УДК 519.7

©2012. **В.Р. Барсегян**

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Исследование нелинейных управляемых динамических систем методом кусочно-линейной аппроксимации приводится к исследованию поэтапно меняющихся линейных динамических систем. Для таких систем сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Предложен конструктивный метод решения задачи управления и сформулированы условия существования программного управления и движения. Построен явный вид управляющего воздействия и движения. Предложен способ решения задачи оптимального управления.

Ключевые слова: *нелинейные динамические системы, кусочно-линейная аппроксимация, поэтапно меняющиеся системы, вполне управляемость, управление.*

Введение. Отсутствие в современной теории управления общности подходов к исследованию нелинейных динамических управляемых систем обусловило наличие разнообразных методов их исследования. К исследованию нелинейных задач применителен метод кусочно-линейной аппроксимации. Он основан на замене характеристик нелинейных элементов линейными на отдельных временных участках. Таким образом, осуществляется переход от сложной нелинейной системы дифференциальных уравнений к нескольким линейным, которые отличаются друг от друга значениями входящих в них коэффициентов. При этом каждая из систем линейных дифференциальных уравнений справедлива для того временного интервала, в котором проведена соответствующая линеаризация. Временные границы для каждого участка можно определить, исходя из достижения одной (любой) из переменных, определяющих характеристику нелинейных элементов, своих граничных значений. Для сохранения преемственности между системами предполагается, что конец движения на предыдущем участке является началом движения на следующем участке.

Динамику многих управляемых энергетических обьектов, например, электрических печей, достаточно точно можно описать с последовательным использованием нескольких линейных дифференциальных уравнений. Для этого весь диапазон процесса разбивается на несколько стадий или зон таким образом, чтобы в пределах одной стадии динамика описывалась одним линейным дифференциальным уравнением [1].

В работе методом кусочно-линейной аппроксимации осуществляется переход от сложной нелинейной системы дифференциальных уравнений к нескольким линейным, которые отличаются друг от друга значениями входящих в них коэффициентов. Для таких систем сформулировано необходимое и достаточное условие вполне управляемости. Предложен конструктивный метод решения задачи управления и сформулированы условия существования программного управления и движения. Построен явный вид управляющего воздействия и движения. Предложен способ решения задачи оптимального управления.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную динамическую систему, поведение которой описывается уравнением

$$\dot{y} = f(t, y, v), \tag{1}$$

где $y(t) \in R^n$ – фазовый вектор системы; $v(t)$ – r-мерный вектор управляющего воздействия; $f(t, y, v)$ – вектор-функция, определяющая фазовое состояние системы, $t \in [t_0, T]$.

Предполагается, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям теоремы существования единственности решения нелинейного дифференциального уравнения [2].

Пусть заданы начальное

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

и конечное

$$y(T) = y_T \tag{3}$$

состояния системы (1).

Предполагается, что известны промежуточные моменты времени

$$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = T,$$

которые или заданы, или могут определяться, исходя из условия достижения промежуточных значений хотя бы одной (любой) из переменных (фазовых координат), определяющих характеристики нелинейных элементов.

Сформулируем следующую задачу.

Требуется найти управляющее воздействие $v(t)$, $t \in [t_0, T]$, которое переводит систему (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) на промежутке времени $[t_0, T]$.

2. Линеаризация нелинейной системы. Для исследования поставленной задачи проведем кусочно-линейную аппроксимацию нелинейного дифференциального уравнения (1) относительно некоторого известного решения следующим образом.

Пусть $v(t)$, $\tilde{v}(t) = v(t) + u(t)$, $t \in [t_0, T]$ – два допустимых управления, где $u(t)$ – малое отклонение. Обозначим через $y(t)$, $\tilde{y}(t) = y(t) + x(t)$ – соответствующие им решения задачи (1)–(3). Считаем, что величины $\|u(t)\|$ и $\|x(t)\|$ малы. Отметим, что

$$\tilde{y}(t_0) = y(t_0) + x(t_0), \quad \tilde{y}(T) = y(T) + x(T).$$

На отдельных промежутках времени $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \dots, m)$, разлагая функцию f в ряд Тейлора, будем иметь

$$f(t, \tilde{y}(t), \tilde{v}(t)) - f(t, y(t), v(t)) =$$

$$= \left.\frac{\partial f(t,y,v)}{\partial y}\right|_{\substack{y=y(t),\\ v=v(t)}} x(t) + \left.\frac{\partial f(t,y,v)}{\partial v}\right|_{\substack{y=y(t),\\ v=v(t)}} u(t) + o(\|x(t)\|, \|u(t)\|).$$

На промежутках времени $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ введем матрицы $A_k(t)$ и $B_k(t)$

$$A_k(t) = \left.\frac{\partial f(t,y,v)}{\partial y}\right|_{\substack{y=y(t),\\ v=v(t)}}, \quad B_k(t) = \left.\frac{\partial f(t,y,v)}{\partial v}\right|_{\substack{y=y(t),\\ v=v(t)}}.$$

Пренебрегая членом $o(\|u(t)\|\,,\ \|x(t)\|)$, уравнение возмущенного движения запишем следующим образом:

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1(t)x + B_1(t)u & \text{при} \quad t \in [t_0, t_1], \\ A_2(t)x + B_2(t)u & \text{при} \quad t \in [t_1, t_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_m(t)x + B_m(t)u & \text{при} \quad t \in [t_{m-1}, T] \end{cases} \tag{4}$$

с начальным $x_(t_0)$ и конечным $x(T)$ условиями. Здесь предполагается, что конец движения предыдущего участка является началом следующего участка, т. е. $x(t_k - 0) = x(t_k + 0) = x(t_k)$ при $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

Из выше введенного обозначения видно, что матрица $A_k(t)$ имеет размер $(n \times n)$, а $B_k(t)$ – матрица размера $(n \times r)$. В общем случае можно предполагать, что элементы матрицы $A_k(t)$, $B_k(t)$ и вектор-столбцов $u(t)$ являются измеримыми ограниченными функциями.

Таким образом, задача управления нелинейной системой (1) с условиями (2), (3) методом кусочно-линейной аппроксимации приведена к задаче управления для нескольких линейных систем составного типа, заданных на разных временных участках. При этом известны только начальное и конечное значения фазового вектора. В моменты времени t_k выполняются условия непрерывности (преемственности между составными системами) движения.

3. Решение задачи. Для решения поставленной задачи напишем решение системы (4) для промежутка времени $[t_{k-1}, t_k]$ следующим образом [3, 4]:

$$x(t) = X_k[t, t_{k-1}]x(t_{k-1}) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} H_k[t,\tau]u(\tau)d\tau, \tag{5}$$

где $H_k[t,\tau] = X_k[t,\tau]B_k(\tau)$, а через $X_k[t,\tau]$ обозначена нормированная фундаментальная матрица решения однородной части k-ого уравнения системы (4) на промежутке времени $[t_{k-1}, t_k]$, т.е.

$$\dot{x} = A_k(t)x + B_k(t)u.$$

Предполагая, что искомые управляющие воздействия известны, для моментов времени $t = t_k$ из формулы (5) будем иметь

$$x(t_k) = X_k[t_k, t_{k-1}]x(t_{k-1}) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} H_k[t_k, \tau]u(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Записывая формулы (6) для предыдущего промежутка времени $[t_{k-2}, t_{k-1}]$ и подставляя полученное выражение для $x(t_{k-1})$ в (5), будем иметь

$$\begin{aligned} x(t) = {} & X_k[t, t_{k-1}]X_{k-1}[t_{k-1}, t_{k-2}]x(t_{k-2}) + \\ & + X_k[t, t_{k-1}] \int\limits_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} H_{k-1}[t_{k-1}, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau]u(\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Продолжая эту процедуру для предыдущих промежутков времени, получим формулу представления движения системы (4) для момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k)$ в виде

$$x(t) = V(t, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k-1} V(t, t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, \tau]u(\tau)d\tau + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} H_k[t, \tau]u(\tau)d\tau, \tag{8}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} V(t, t_j) = X_k[t, t_{k-1}]\, V(t_{k-1}, t_j), \quad V(t_k, t_j) = \prod_{i=0}^{k-j-1} X_{k-i}[t_{k-i}, t_{k-i-1}] \\ (k = 1, ..., m;\ j = 0, ..., k-1). \end{gathered} \tag{9}$$

Согласно введенному обозначению, при $j = k - 1$ имеем $V(t_k, t_{k-1}) = X_k[t_k, t_{k-1}]$. При $j = k$ полагаем $V(t_k, t_k) = E$. Тогда формулу (8) при $t = t_k$ можно записать следующим образом

$$x(t_k) = V(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{k} V(t_k, t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, t]u(t)dt,$$

а при $k = m$

$$x(T) = V(T, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^{m} V(T, t_j) \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j, t]u(t)dt. \tag{10}$$

Таким образом, имея начальное состояние $x(t_0)$ системы (4) и задавая управляющее воздействие $u(t)$, с помощью формулы (8) определяем фазовое состояние $x(t)$ системы (4) для произвольного момента времени t из любого промежутка времени $[t_{k-1}, t_k)$.

Теперь вместо функций $H_k[t_k, t]$ введем функции $\bar{H}_k[t_k, t]$:

$$\bar{H}_1[t_1, t] = \begin{cases} H_1[t_1, t] & \text{при} \quad t_0 \le t < t_1, \\ 0 & \text{при} \quad t_1 \le t \le T; \end{cases}$$

$$\bar{H}_k[t_k, t] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t_0 \le t < t_{k-1}, \\ H_k[t_k, t] & \text{при} \quad t_{k-1} \le t < t_k, \quad k = 2, ..., m-1, \\ 0 & \text{при} \quad t_k \le t \le T \quad ; \end{cases} \tag{11}$$

$$\bar{H}_m[t_m, t] = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t_0 \le t < t_{m-1}, \\ H_m[t_m, t] & \text{при} \quad t_{m-1} \le t \le T. \end{cases}$$

Соотношение (10) при помощи введенных в (11) функций записывается так:

$$\int_{t_0}^{T} \sum_{j=1}^{m} V(T, t_j) \overline{H}_j[t_j, t] u(t) dt = x(T) - V(T, t_0) x(t_0) = C. \tag{12}$$

Отметим, что в (12) число интегральных соотношений равно n.

Таким образом, получаем, что система (4) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора $C = x(T) - V(T, t_0)x(t_0)$ из R^n можно указать управление $u = u(t, C)$, удовлетворяющее условию (12).

Принципиальным для любой задачи управления является вопрос о ее разрешимости, который сводится к анализу управляемости системы.

Пусть $h_i(T, t)$ – i-й столбец матрицы $(\sum\limits_{j=1}^{m} V(T, t_j) \overline{H}_j[t_j, t])'$; C_i – i-ая компонента вектора C. Здесь и далее штрих означает операцию транспонирования.

Тогда соотношение (12) можно записать в виде

$$\int_{t_0}^{T} h'_i(T, t) u(t) dt = C_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Таким образом, условия вполне управляемости системы (4) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы система* (4) *была вполне управляемой на отрезке* $[t_0, T]$, *необходимо и достаточно, чтобы вектор-функции* $h_1(T, t)$, $\dots$, $h_n(T, t)$ *были линейно независимыми на этом отрезке.*

Отметим, что формулировка теоремы 1 известна для линейных управляемых систем и приведена, в частности, в [5]. Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 1.1, изложенному в [5, с. 189].

Теперь функцию $u(t)$, удовлетворяющую интегральному соотношению (12), ищем в виде [6]

$$u(t) = \left(\sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\overline{H}_j[t_j,t]\right)' \eta + w(t), \tag{13}$$

где η – постоянный вектор, подлежащий определению, $w(t)$ – некоторая вектор-функция (может быть измеримая ограниченная функция на промежутке времени $[t_0, T]$) и такая, что

$$\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\overline{H}_j[t_j,t]\right) w(t)dt = 0. \tag{14}$$

Равенство (14) выражает условие ортогональности вектор-функции $w(t)$ ко всем строкам матрицы $(\sum\limits_{j=1}^{m} V(T,t_j)\overline{H}_j[t_j,t])$.

Подставляя (13) в (12), получим

$$Q(t_0, ..., T)\eta = C, \tag{15}$$

где

$$Q(t_0, ..., T) = \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\overline{H}_j[t_j,t]\right) \left(\sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\overline{H}_j[t_j,t]\right)' dt. \tag{16}$$

Система (15) является системой n алгебраических уравнений относительно неизвестных C_j $(j = 1, \ldots, n)$. Она имеет решение, если $\det Q \neq 0$, либо ранг матрицы Q совпадает с рангом расширенной матрицы $\{Q, C\}$. При $\det Q \neq 0$ решением будет

$$\eta = Q^{-1}C,$$

следовательно, (13) с учетом значения вектора C запишется в виде

$$u(t) = \left(\sum_{j=1}^{m} V(T,t_j)\overline{H}_j[t_j,t]\right)' Q^{-1}(x(T) - V(T,t_0)x(t_0)) + w(t). \tag{17}$$

Таким образом, решение задачи можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы существовало программное управление* (17) *и соответствующее ему решение системы* (4), *удовлетворяющее условиям* (2) *и* (3), *необходимо и достаточно, чтобы матрица* (16) *была не особой, или чтобы ранги матрицы* Q *и расширенной матрицы* $\{Q, C\}$ *совпадали.*

С учетом обозначения (11) в случае $\det Q \neq 0$ при $w\,(t) = 0$ управляющее воздействие $u(t)$, согласно (17), представится в следующем виде:

$$u(t) = \begin{cases} (V(T,t_1)H_1[t_1,t])'Q^{-1}(x(T) - V(T,t_0)x(t_0)) & \text{при} \quad t \in [t_0,t_1), \\ (V(T,t_2)H_2[t_2,t])'Q^{-1}(x(T) - V(T,t_0)x(t_0)) & \text{при} \quad t \in [t_1,t_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ (H_m[t_m,t])'Q^{-1}(x(T) - V(T,t_0)x(t_0)) & \text{при} \quad t \in [t_{m-1},T]. \end{cases} \tag{18}$$

Подставляя (18) в (8) и учитывая непрерывность движения в промежуточные моменты времени t_k, получим программное движение системы (4) на промежутке времени $[t_0, T]$, удовлетворяющее условиям (2), (3).

Таким образом, имея программные управления (18), программное движение системы (4) для момента времени $t \in [t_{k-1}, t_k]$ записываем в виде

$$\begin{aligned} x(t) =& V(t,t_0)x(t_0) + \Bigg[\sum_{j=1}^{k-1} V(t,t_j)\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} H_j[t_j,\tau](V(T,t_j)H_j[t_j,\tau])'d\tau + \\ &+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t} H_k[t,\tau](V(T,t_j)H_k[t_k,\tau])'d\tau\Bigg]Q^{-1}(x(T) - V(T,t_0)x(t_0)), \end{aligned}$$

где матрицы $V(t,t_j)$ и Q имеют вид (9) и (16) соответственно.

Отметим, что если для отбора оптимальных решений на промежутке времени $[t_0, T]$ задан некоторый критерий качества $\varkappa[u]$, который имеет смысл нормы в некотором нормированном пространстве, тогда будем иметь задачу оптимального управления системы (4) с условиями (2) и (3). В этом случае, рассматривая левую часть интегральных соотношений (12) как линейную операцию, порожденную функцией $u(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$, приводим задачу оптимального управления к проблеме моментов [3]. Следовательно, оптимальное управляющее воздействие $u^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, минимизирующее функционал $\varkappa[u]$, следует искать с помощью решения проблемы моментов.

1. *Матвейкин В.Г., Муромцев Д.Ю.* Теоретические основы энергосберегающего управления динамическими режимами установок производственно-технического назначения. – М., 2007. – 128 с.
2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Т. 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 415 с.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

4. *Барсегян В.Р.* О задаче оптимального управления поэтапно меняющимися линейными системами с фазовыми ограничениями в промежуточные моменты времени // Уч. записки ЕГУ. – 2002. – № 1. – С. 118-119.
5. *Егоров А.И.* Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с.
6. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

V.R. Barseghyan

Investigation of the problem of control of nonlinear dynamic systems using the method of piecewise linear approximation

By the method of piecewise-linear approximation the investigation of nonlinear control dynamic systems is modified to the investigation of stage by stage changing linear dynamic systems. For those systems necessary and sufficient conditions of complete controllability are formulated. A constructive method for solving problems of control is proposed and the conditions for existence of program control and motion are formulated. An explicit form of control action and motion are constructed. A method to solve the problem of optimal control is proposed.

Keywords: *nonlinear dynamic systems, piecewise-linear approximation, stage by stage changing systems, complete controllablility, control.*

В.Р. Барсегян

Дослідження задачі керування нелінійних динамічних систем методом кусково-лінійної апроксимації

Дослідження нелінійних керованих динамічних систем методом кусково-лінійної апроксимації приводиться до дослідження поетапно мінливих лінійних динамічних систем. Для таких систем сформульовано необхідну і достатню умову цілком керованості. Запропоновано конструктивний метод розв'язання задачі керування і сформульовано умови існування програмного керування і руху. Побудовано явний вигляд керуючого впливу та руху. Запропоновано спосіб розв'язання задачі оптимального керування.

Ключові слова: *нелінійні динамічні системи, кусково-лінійна апроксимація, поетапно мінливі системи, цілком керованість, керування.*

Ереванский гос. ун-т, Армения
Получено 20.06.12

`barseghyan@sci.am`