравнений (17) с правыми частями, задаваемыми формулами (21).

Если для наблюдаемого движения гиростата существуют момент времени t^* и постоянная $\alpha > 0$ такая, что $|\omega_3(t)| \geq \alpha t^{-1}$ для всех $t \geq t^*$, то, как следует из (23), отклонения $\eta_i(t)$, $i = 1, 2$, стремятся к нулю. В этом случае соотношения (24) могут быть использованы для нахождения асимптотических оценок параметров λ_1, λ_2.

1. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 235 с.

2. *В.Ф.Щербак* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 33. – С. 197–216.
3. *В.Ф.Щербак* Задача наблюдения динамических систем с неопределенностью // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2006. – **13**. – С. 218–223.
4. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1965. – 221 с.

V.F. Shcherbak

Invariant relations in identification problem of mechanical systems

The problem of the dynamic system parameters determination by the information about the values of its phase vector is considered. The scheme for asymptotically evaluation of unknown parameters is proposed. Method is based on the synthesis of invariant manifold for dynamical system. Such approach allows us to synthesize the algebraic relation between the variables that determine with respect of the system trajectories the unknown parameters as a function of known quantities.

Keywords: *identification, invariant manifolds, gyrostat.*

В.Ф. Щербак

Інваріантні співвідношення у задачі ідентифікації механічних систем

Розглянуто задачу визначення вектора постійних параметрів динамічної системи за інформацією про значення її фазового вектора. Запропоновано схему побудови асимптотичного ідентифікатора для невідомих параметрів. Використовується метод синтезу інваріантних многовидів, розроблений для розв'язку обернених задач теорії керування. Метод дозволяє знаходити алгебраїчні співвідношення між змінними, які на траєкторіях системи визначають невідомі параметри як функції від відомих величин.

Ключові слова: *ідентифікація, інваріантні многовиди, гіростат.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 17.05.12