УДК 531.39, 517.977

©2012. **А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова**

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МОДЕЛЬЮ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА

Рассмотрена математическая модель пластины Кирхгофа с учетом инерции вращения ее поперечного сечения. Для такой модели получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая колебания с конечным числом модальных координат, и решена задача оптимального управления с квадратичным функционалом качества. Также приведены результаты численного интегрирования двухточечной задачи при полученном управлении.

Ключевые слова: *пластина Кирхгофа, собственные формы, задача оптимального управления, принцип максимума.*

Введение. Изучению математических моделей колебаний тонких пластин посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов. Не претендуя на полноту обзора, выделим работы [1,2]. Одной из наиболее принятых моделей является модель Кирхгофа, которая имеет ряд преимуществ для теоретического исследования по сравнению с теориями пластин Пуассона, Рейсснера и классической теорией пластин.

В работе [3] была рассмотрена модель пластины Кирхгофа, которая шарнирно прикреплена на границе к вращающемуся твердому телу. Для такой механической системы были получены условия управляемости конечномерной модели пластины, а также найдены решения задачи Коши для системы в линейном приближении. При этом предполагалось, что вращательным движением сечения пластины можно пренебречь.

В данной работе рассмотрена уточненная модель пластины Кирхгофа, в которой учитывается момент инерции сечения пластины. Целью работы является решение задачи оптимального управления колебаниями пластины для любого фиксированного числа мод.

1. Модель Кирхгофа с учетом вращательной динамики сечения пластины. Рассмотрим механическую систему (рис. 1), которая состоит из упругой пластины, прикрепленной на границе к вращающемуся твердому телу B. Предположим, что с твердым телом B связана декартова система координат $Ox_1x_2x_3$ [4].

Будем считать, что в состоянии покоя пластина занимает замкнутую область, которая имеет вид $(x_1, x_2) \in \Omega = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $|x_3| \le h/2$, где толщина пластины равна $h > 0$. Предположим, что в каждый момент времени t срединную поверхность пластины можно задать уравнением $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Украины (№ Ф47/082) и проекта украинско-австрийского сотрудничества (гос. рег. № 0111U007275).

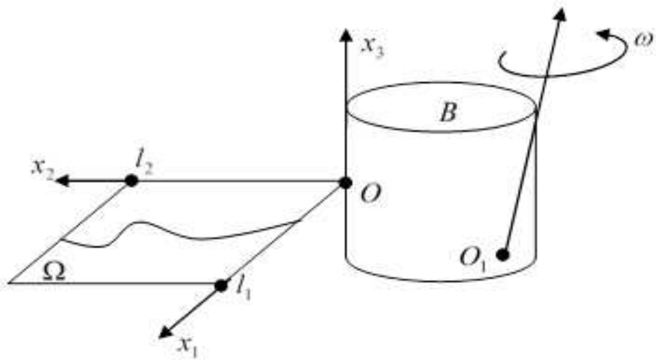

Рис. 1. Твердое тело с упругой пластиной.

Чтобы описать поведение функции $w = w(x_1, x_2, t)$, воспользуемся моделью пластины Кирхгофа с учетом вращательного движения поперечного сечения [2]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} - I_\rho \Delta \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D\Delta^2 w(x_1, x_2, t) = F, \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1)$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – плотность (масса на единицу объема), $I_\rho = \dfrac{\rho h^3}{12}$ – полярный момент инерции поперечного сечения, $D > 0$ – жесткость пластины при изгибе, F – поперечная компонента силы, которая действует на пластину. Будем считать, что пластина шарнирно оперта на границе области Ω, т.е. компоненты вектора перемещения и вектора моментов равны нулю на $\partial\Omega$:

$$w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right|_{x_1=0,\, x_1=l_1} = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|_{x_2=0,\, x_2=l_2} = 0, \quad (4)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Модель пластины Кирхгофа с $I_\rho = 0$ рассматривалась в работе [3].

Функция F в правой части уравнения (1) соответствует предположениям, сделанным в работе [3], т.е. полагаем

$$\begin{aligned} F = &- \rho h[(x_1 - a_1)(\omega_1\omega_3 - \dot\omega_2) + (x_2 - a_2)(\omega_2\omega_3 + \dot\omega_1) + \\ &+ (\omega_1^2 + \omega_2^2)(a_3 - w(x_1, x_2, t)) + \ddot w(x_1, x_2, t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь F – сила инерции, действующая на пластину, которая обусловлена переносным движением твердого тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$; (a_1, a_2, a_3) – координаты точки O_1 в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Перепишем уравнение (1) с учетом (5) следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2} - \frac{h^2}{24}\Delta\frac{\partial^2 w(x_1,x_2,t)}{\partial t^2} + \alpha^2\Delta^2 w(x_1,x_2,t) = \\ = -\frac{1}{2}\left[(x_1-a_1)(\omega_1\omega_3-\dot{\omega}_2)+(x_2-a_2)(\omega_2\omega_3+\dot{\omega}_1)+\right. \\ \left.+(\omega_1^2+\omega_2^2)(a_3-w(x_1,x_2,t))\right] = f(x_1,x_2,t), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{D}{2\rho h} > 0$.

Таким образом, получена модель (6), (2)–(4) колебаний механической системы, которая состоит из твердого тела и упругой пластины, шарнирно опертой на границе области Ω.

Для решения однородной краевой задачи (6), (2)–(4) методом Фурье подставим

$$w(x_1,x_2,t) = X(x)q(t), \qquad x = (x_1,x_2)$$

в задачу (6), (2)–(4) с $f = 0$ и разделим переменные. В результате получим

$$\frac{\ddot{q}}{q} = -\frac{\alpha^2\Delta^2 X}{X - \frac{h^2}{24}\Delta X} = -\lambda = \text{const}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\alpha^2\Delta^2 X = \lambda(X - \frac{h^2}{24}\Delta X). \tag{7}$$

Предположим, что $X(x_1,x_2) = X_1(x_1)X_2(x_2)$ и обозначим

$$\frac{X_1''}{X_1} = \mu_1, \qquad \frac{X_2''}{X_2} = \mu_2, \qquad \mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Тогда $\Delta X = (\mu_1+\mu_2)X_1X_2 = \mu X$. Подставим последнее выражение в уравнение (7) и получим, что $\lambda = \dfrac{\alpha^2(\mu_1+\mu_2)^2}{1-\frac{h^2}{24}(\mu_1+\mu_2)}$. В результате уравнение (6) примет вид

$$\ddot{q}(t) + \lambda q(t) = 0,$$

где μ_1 и μ_2 – собственные значения следующих задач Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} X_1''(x_1) = \mu_1 X_1(x_1), \\ X_1(0) = X_1(l_1) = 0, \end{cases} \qquad 0 \le x_1 \le l_1, \tag{8}$$

$$\begin{cases} X_2''(x_2) = \mu_2 X_2(x_2), \\ X_2(0) = X_2(l_2) = 0, \end{cases} \qquad 0 \le x_2 \le l_2. \tag{9}$$

Известно, что задачи (8) и (9) имеют дискретный спектр: $\mu_1 = \mu_{1k}$, $\mu_2 = \mu_{2j}$ $(k, j \in \mathbb{N})$, где

$$\mu_{1k} = -\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2, \qquad \mu_{2j} = -\left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2. \tag{10}$$

Собственным значениям задач Штурма–Лиувилля (8), (9) соответствуют собственные функции $\{X_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{X_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$. Пронормируем эти функции так, чтобы они образовывали ортонормированные базисы в $L_2(0, l_1)$ и $L_2(0, l_2)$ соответственно:

$$X_{1k}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right), \qquad X_{2j}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right). \tag{11}$$

Решение краевой задачи (6), (2)–(4) будем искать в виде ряда Фурье

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} C_{kj}(t) X_{1k}(x_1) X_{2j}(x_2).$$

Почленно продифференцируем ряд и подставим его в уравнение (6), учитывая, что $X_{1k}'' = \mu_{1k} X_{1k}$, $X_{2j}'' = \mu_{2j} X_{2j}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{k,j=1}^{\infty} \ddot{C}_{kj} X_{1k} X_{2j} - \frac{h^2}{24} \sum_{k,j=1}^{\infty} \ddot{C}_{kj} (\mu_{1k} X_{1k} X_{2j} + \mu_{2j} X_{1k} X_{2j}) + \\ &+ \alpha^2 \sum_{k,j=1}^{\infty} C_{kj} (\mu_{1k}^2 X_{1k} X_{2j} + 2\mu_{1k}\mu_{2j} X_{1k} X_{2j} + \mu_{2j}^2 X_{1k} X_{2j}) = \\ &= \sum_{k,j=1}^{\infty} f_{kj} X_{1k} X_{2j}. \end{aligned} \tag{12}$$

В результате проведенных преобразований получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{C}_{kj} + \lambda_{kj} C_{kj} = f_{kj}, \qquad \lambda_{kj} = \frac{\alpha^2 (\mu_{1k} + \mu_{2j})^2}{1 - \frac{h^2}{24}(\mu_{1k} + \mu_{2j})} \qquad (k, j) \in \mathbb{N}^2, \tag{13}$$

где f_{kj} – коэффициенты Фурье правой части уравнения (6) относительно ортонормированной системы $\{X_{1k}(x_1)X_{2j}(x_2)\}_{k,j=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega)$:

$$f_{kj} = \frac{2}{\left(1+\frac{h^2}{24}\left(\frac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)\sqrt{l_1 l_2}} \times$$
$$\times \int\limits_{\Omega} f(x_1,x_2,t)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right)dx_1dx_2 =$$
$$= \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj\left(1+\frac{h^2}{24}\left(\frac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)}\Big(\dot\omega_1\Big(a_2((-1)^k-1)((-1)^j-1)-$$
$$-l_2(-1)^j((-1)^k-1)\Big)+\dot\omega_2\Big(l_1(-1)^k((-1)^j-1)-a_1((-1)^k-1)((-1)^j-1)\Big)+$$
$$+\omega_1\omega_3\Big(a_1((-1)^k-1)((-1)^j-1)-l_1(-1)^k((-1)^j-1)\Big)+$$
$$+\omega_2\omega_3\Big(a_2((-1)^k-1)((-1)^j-1)-l_2(-1)^j((-1)^k-1)\Big)-$$
$$-a_3(\omega_1^2+\omega_2^2)((-1)^k-1)((-1)^j-1)\Big)+\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{\sqrt{l_1 l_2}}C_{kj}(t).$$

Подставим это значение f_{kj} в (13) и запишем полученную систему дифференциальных уравнений с точностью до слагаемых порядка $o(|\omega_k|,|\dot\omega_k|,|C_{kj}|,|\dot C_{kj}|)$:

$$\ddot C_{kj}+C_{kj}\lambda_{kj} = \frac{2\bar f_{kj}\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj\left(1+\frac{h^2}{24}\left(\frac{(\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2}{(l_1 l_2)^2}\right)\right)}, \qquad (14)$$

где

$$\bar f_{kj} = \begin{cases} 0, & k \text{ - четное, } j \text{ - четное,}\\ -l_1\dot\omega_2, & k \text{ - четное, } j \text{ - нечетное,}\\ l_2\dot\omega_1, & k \text{ - нечетное, } j \text{ - четное,}\\ (l_1-2a_1)\dot\omega_2+(2a_2-l_2)\dot\omega_1, & k \text{ - нечетное, } j \text{ - нечетное.}\end{cases}$$

Для исследования влияния движения тела-носителя B на малые колебания пластины положим $u_1(t)=\dot\omega_1(t)$, $u_2(t)=\dot\omega_2(t)$ и будем считать $u_1(t)$, $u_2(t)$ управляющими функциями в системе (14):

$$\ddot C_{kj}+C_{kj}\lambda_{kj} = \varphi_{kj}u_1(t)+g_{kj}u_2(t), \qquad \lambda_{kj} = \frac{\alpha^2(\mu_{1k}+\mu_{2j})^2}{1-\frac{h^2}{24}(\mu_{1k}+\mu_{2j})}, \qquad (15)$$

где $(k,j)\in\mathbb{N}^2$. Сделаем в системе (15) замену переменных

$$\sqrt{\lambda_{kj}}C_{kj} = \xi_{kj}(t), \qquad \dot C_{kj}(t) = \eta_{kj}(t), \qquad \beta_{kj} = \sqrt{\lambda_{kj}} > 0.$$

В таких переменных система (15) примет вид

$$\dot{x}_{kj} = A_{kj}x_{kj} + B_{kj}u(t), \tag{16}$$

где $\quad x_{kj} = \begin{pmatrix} \xi_{kj} \\ \eta_{kj} \end{pmatrix}, \quad A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{kj} & g_{kj} \end{pmatrix}, \qquad k, j \in \mathbb{N}^2.$

2. Задача оптимального управления. Зафиксируем число $n \geq 1$ и зададим отображение $i \mapsto (k_i, j_i)$, ставящее в соответствие индексу $i \in \{1, n\}$ пару индексов $(k_i, j_i) \in \mathbb{N}^2$. Рассмотрим подсистему системы (16) для значений индексов $k = k_i$, $j = j_i$ при $i = \overline{1, n}$:

$$\dot{x}_{k_i j_i} = A_{k_i j_i} x_{k_i j_i} + B_{k_i j_i} u(t), \qquad i = \overline{1, n}. \tag{17}$$

Для системы (17) рассмотрим следующую задачу оптимального управления. При заданных $\tau > 0$, $x^0_{k_i j_i}$, $x^1_{k_i j_i}$ необходимо найти управление $u \in L^2(0, \tau)$, доставляющее минимум функционалу

$$J = \int\limits_0^\tau \{u_1^2(t) + u_2^2(t)\} dt \longrightarrow \min \tag{18}$$

на решениях $x(t)$ системы (17), которые удовлетворяют краевым условиям

$$x_{k_i j_i}(0) = x^0_{k_i j_i}, \qquad x_{k_i j_i}(\tau) = x^1_{k_i j_i}, \qquad i = \overline{1, n}. \tag{19}$$

Решим задачу оптимального управления (17)–(19) с помощью принципа максимума Понтрягина [5].

Составим функцию Гамильтона $H(\zeta_0, \zeta, x, u) = \zeta_0(u_1^2 + u_2^2) + \sum\limits_{i=1}^{n} (p_{k_i j_i} \beta_{k_i j_i} \eta_{k_i j_i} + {}$ $+ q_{k_i j_i}(-\beta_{k_i j_i} \xi_{k_i j_i} + \varphi_{k_i j_i} u_1 + g_{k_i j_i} u_2)) = \zeta_0(Qu, u) + \zeta(Ax + Bu)$, где $x = \left(x_{k_1 j_1}, \ldots, x_{k_n j_n}\right)^*$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \operatorname{diag}\left(A_{k_1 j_1}, \ldots, A_{k_n j_n}\right)$, $B = {}$ $= \left(B_{k_1 j_1}, \ldots, B_{k_n j_n}\right)^*$, $\zeta = \left(p_{k_1 j_1}, q_{k_1 j_1}, \ldots, p_{k_n j_n}, p_{k_n j_n}\right)^*$, символом “ * ” обозначена операция транспонирования.

Оптимальное управление $u = \hat{u}(t)$ находится из условия максимума гамильтониана: $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$. Тогда $2\zeta_0 Q\hat{u} + \zeta B = 0$, т.е.

$$\hat{u}(t) = -\frac{1}{2\zeta_0} Q^{-1} \zeta(t) B, \tag{20}$$

$$\hat{u}(t) = B^*\tilde{\zeta}^*(t) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_{k_1j_1} & 0 & \varphi_{k_2j_2} & \dots & 0 & \varphi_{k_nj_n} \\ 0 & g_{k_1j_1} & 0 & g_{k_2j_2} & \dots & 0 & g_{k_nj_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k_1j_1} \\ q_{k_1j_1} \\ p_{k_2j_2} \\ q_{k_2j_2} \\ \vdots \\ p_{k_nj_n} \\ q_{k_nj_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{k_ij_i} q_{k_ij_i} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} g_{k_ij_i} q_{k_ij_i} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Выражение (20) рассматривается на траекториях гамильтоновой системы

$$\dot{x} = \left.\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right|_{u=\hat{u}} = Ax + B\hat{u}(t), \qquad \dot{\zeta} = -\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{u=\hat{u}} = -\zeta A. \tag{22}$$

Систему (22) запишем покомпонентно:

$$\dot{p}_{k_ij_i}(t) = \beta_{k_ij_i} q_{k_ij_i}(t), \qquad \dot{q}_{k_ij_i}(t) = -\beta_{k_ij_i} p_{k_ij_i}(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{23}$$

Решение этой системы будет иметь вид

$$\begin{cases} p_{k_ij_i}(t) = p^0_{k_ij_i} \cos(\beta_{k_ij_i}(t)) + q^0_{k_ij_i} \sin(\beta_{k_ij_i}(t)), \\ q_{k_ij_i}(t) = -p^0_{k_ij_i} \sin(\beta_{k_ij_i}(t)) + q^0_{k_ij_i} \cos(\beta_{k_ij_i}(t)). \end{cases} \tag{24}$$

Подставим решение (24) в выражение (21), в результате получим управление

$$\begin{cases} \hat{u}_1(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{k_ij_i} \left(q^0_{k_ij_i} \cos(\beta_{k_ij_i} s) - p^0_{k_ij_i} \sin(\beta_{k_ij_i} s) \right), \\ \hat{u}_2(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{k_ij_i} \left(q^0_{k_ij_i} \cos(\beta_{k_ij_i} s) - p^0_{k_ij_i} \sin(\beta_{k_ij_i} s) \right). \end{cases} \tag{25}$$

Найдем константы $p_{k_ij_i}$, $q_{k_ij_i}$, исходя из граничных условий (19). Для этого представим решение $x(t)$ системы (17) с управлением $\hat{u}(t)$ следующим образом:

$$x_{k_lj_l}(t) = e^{tA_{k_lj_l}} x^0_{k_lj_l} + \int\limits_0^{\tau} e^{(t-s)A_{k_lj_l}} B_{k_lj_l} \hat{u}(s) ds, \tag{26}$$

где

$$e^{tA_{k_lj_l}} x^0_{k_lj_l} = \begin{pmatrix} \cos(\beta_{k_lj_l} t) & \sin(\beta_{k_lj_l} t) \\ -\sin(\beta_{k_lj_l} t) & \cos(\beta_{k_lj_l} t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^0_{k_lj_l} \\ \eta^0_{k_lj_l} \end{pmatrix}.$$

Перепишем выражение (26) в развернутом виде

$$
\begin{gathered}
\xi_{k_l j_l}(t) = \xi^0_{k_l j_l}\cos(\beta_{k_l j_l} t) + \eta^0_{k_l j_l}\sin(\beta_{k_l j_l} t) + \\
+ \int\limits_0^t \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{k_l j_l}\varphi_{k_i j_i}\left(q^0_{k_i j_i}\cos(\beta_{k_i j_i} s) - p^0_{k_i j_i}\sin(\beta_{k_i j_i} s)\right) + \right. \\
\left. + g_{k_l j_l}\sum_{i=1}^n g_{k_i j_i}\left(q^0_{k_i j_i}\cos(\beta_{k_i j_i} s) - p^0_{k_i j_i}\sin(\beta_{k_i j_i} s)\right)\right)\sin(\beta_{k_l j_l}(t-s))ds, \\
\eta_{k_l j_l}(t) = -\xi^0_{k_l j_l}\sin(\beta_{k_l j_l} t) + \eta^0_{k_l j_l}\cos(\beta_{k_l j_l} t) + \\
+ \int\limits_0^t \left(\sum_{i=1}^n \varphi_{k_l j_l}\varphi_{k_i j_i}\left(q^0_{k_i j_i}\cos(\beta_{k_i j_i} s) - p^0_{k_i j_i}\sin(\beta_{k_i j_i} s)\right) + \right. \\
\left. + g_{k_l j_l}\sum_{i=1}^n g_{k_i j_i}\left(q^0_{k_i j_i}\cos(\beta_{k_i j_i} s) - p^0_{k_i j_i}\sin(\beta_{k_i j_i} s)\right)\right)\cos(\beta_{k_l j_l}(t-s))ds
\end{gathered}
\tag{27}
$$

и зададим граничные условия

$$
\begin{cases}
\xi_{k_l j_l}(\tau) = \xi^1_{k_l j_l}, \\
\eta_{k_l j_l}(\tau) = \eta^1_{k_l j_l}.
\end{cases}
\tag{28}
$$

Вычислим интегралы в выражениях (27) и перепишем соотношение (28) в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i\neq l, i=1}^n q^0_{k_i j_i}(\varphi_{k_l j_l}\varphi_{k_i j_i} + g_{k_l j_l} g_{k_i j_i})\beta_{k_l j_l}\frac{\cos(\beta_{k_i j_i}\tau) - \cos(\beta_{k_l j_l}\tau)}{\beta^2_{k_l j_l} - \beta^2_{k_i j_i}} + \\
+ q^0_{k_l j_l}(\varphi^2_{k_l j_l} + g^2_{k_l j_l})\frac{\tau\sin(\beta_{k_l j_l}\tau)}{2} - \sum_{i\neq l, i=1}^n p^0_{k_i j_i}(\varphi_{k_l j_l}\varphi_{k_i j_i} + g_{k_l j_l} g_{k_i j_i})\times \\
\times \frac{\beta_{k_l j_l}\sin(\beta_{k_i j_i}\tau) - \beta_{k_i j_i}\sin(\beta_{k_l j_l}\tau)}{\beta^2_{k_l j_l} - \beta^2_{k_i j_i}} - p^0_{k_l j_l}(\varphi^2_{k_l j_l} + g^2_{k_l j_l})\times \\
\times \frac{\sin(\beta_{k_l j_l}\tau) - \beta_{k_l j_l}\tau\cos(\beta_{k_l j_l}\tau)}{2\beta_{k_l j_l}} = \xi^1_{k_l j_l} - \xi^0_{k_l j_l}\cos(\beta_{k_l j_l}\tau) - \eta^0_{k_l j_l}\sin(\beta_{k_l j_l}\tau),
\end{gathered}
\tag{29}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{i\neq l, i=1}^n q^0_{k_i j_i}(\varphi_{k_l j_l}\varphi_{k_i j_i} + g_{k_l j_l} g_{k_i j_i})\beta_{k_l j_l}\frac{\sin(\beta_{k_l j_l}\tau) - \beta_{k_i j_i}\sin(\beta_{k_i j_i}\tau)}{\beta^2_{k_l j_l} - \beta^2_{k_i j_i}} + \\
+ q^0_{k_l j_l}(\varphi^2_{k_l j_l} + g^2_{k_l j_l})\frac{\sin(\beta_{k_l j_l}\tau) + \beta_{k_l j_l}\tau\cos(\beta_{k_l j_l}\tau)}{2\beta_{k_l j_l}} -
\end{gathered}
$$

$$-\sum_{i\neq l,i=1}^{n} p^0_{k_ij_i}(\varphi_{k_lj_l}\varphi_{k_ij_i}+g_{k_lj_l}g_{k_ij_i})\frac{\cos(\beta_{k_ij_i}\tau)-\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)}{\beta^2_{k_lj_l}-\beta^2_{k_ij_i}}\beta_{k_ij_i}-$$

$$-\,p^0_{k_lj_l}(\varphi^2_{k_lj_l}+g^2_{k_lj_l})\frac{\tau\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)}{2}=\eta^1_{k_lj_l}+\xi^0_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)-\eta^0_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau).$$

Преобразуем систему (29) следующим образом: первое уравнение умножим на $\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)$, а второе – на $\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)$ и сложим их. Аналогично, первое уравнение умножим на $\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)$, а второе – на $\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)$ и вычтем из первого второе. Тогда система (29) примет вид

$$q^0_{k_lj_l}\frac{\tau}{2}+q^0_{k_lj_l}\frac{\sin(2\beta_{k_lj_l}\tau)}{4\beta_{k_lj_l}}-p^0_{k_lj_l}\frac{\sin^2(\beta_{k_lj_l}\tau)}{2\beta_{k_lj_l}}+\sum_{i\neq l,i=1}^{n} q^0_{k_ij_i}\frac{(\varphi_{k_lj_l}\varphi_{k_ij_i}+g_{k_lj_l}g_{k_ij_i})}{\varphi^2_{k_lj_l}+g^2_{k_lj_l}}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)\cos(\beta_{k_ij_i}\tau)-\beta_{k_ij_i}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau)}{\beta^2_{k_lj_l}-\beta^2_{k_ij_i}}\right)-$$

$$-\sum_{i\neq l,i=1}^{n} p^0_{k_ij_i}\frac{(\varphi_{k_lj_l}\varphi_{k_ij_i}+g_{k_lj_l})}{g_{k_ij_i}}\varphi^2_{k_lj_l}+$$

$$+g^2_{k_lj_l}\left(\frac{\beta_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau)+\beta_{k_ij_i}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\cos(\beta_{k_ij_i}\tau)-\beta_{k_ij_i}}{\beta^2_{k_lj_l}-\beta^2_{k_ij_i}}\right)=$$

$$=\frac{\xi^1_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)+\eta^1_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)-\eta^0_{k_lj_l}}{\varphi^2_{k_lj_l}+g^2_{k_lj_l}},$$

$$p^0_{k_lj_l}\frac{\tau}{2}-p^0_{k_lj_l}\frac{\sin(2\beta_{k_lj_l}\tau)}{4\beta_{k_lj_l}}-q^0_{k_lj_l}\frac{\sin^2(\beta_{k_lj_l}\tau)}{2\beta_{k_lj_l}}+\sum_{i\neq l,i=1}^{n} q^0_{k_ij_i}\frac{(\varphi_{k_lj_l}\varphi_{k_ij_i}+g_{k_lj_l}g_{k_ij_i})}{\varphi^2_{k_lj_l}+g^2_{k_lj_l}}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\cos(\beta_{k_ij_i}\tau)+\beta_{k_ij_i}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau)-\beta_{k_lj_l}}{\beta^2_{k_lj_l}-\beta^2_{k_ij_i}}\right)-$$

$$-\sum_{i\neq l,i=1}^{n} p^0_{k_ij_i}\frac{(\varphi_{k_lj_l}\varphi_{k_ij_i}+g_{k_lj_l}g_{k_ij_i})}{\varphi^2_{k_lj_l}+g^2_{k_lj_l}}\times$$

$$\times\left(\frac{\beta_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau)-\beta_{k_ij_i}\cos(\beta_{k_ij_i}\tau)\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)}{\beta^2_{k_lj_l}-\beta^2_{k_ij_i}}\right)=$$

$$=\frac{\xi^1_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)-\eta^1_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)-\xi^0_{k_lj_l}}{\varphi^2_{k_lj_l}+g^2_{k_lj_l}}.$$

Перепишем полученную систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} M+F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^0_{k_1j_1} \\ p^0_{k_1j_1} \\ \vdots \\ q^0_{k_nj_n} \\ p^0_{k_nj_n} \end{pmatrix} = P, \tag{30}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\tau}{2} \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{pmatrix},$$

$$F_{ll} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin(2\beta_{k_lj_l}\tau)}{4\beta_{k_lj_l}} & -\dfrac{\sin^2(\beta_{k_lj_l}\tau)}{2\beta_{k_lj_l}} \\ -\dfrac{\sin^2(\beta_{k_lj_l}\tau)}{2\beta_{k_lj_l}} & -\dfrac{\sin(2\beta_{k_lj_l}\tau)}{4\beta_{k_lj_l}} \end{pmatrix},$$

$$F_{li} = \frac{\varphi_{k_lj_l}\varphi_{k_ij_i} + g_{k_lj_l}g_{k_ij_i}}{(\varphi^2_{k_lj_l} + g^2_{k_lj_l})(\beta^2_{k_lj_l} - \beta^2_{k_ij_i})} \begin{pmatrix} F^{11}_{li} & F^{12}_{li} \\ F^{21}_{li} & F^{22}_{li} \end{pmatrix},$$

$$F^{11}_{li} = \beta_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)\cos(\beta_{k_ij_i}\tau) - \beta_{k_ij_i}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau),$$

$$F^{12}_{li} = -(\beta_{k_lj_l}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau) + \beta_{k_ij_i}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\cos(\beta_{k_ij_i}\tau) - \beta_{k_ij_i}),$$

$$F^{21}_{li} = \beta_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\cos(\beta_{k_ij_i}\tau) + \beta_{k_ij_i}\sin(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau) - \beta_{k_lj_l},$$

$$F^{22}_{li} = -(\beta_{k_lj_l}\cos(\beta_{k_lj_l}\tau)\sin(\beta_{k_ij_i}\tau) - \beta_{k_ij_i}\cos(\beta_{k_ij_i}\tau)\sin(\beta_{k_lj_l}\tau));$$

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi^1_{k_1j_1}\sin(\beta_{k_1j_1}\tau) + \eta^1_{k_1j_1}\cos(\beta_{k_1j_1}\tau) - \eta^0_{k_1j_1}}{\varphi^2_{k_1j_1} + g^2_{k_1j_1}} \\ \dfrac{\xi^1_{k_1j_1}\cos(\beta_{k_1j_1}\tau) - \eta^1_{k_1j_1}\sin(\beta_{k_1j_1}\tau) - \xi^0_{k_1j_1}}{\varphi^2_{k_1j_1} + g^2_{k_1j_1}} \\ \vdots \\ \dfrac{\xi^1_{k_nj_n}\sin(\beta_{k_nj_n}\tau) + \eta^1_{k_nj_n}\cos - \eta^0_{k_nj_n}}{\varphi^2_{k_nj_n} + g^2_{k_nj_n}} \\ \dfrac{\xi^1_{k_nj_n}\cos(\beta_{k_nj_n}\tau) - \eta^1_{k_nj_n}\sin(\beta_{k_nj_n}\tau) - \xi^0_{k_nj_n}}{\varphi^2_{k_nj_n} + g^2_{k_nj_n}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, с помощью принципа максимума Понтрягина доказано утверждение

Утверждение 1. Для произвольных $\tau > 0$, $x^0_{k_ij_i}$, $x^1_{k_ij_i}$, $(i = \overline{1,n})$ в задаче (17)–(19) существует единственное оптимальное управление, которое задается формулой

$$\begin{cases} \hat{u}_1(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{k_ij_i} \left(q^0_{k_ij_i} \cos(\beta_{k_ij_i} s) - p^0_{k_ij_i} \sin(\beta_{k_ij_i} s) \right), \\ \hat{u}_2(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} g_{k_ij_i} \left(q^0_{k_ij_i} \cos(\beta_{k_ij_i} s) - p^0_{k_ij_i} \sin(\beta_{k_ij_i} s) \right), \end{cases}$$

где параметры $p^0_{k_ij_i}$, $q^0_{k_ij_i}$ находятся из системы линейных алгебраических уравнений (30).

3. Результаты численного моделирования. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида (17) для девяти мод колебаний пластины:

$$\dot{x}_{k_pj_p} = A_{k_pj_p} x_{k_pj_p} + B_{k_pj_p} u(t), \qquad p = \overline{1,9}. \tag{31}$$

Матрицы системы (31) задаются соотношениями

$$x_{k_pj_p} = \begin{pmatrix} \xi_{k_pj_p} \\ \eta_{k_pj_p} \end{pmatrix}, \qquad A_{k_pj_p} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{k_pj_p} \\ -\beta_{k_pj_p} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{k_pj_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_{k_pj_p} & g_{k_pj_p} \end{pmatrix},$$

$$u(t) = \begin{pmatrix} \widehat{u}_1(t) \\ \widehat{u}_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \qquad \beta_{k_pj_p} = \frac{\alpha\left(\left(\frac{\pi k_p}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j_p}{l_2}\right)^2\right)}{\sqrt{1 + \frac{h^2}{24}\left(\left(\frac{\pi k_p}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j_p}{l_2}\right)^2\right)}},$$

$$\varphi_{k_pj_p} = \begin{cases} 0, & k_p = 2n, \quad j_p = 2m+1, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2 k_pj_p\left(1 + \dfrac{h^2}{24}\left(\dfrac{(\pi k_pl_2)^2 + (\pi j_pl_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p = 2n+1, \quad j_p = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 k_pj_p\left(1 + \dfrac{h^2}{24}\left(\dfrac{(\pi k_pl_2)^2 + (\pi j_pl_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p = 2n+1, \quad j_p = 2m+1, \end{cases}$$

$$g_{k_pj_p} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2 k_pj_p\left(1 + \dfrac{h^2}{24}\left(\dfrac{(\pi k_pl_2)^2 + (\pi j_pl_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p = 2n, \quad j_p = 2m+1, \\ 0, & k_p = 2n+1, \quad j_p = 2m, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2 k_pj_p\left(1 + \dfrac{h^2}{24}\left(\dfrac{(\pi k_pl_2)^2 + (\pi j_pl_1)^2}{(l_1l_2)^2}\right)\right)}, & k_p = 2n+1, \quad j_p = 2m+1, \end{cases}$$

$(k, j \in \mathbb{N}^2)$, $\quad p = \overline{1,9}$.

Выберем следующие значения механических параметров:

$$l_1 = 1, \quad l_2 = \pi, \quad \alpha = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad h = 0,01.$$

Найдем значения собственных частот $\beta_{k_p j_p}$:

$$\beta_{k_1 j_1} = \frac{\pi^2+1}{\sqrt{1+\dfrac{\pi^2+1}{240000}}} \approx 10,869; \qquad \beta_{k_1 j_2} = \frac{\pi^2+4}{\sqrt{1+\dfrac{\pi^2+4}{240000}}} \approx 13,869;$$

$$\beta_{k_1 j_3} = \frac{\pi^2+9}{\sqrt{1+\dfrac{\pi^2+9}{240000}}} \approx 18,869; \qquad \beta_{k_2 j_1} = \frac{4\pi^2+1}{\sqrt{1+\dfrac{4\pi^2+1}{240000}}} \approx 40,475;$$

$$\beta_{k_2 j_2} = \frac{4(\pi^2+1)}{\sqrt{1+\dfrac{\pi^2+1}{60000}}} \approx 43,474; \qquad \beta_{k_2 j_3} = \frac{4\pi^2+9}{\sqrt{1+\dfrac{4\pi^2+9}{240000}}} \approx 48,474;$$

$$\beta_{k_3 j_1} = \frac{9\pi^2+1}{\sqrt{1+\dfrac{9\pi^2+1}{240000}}} \approx 89,809; \qquad \beta_{k_3 j_2} = \frac{9\pi^2+4}{\sqrt{1+\dfrac{9\pi^2+4}{240000}}} \approx 92,808;$$

$$\beta_{k_3 j_3} = \frac{9(\pi^2+1)}{\sqrt{1+\dfrac{9(\pi^2+1)}{240000}}} \approx 97,807.$$

Для иллюстрации эффективности оптимального управления, полученного в утверждении 1, рассмотрим подсистему системы (31) с тремя степенями свободы. Выберем среди приведенных выше собственных значений три наименьших

$$0 < \beta_{k_1 j_1} < \beta_{k_1 j_2} < \beta_{k_1 j_3}$$

и введем обозначения $(k_1, j_1) = (1,1)$ для $i = 1$; $(k_2, j_2) = (1,2)$ для $i = 2$; $(k_3, j_3) = (1,3)$ для $i = 3$. Тогда частоты $\beta_{k_i j_i}$ будут следующими:

$$\beta_{k_1 j_1} \approx 10.869, \quad \beta_{k_2 j_2} \approx 13.869, \quad \beta_{k_3 j_3} \approx 18.869.$$

Рассмотрим задачу оптимального управления для подсистемы системы (31), соответствующую трем модам колебаний

$$\dot{x}_{k_p j_p} = A_{k_p j_p} x_{k_p j_p} + B_{k_p j_p} u(t), \qquad p = \overline{1,3}, \tag{32}$$

с функционалом качества

$$J = \int_0^1 \{u_1^2(t) + u_2^2(t)\} dt \longrightarrow \min \tag{33}$$

и краевыми условиями

$$x^1_{k_pj_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^0_{k_1j_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^0_{k_2j_2} = x^0_{k_3j_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Найдем коэффициенты $q^0_{k_pj_p}$ и $p^0_{k_pj_p}$, подставив значения $\beta_{k_pj_p}$, $\varphi_{k_pj_p}$, $g_{k_pj_p}$, $\xi^0_{k_pj_p}$, $\xi^1_{k_pj_p}$, $\eta^0_{k_pj_p}$ и $\eta^1_{k_pj_p}$ в линейную систему (30):

$$p^0_{k_1j_1} \approx -1,291, \quad q^0_{k_1j_1} \approx 0,071,$$
$$p^0_{k_2j_2} \approx -0,848, \quad q^0_{k_2j_2} \approx -3,141,$$
$$p^0_{k_3j_3} \approx 1,242, \qquad q^0_{k_3j_3} \approx 0,750.$$

С помощью выражения (25) найдем оптимальное управление системы. Для выбранных частот функции управления будут такими:

$\widehat{u}_1(t) = \varphi_{k_1j_1}(q^0_{k_1j_1}\cos(\beta_{k_1j_1}t) - p^0_{k_1j_1}\sin(\beta_{k_1j_1}t)) + \varphi_{k_2j_2}(q^0_{k_2j_2}\cos(\beta_{k_2j_2}t) - - p^0_{k_2j_2}\sin(\beta_{k_2j_2}t)) + \varphi_{k_3j_3}(q^0_{k_3j_3}\cos(\beta_{k_3j_3}t) - p^0_{k_3j_3}\sin(\beta_{k_3j_3}t))$,

$\widehat{u}_2(t) = g_{k_1j_1}(q^0_{k_1j_1}\cos(\beta_{k_1j_1}t) - p^0_{k_1j_1}\sin(\beta_{k_1j_1}t)) + g_{k_2j_2}(q^0_{k_2j_2}\cos(\beta_{k_2j_2}t) - - p^0_{k_2j_2}\sin(\beta_{k_2j_2}t)) + g_{k_3j_3}(q^0_{k_3j_3}\cos(\beta_{k_3j_3}t) - p^0_{k_3j_3}\sin(\beta_{k_3j_3}t))$.

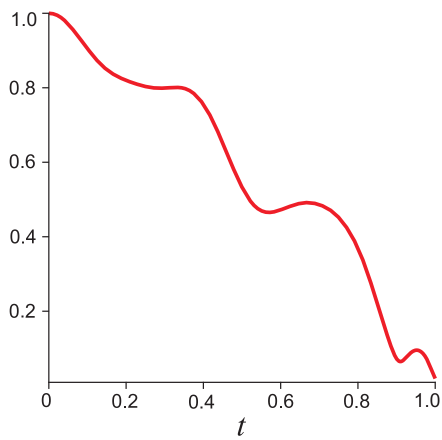

Рис. 2. График нормы решения $\|x(t)\|$.

Путем численного интегрирования найдем решение системы (31) с начальными условиями

$$x^0_{k_1j_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad x^0_{k_2j_2} = \ldots = x^0_{k_9j_9} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

соответствующее управлению $\widehat{u}(t)$ в виде

$$x(t) = \left(x_{k_1j_1}, \quad x_{k_2j_2}, \quad x_{k_3j_3}, \quad x_{k_4j_4}, \quad x_{k_5j_5}, \quad x_{k_6j_6}, \quad x_{k_7j_7}, \quad x_{k_8j_8}, \quad x_{k_9j_9}\right)^T.$$

Из рис. 2 видно, что оптимальное управление, соответствующее подсистеме с тремя низкочастотными модами, может быть использовано для приближенного решения двухточечной задачи управления системой (31) с девятью модами. График нормы решения $\|x(t)\|$ системы (31) приведен на рис. 2 для $t \in [0,1]$.

Выводы. В работе рассмотрена математическая модель пластины Кирхгофа с учетом вращательного движения ее поперечного сечения. Данная модель является уточнением модели работы [3]. Для уточненной модели Кирхгофа была получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая колебания с конечным числом мод. Решена задача оптимального управления модели с явным заданием семейства управлений для любого числа мод колебаний. Результаты численного интегрирования подтверждают эффективность предложенных управлений для двухточечной задачи.

Представляет дальнейший интерес рассмотрение задачи управления моделью пластины Кирхгофа с бесконечным числом степеней свободы.

1. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1992. – № 3. – С. 48-64.
2. *Lagnese J.E., Leugering G.* Controllability of Thin Elastic Beams and Plates // The control handbook (W.S. Levine ed.). – Boca Raton: CRC Press. – IEEE Press, 1996. – P. 1139-1156.
3. *Зуев А.Л., Новикова Ю.В.* Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 187-198.
4. *Zuyev A.* Approximate Controllability of a Rotating Kirchhoff Plate Model // Proc. 49-th IEEE Conf. on Decision and Control. – Atlanta (USA), 2010. – P. 6944-6948.
5. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. Изд. 4-е. – М.: Наука, 1983. – С. 393.

A.L. Zuyev, Yu.V. Novikova

Optimal control of the Kirchhoff plate model

A mathematical model of the Kirchhoff plate with the rotational inertia of its cross section is considered. For such a model, a system of ordinary differential equations with finite numbers of modal coordinates is derived and the optimal control problem with a quadratic cost is solved. Results of numerical integration of a two-point problem with such a control are presented.

Keywords: *Kirchhoff plate, eigen forms, optimal control problem, maximum principle.*

О.Л. Зуєв, Ю.В. Новікова

Оптимальне керування моделлю пластини Кірхгофа

Розглянуто математичну модель пластини Кірхгофа з урахуванням інерції обертання її перетину. Для такої моделі отримано систему звичайних диференціальних рівнянь зі скінченною кількістю модальних координат та розв'язано задачу оптимального керування з квадратичним критерієм якості. Також наведено результати чисельного інтегрування двоточкової задачі при отриманому керуванні.

Ключові слова: *пластина Кірхгофа, власні форми, задача оптимального керування, принцип максимуму.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины
al_zv@mail.ru, yuliya.novikova.88@mail.ru

Получено 25.06.12