

УДК 531.38, 531.36

©2012. А.Е. Позднякович, В.Е. Пузырев

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ ГИРОСКОПА ЛАГРАНЖА С ДЕМПФЕРАМИ–БАЛАНСИРАМИ

Рассмотрена задача о пассивной стабилизации вращений вокруг вертикали гироскопа Лагранжа с двухстепенным демпфером типа “качели”. Демпферы крепятся в носителе с помощью вязкоупругих цилиндрических шарниров. Получены и проанализированы условия устойчивости изучаемого движения по первому приближению. Дана оценка собственных значений линеаризованной системы. Изучен вопрос о выборе параметров демпфера, обеспечивающих максимальную скорость затухания возмущенных движений. Показано, что демпфер-балансир является значительно более эффективным, чем одностепенной демпфер, использованный в [1].

Ключевые слова: пассивная стабилизация, демпфер-балансир, критерий Гурвица для комплексных многочленов, характеристическое число Ляпунова.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Рассмотрим динамически симметричное тяжелое твердое тело, имеющее неподвижную точку O . Введем в рассмотрение две системы координат: инерциальную $Oxyz$ и связанную с телом $Ox_1y_1z_1$. Предполагается, что центр масс O_0 тела принадлежит оси Ox_1 ; $|OO_0| = l_0$. В качестве обобщенных координат, определяющих положение связанной системы координат относительно

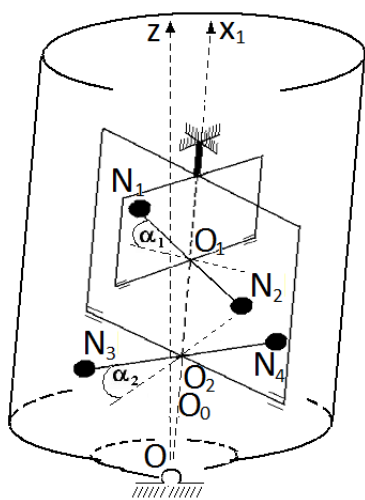


Рис. 1. Твердое тело
с демпферами-балансирами.

Обозначим через r_j радиус-вектор точки N_j ($j = \overline{1, 4}$), тогда

неподвижной, выберем углы Эйлера θ, φ, ψ , которые вводятся обычным образом [2]. С целью избежать особенностей при изучении равномерных вращений [2] в качестве основных осей выбираем Oz и Ox_1 . Параллельно осям Oy_1, Oz_1 в теле расположены оси вязко-упругих цилиндрических шарниров, пересекающие ось Ox_1 в точках O_1, O_2 , при этом $|OO_1| = l_1, |OO_2| = l_2$. На каждую из осей насажены балансиры N_1N_2, N_3N_4 – пара материальных точек массой $m_1(m_2)$ каждая, соединенных жесткими невесомыми стержнями ($|N_{2j-1}O_j| = |N_{2j}O_j| = R_j, j = 1, 2$). Коэффициенты жесткости κ_1, κ_2 (и трения \bar{h}_1, \bar{h}_2) для шарниров, вообще говоря, различны.

$$\mathbf{r}_j = (l_1 + (-1)^{j+1}R_1 \sin \alpha_1, (-1)^{j+1}R_1 \cos \alpha_1, 0)^T, \quad j = 1, 2;$$

$$\mathbf{r}_j = (l_2 + (-1)^{j+1}R_2 \sin \alpha_2, 0, (-1)^{j+1}R_2 \cos \alpha_2)^T, \quad j = 3, 4.$$

Учитывая формулу $\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$ для скорости точки N_j ($j = \overline{1,4}$), где $\dot{\mathbf{r}}_j$ означает относительную производную по времени, запишем выражение для кинетической энергии балансиров: $K^+ =$

$$\begin{aligned} &= m_1 R_1^2 [\omega_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \omega_2^2 (\sin^2 \alpha_1 + \frac{l_1^2}{R_1^2}) + \omega_3^2 (1 + \frac{l_1^2}{R_1^2}) - (\omega_1 \omega_2 \sin 2\alpha_1 + 2\omega_3 \dot{\alpha}_1) + \dot{\alpha}_1^2] + \\ &+ m_2 R_2^2 [\omega_1^2 \cos^2 \alpha_2 + \omega_2^2 (1 + \frac{l_2^2}{R_2^2}) + \omega_3^2 (\sin^2 \alpha_2 + \frac{l_2^2}{R_2^2}) - (\omega_1 \omega_3 \sin 2\alpha_2 - 2\omega_2 \dot{\alpha}_2) + \dot{\alpha}_2^2]. \end{aligned}$$

Обобщенный тензор инерции системы можно записать $\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + \mathbf{J}^+$, где $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2)$ – тензор инерции носителя, \mathbf{J}^+ – “присоединенный” тензор инерции балансиров

$$\mathbf{J}^+ = \begin{pmatrix} J_1^+ & -m_1 R_1^2 \sin 2\alpha_1 & -m_2 R_2^2 \sin 2\alpha_2 \\ -m_1 R_1^2 \sin 2\alpha_1 & J_2^+ & 0 \\ -m_2 R_2^2 \sin 2\alpha_2 & 0 & J_3^+ \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J_1^+ &= 2(m_1 R_1^2 \cos^2 \alpha_1 + m_2 R_2^2 \cos^2 \alpha_2), \quad J_2^+ = 2[m_1(R_1^2 \sin^2 \alpha_1 + l_1^2) + m_2(R_2^2 + l_2^2)], \\ J_3^+ &= 2[m_1(R_1^2 + l_1^2) + m_2(R_2^2 \sin^2 \alpha_2 + l_2^2)]. \end{aligned}$$

Потенциальными силами в системе являются сила тяжести и силы упругости в шарнирах, поэтому для потенциальной энергии имеем

$$\Pi = g[m_0 l_0 + 2(m_1 l_1 + m_2 l_2)] \sin \theta \sin \varphi + \frac{1}{2} \varkappa_1 (\alpha_1 - \alpha_{10})^2 + \frac{1}{2} \varkappa_2 (\alpha_2 - \alpha_{20})^2.$$

Здесь m_0 – масса тела, постоянные α_{10} , α_{20} соответствуют состоянию покоя балансиров (пружины не деформированы).

Проекция вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной системы координат определяются [2] кинематическими соотношениями Эйлера

$$\omega_1 = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \quad \omega_2 = -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta. \quad (2)$$

Подставляя (2) в выражение для кинетической энергии

$$K = K_0 + K^+ = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{J}} \boldsymbol{\omega} \rangle + \langle \boldsymbol{\omega}, \sum_{j=1,2} m_j (\mathbf{r}_{2j} \times \dot{\mathbf{r}}_{2j} + \mathbf{r}_{2j-1} \times \dot{\mathbf{r}}_{2j-1}) \rangle + m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_3^2,$$

где косые скобки означают скалярное произведение, запишем уравнения движения механической системы в форме Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j (\dot{q}_s, q_s) \quad (j = \overline{1,5}), \quad L = K - \Pi, \quad \mathbf{Q} = (0, 0, 0, -\hbar_1 \dot{\alpha}_1, -\hbar_2 \dot{\alpha}_2)^T. \quad (3)$$

Обобщенная координата $q_3 = \psi$ является циклической, остальные координаты – позиционные. С целью отыскания стационарных движений приравняем нулю градиент потенциальной энергии приведенной системы [3]:

$$\begin{aligned}
 & \sin \theta_0 \{ \cos \varphi_0 [(J_2 - J_1) \omega^2 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + m_2 R_2^2 \omega^2 \cos \theta_0 \sin 2\alpha_{20} + \\
 & + g(m_0 l_0 + 2m_1 l_1 + 2m_2 l_2)] + \omega^2 [m_1 R_1^2 (\sin 2\alpha_{10} \sin \theta_0 \cos 2\varphi_0 - \cos 2\alpha_{10} \sin 2\varphi_0) + \\
 & + \sin 2\varphi_0 (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_2 R_2^2 \sin^2 \alpha_{20})] \} = 0, \\
 & \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \{ \omega^2 \sin \theta_0 [(J_2 - J_1) \sin \varphi_0 + 2m_1 R_1^2 \cos \varphi_0 \sin 2\alpha_{10}] + \\
 & + g(m_0 l_0 + 2m_1 l_1 + 2m_2 l_2) \} + \omega^2 \{ m_1 R_1^2 \sin 2\theta_0 (\sin^2 \alpha_{10} + \cos^2 \varphi_0 \cos 2\alpha_{10}) + \\
 & + m_2 R_2^2 [\cos 2\theta_0 \sin 2\alpha_{20} \sin \varphi_0 - \sin 2\theta_0 (\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \alpha_{20} + \\
 & + \cos^2 \alpha_{20} \sin^2 \varphi_0)] + (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \sin 2\theta_0 \sin^2 \varphi_0 \} = 0, \\
 & k_1 (\alpha_{10} - \alpha_1^{(0)}) - m_1 R_1^2 \omega^2 \sin^2 \theta_0 \sin 2(\alpha_{10} - \varphi_0) = 0, \\
 & k_2 (\alpha_{20} - \alpha_2^{(0)}) + m_2 R_2^2 \omega^2 [\sin 2\alpha_{20} (-\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 \sin^2 \varphi_0) + \\
 & + \cos 2\alpha_{20} \sin 2\theta_0 \sin \varphi_0] = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Система (4) достаточно сложна для решения, поэтому мы ограничимся поиском решений, которые соответствуют равномерным вращениям носителя вокруг вертикали, т.е. $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = \pi/2$, при этом $\boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, 0)^T$. Не уменьшая общности, можно считать $\omega > 0$. Тогда из первого уравнения имеем $-m_1 R_1^2 \sin 2\alpha_{10} = 0$, что означает $\alpha_{10} = 0, \pi/2$. Третье равенство будет выполнено, если каждое из указанных значений α_{10} соответствует недеформированному состоянию спиральной пружины: $\alpha_1^{(0)} = \alpha_{10}$. Аналогично из второго равенства находим $m_2 R_2^2 \sin 2\alpha_{20} = 0$, $\alpha_{20} = 0, \pi/2$, а из четвертого – $\alpha_2^{(0)} = \alpha_{20}$. Получается четыре типа равномерных вращений: а) в невозмущенном движении балансиры расположены перпендикулярно оси вращения (т.е. горизонтально); б) оба балансира коллинеарны оси вращения; в), г) один балансир расположен горизонтально, а другой – вертикально. Имея целью задачу пассивной стабилизации носителя, представляется естественным остановиться на случае а), поскольку при этом влияние демпферов на движение тела будет более весомым. Таким образом, приходим к задаче об устойчивости решения

$$\begin{aligned}
 \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega, \quad \dot{\alpha}_1 = 0, \quad \dot{\alpha}_2 = 0 \\
 (\alpha_1^{(0)} = 0, \quad \alpha_2^{(0)} = 0)
 \end{aligned} \tag{5}$$

системы уравнений (3). Переходя к возмущениям

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \tilde{\varphi}, \quad \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \tilde{\alpha}_2,$$

запишем уравнения (3) в вариациях

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\theta}(J_2 + 2m_1l_1^2 + 2m_2l_2^2 + 2m_2R_2^2) - 2m_2R_2^2\ddot{\alpha}_2 + \omega\dot{\varphi}(2J_2 - J_1 + 4m_1l_1^2 + 4m_2l_2^2) + \\
 & + \tilde{\theta}[\omega^2(J_1 - J_2 - 2m_1l_1^2 - 2m_2l_2^2 + 2m_2R_2^2) - g(m_0l_0 + 2m_1l_1 + 2m_2l_2)] - 2m_2R_2^2\omega^2\tilde{\alpha}_2 = 0, \\
 & \ddot{\varphi}(J_2 + 2m_1l_1^2 + 2m_2l_2^2 + 2m_1R_1^2) - 2m_1R_1^2\ddot{\alpha}_1 - \omega\dot{\theta}(2J_2 - J_1 + 4m_1l_1^2 + 4m_2l_2^2) + \\
 & + \tilde{\varphi}[\omega^2(J_1 - J_2 - 2m_1l_1^2 - 2m_2l_2^2 + 2m_1R_1^2) - g(m_0l_0 + 2m_1l_1 + 2m_2l_2)] - 2m_1R_1^2\omega^2\tilde{\alpha}_1 = 0, \\
 & -2m_1R_1^2\ddot{\varphi} + 2m_1R_1^2\ddot{\alpha}_1 + \hbar_1\dot{\alpha}_1 - 2m_1R_1^2\omega^2\tilde{\varphi} + \tilde{\alpha}_1(\varkappa_1 + 2m_1R_1^2\omega^2) = 0, \\
 & -2m_2R_2^2\ddot{\theta} + 2m_2R_2^2\ddot{\alpha}_2 + \hbar_2\dot{\alpha}_2 - 2m_2R_2^2\omega^2\tilde{\theta} + \tilde{\alpha}_2(\varkappa_2 + 2m_2R_2^2\omega^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Введем безразмерные параметры и время по формулам

$$a = \frac{J_1}{J_2 + 2m_1l_1^2 + 2m_2l_2^2}, \quad b = \frac{g(m_0l_0 + 2m_1l_1 + 2m_2l_2)}{\omega^2(J_2 + 2m_1l_1^2 + 2m_2l_2^2)}, \quad (6)$$

$$\mu_j = \frac{2m_jR_j^2}{J_2 + 2m_1l_1^2 + 2m_2l_2^2}, \quad h_j = \frac{\hbar_j}{2m_jR_j^2\omega}, \quad \kappa_j = \frac{\varkappa_j}{2m_jR_j^2\omega^2} + 1, \quad j = 1, 2; \quad \tau = \omega t.$$

Заметим, что все эти параметры принимают только положительные значения, кроме того, $\kappa_j \geq 1$. Для линеаризованных уравнений возмущенного движения имеем

$$\begin{aligned}
 (1 + \mu_2)\tilde{\theta}'' - \mu_2\tilde{\alpha}_2'' + (2 - a)\tilde{\varphi}' + (a - b - 1 + \mu_2)\tilde{\theta} - \mu_2\tilde{\alpha}_2 &= 0, \\
 (1 + \mu_1)\tilde{\varphi}'' - \mu_1\tilde{\alpha}_1'' - (2 - a)\tilde{\theta}' + (a - b - 1 + \mu_1)\tilde{\varphi} - \mu_1\tilde{\alpha}_1 &= 0, \quad (7) \\
 -\tilde{\varphi}'' + \tilde{\alpha}_1'' + h_1\tilde{\alpha}'_1 - \tilde{\varphi} + \kappa_1\tilde{\alpha}_1 = 0, \quad -\tilde{\theta}'' + \tilde{\alpha}_2'' + h_2\tilde{\alpha}'_2 - \tilde{\theta} + \kappa_2\tilde{\alpha}_2 &= 0.
 \end{aligned}$$

С целью сократить техническую часть анализа системы (7) примем дополнительные условия

$$\mu_2 = \mu_1 = \mu \quad (m_2R_2^2 = m_1R_1^2), \quad \kappa_2 = \kappa_1 = \kappa, \quad h_2 = h_1 = h. \quad (8)$$

Обозначим $z_1 = \theta + i\varphi$, $z_2 = \alpha_2 + i\alpha_1$. Тогда решение вещественной системы (7) определяется решением системы

$$\begin{aligned}
 (1 + \mu)z_1'' - \mu z_2'' - i(2 - a)z_1' + (a - b - 1 + \mu)z_1 - \mu z_2 &= 0, \\
 -z_1'' + z_2'' + h z_1' - z_1 + \kappa z_2 &= 0, \quad (9)
 \end{aligned}$$

а корнями характеристического уравнения восьмой степени для системы (7) будут корни комплексного полинома четвертой степени

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= [(1 + \mu)\lambda^2 - i(2 - a)\lambda + a - b - 1 + \mu](\lambda^2 + h\lambda + \kappa) - \mu(\lambda^2 + 1)^2 = \\
 &= \lambda^4 + [h(\mu + 1) - i(2 - a)]\lambda^3 + [a - b - 1 - \mu + \kappa(1 + \mu) - ih(2 - a)]\lambda^2 + \\
 &+ [h(a - b - 1 + \mu) - i\kappa(2 - a)]\lambda + \kappa(a - b - 1 + \mu) - \mu
 \end{aligned} \quad (10)$$

и сопряженного полинома $\overline{P}(\overline{\lambda})$. Поскольку вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (7) решается знаками вещественных частей λ , то достаточно рассмотреть только многочлен $P(\lambda)$.

2. Условия асимптотической устойчивости и их анализ. Для нахождения условий устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для комплексных многочленов [4].

Критерий Гурвица: Пусть дан полином $f(z)$ такой, что

$$f(iz) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n + i(b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n).$$

Число корней полинома $f(z)$ с отрицательными вещественными частями равно числу перемен знака в ряду $1, |B_2|, |B_4|, \dots, |B_{2n}|$, где

$$B_{2s} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_s & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{s-1} & a_s & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & a_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_s \end{pmatrix}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Из (10) выпишем коэффициенты a_m, b_m ($m = \overline{0; 4}$): $a_0 = 1, b_0 = 0, a_1 = a - 2, b_1 = -h(\mu + 1), a_2 = -(\mu + 1)(\kappa - 1) - a + b, b_2 = h(2 - a), a_3 = \kappa(2 - a), b_3 = h(a - b - 1 + \mu), a_4 = \mu(\kappa - 1) + \kappa(a - b - 1), b_4 = 0.$

Вычисляя соответствующие определители матриц (11), находим

$$|B_2| = b_1 = -h(\mu + 1) < 0, \quad |B_4| = h^2 \delta_1, \quad |B_6| = -\mu h^3 \delta_2, \quad |B_8| = b^2 \mu^2 h^4 \delta_3,$$

где $\delta_1 = \kappa(\mu + 1)^3 + \mu[a^2 - 3a - b + 1 - \mu(4 - a + b) - \mu^2], \quad \delta_2 = \gamma_1 \kappa - \gamma_0,$

$$\gamma_1 = a^4 - 5a^3 + a^2(8 - 3b) - 2a(2 - 5b) + b^2 - 8b + \mu[3a^3 - a^2(14 + 3b) + 4a(5 + 2b) + 2(b^2 - 2b - 4)] + \mu^2[2a^2 - 2a(4 + b) + b^2 + 4b + 8],$$

$$\gamma_0 = \mu[a^3 - a^2(4 - b) + a(4 - 6b - 3b^2) + b(b^2 + 7b + 8)] + \mu^2[2a^2 - 2a(4 + b) + b^2 + 4b + 8],$$

$$\delta_3 = (4 - 2a + b)^2[\kappa(a - b - 1 + \mu) - \mu].$$

Для асимптотической устойчивости по первому приближению решения (5) необходимо и достаточно, чтобы все корни $P(\lambda)$ имели отрицательные вещественные части, т.е. четыре перемены знака в ряду $1, |B_2|, |B_4|, |B_6|, |B_8|$, что равнозначно положительности выражений $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Из условия $\delta_3 > 0$ получаем два необходимых условия устойчивости

$$\delta = a - b - 1 + \mu > 0, \quad (12)$$

$$\kappa > \kappa_* = \frac{\mu}{\delta}. \quad (13)$$

Поскольку в силу неравенств треугольника для моментов инерции $a < 2$, то выполнения неравенств (12), (13) достаточно для положительности δ_3 .

Покажем, что их выполнение является также и достаточным условием положительности выражений δ_1 , δ_2 . Заметим, что

$$\delta_1|_{\kappa=\kappa_*} = \delta(b + \delta - \mu - 1)^2 + (\mu + 1)(\delta - \mu - 1)^2 > 0.$$

Функция $\delta_1(\kappa)$ монотонно возрастает, поэтому при $\kappa > \kappa_*$ принимает только положительные значения. Чтобы убедиться в том, что $\delta_2(\kappa) > 0$ при $\kappa > \kappa_*$, необходимо вначале показать положительность γ_1 . Введем вспомогательный параметр $\beta = b(\mu + 1)/(2 - a)$, тогда γ_1 переписется следующим образом

$$\gamma_1(\beta) = \beta^2 + \beta(3a + 2\mu - 4) + a^2 - a + 3a\mu - 2\mu + 2\mu^2.$$

Данная функция на отрезке ¹ $[0, (\mu + 1)(a - 1 + \mu)/(2 - a)]$ принимает свое наименьшее значение либо на одном из его концов, либо при $\beta = \beta_0 = -3a/2 - \mu + 2 > 0$. Последнее возможно только при условии $a < 2(2 - \mu)/3$.

$$\gamma_1(\beta_0) = -\frac{1}{4}(5a^2 - 20a - 4\mu^2 - 8\mu + 16) = -\frac{5}{4}[2 - a - \frac{2\sqrt{5}}{5}(\mu + 1)][2 - a + \frac{2\sqrt{5}}{5}(\mu + 1)]. \quad (14)$$

Кроме того, β_0 должно принадлежать рассматриваемому промежутку, т.е. $2 - 3a/2 - \mu < (\mu + 1)(a - 1 + \mu)/(2 - a)$, откуда находим $a > 2 - \sqrt{3}(\mu + 1)/6$. Но тогда выражение в первых квадратных скобках формулы (14) отрицательно (выражение во вторых скобках, очевидно, положительно), и $\gamma_1(\beta_0) > 0$. Учитывая также, что $\gamma_1(0) = (a + 2\mu)(a - 1 + \mu) > 0$, $\gamma_1(\beta_1) = (a - 1 + \mu)^2(3 - a + \mu)^2/(2 - a)^2 > 0$, приходим к выводу, что всюду в области выполнения неравенств (12) и $0 < a < 2$ имеем $\gamma_1 > 0$. Вычислив теперь $\delta_2|_{\kappa=\kappa_*} = \mu b^2(2\delta + b - 2\mu - 2)^2$, также убеждаемся в его положительности.

Таким образом, условия (12), (13) являются необходимыми и достаточными условиями асимптотической устойчивости стационарного движения (5). Неравенство (12) устанавливает два ограничения на параметры системы. Первое из них $a > 1 - \mu$, (необходимое условие устойчивости) с учетом формул (6) можно переписать как $J_1 + 2m_1R_1^2 > J_2 + 4m_1l_1^2$, что означает сплюснутость эллипсоида вращения, соответствующего обобщенному тензору инерции системы (см. представление для \mathbf{J}^+) с жестко закрепленными балансирами. Второе² ограничение $-b < a - 1 + \mu$ - можно рассматривать как ограничение снизу на величину скорости вращения носителя ω . Наконец, неравенство (13) устанавливает нижнюю границу для жесткости упругих шарниров. Учитывая, что $\kappa \geq 1$ согласно (6), а для реальных объектов естественно считать, что $\mu \ll 1$, то это ограничение, как правило, выполняется и может нарушаться только в случае, когда левая часть (12) близка к нулю.

3. О выборе параметров демпфера. Предположим, что скорость вращения тела и величины, определяющие геометрию масс носителя и демпфера, заданы, и исследуем вопрос о выборе параметров вязко-упругих шарниров, которые обеспечивали бы наибольшую скорость затухания возмущенных решений системы (7). В рамках рассматриваемой модели это означает

¹Правый конец промежутка определяется из неравенства (12).

²Также необходимое условие устойчивости.

нахождение условий, при которых минимальное характеристическое число Ляпунова (ХЧЛ) решений системы (7) принимает наибольшее возможное значение. Считая μ малым параметром и используя методы теории возмущений [5], найдем корни порождающего уравнения, т.е. уравнения $P(\lambda) = 0$, в котором положили $\mu = 0$. Получаем

$$\lambda_{1,2}^{(0)} = \frac{i}{2}(-2 + a \pm \sqrt{a^2 - 4b}), \quad \lambda_{3,4}^{(0)} = \frac{1}{2}(-h \pm \sqrt{h^2 - 4\kappa}).$$

Первые два корня являются чисто мнимыми и различными, если $a^2 > 4b$, что соответствует условию Маиевского для симметричного гироскопа. Два других корня имеют, очевидно, отрицательные вещественные части и соответствуют колебаниям демпфера. Обозначим $\sqrt{a^2 - 4b} = 2r > 0$, тогда $b = a^2/4 - r^2$. С учетом условия (12) получаем пределы изменения

$$D = (a, r) : 2 - a < 2r < a < 2. \quad (15)$$

Поэтому область возможных пар значений на плоскости (a, r) ограничена треугольником со сторонами $r = 0$, $a = 2r$, $a = 2r - 2$. Если $\kappa \neq h^2/4$, то все корни порождающего уравнения – различны, следовательно, корни $P(\lambda)$ суть аналитические функции параметра μ и представимы в виде рядов по целым степеням μ . Члены этих рядов можно последовательно находить методом неопределенных коэффициентов. Так, полагая $\lambda = \lambda_1^{(0)} + \mu\lambda_1^{(1)} + \dots$, находим

$$\lambda_1^{(1)} = -\frac{(a + 2r)(a + 2r - 4)[(a + 2r - 2)h + 2i(\kappa - 1)]}{4r[(a + 2r - 2)^2 - 4\kappa + 2ih(a + 2r - 2)]},$$

$$\operatorname{Re}\lambda_1^{(1)} = -\frac{1}{4r}\sigma(r), \quad \sigma(r) = \frac{h(a + 2r)^2(a + 2r - 2)(a + 2r - 4)^2}{[(a + 2r - 2)^2 - 4\kappa]^2 + h^2(a + 2r - 2)^2}. \quad (16)$$

Выражение для $\operatorname{Re}\lambda_2^{(1)}$ получается, очевидно, заменой в (16) r на $-r$.

Приведем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть задана функция двух вещественных аргументов x, y

$$F(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{Bx + (y - C)^2},$$

$x \in [0, +\infty)$, $y \in [\beta, +\infty)$, $B > 0$, $\beta > C > 0$. Тогда для любой пары значений x, y справедлива оценка

$$F(x, y) \leq F(x, 0) = \frac{\sqrt{x}}{Bx + (\beta - C)^2}.$$

Лемма 2. Пусть задана функция вещественного аргумента x

$$f(x) = \min\left(\frac{A_1\sqrt{x}}{B_1x + C_1}, \frac{A_2\sqrt{x}}{B_2x + C_2}\right),$$

вещественные коэффициенты A_j, B_j, C_j ($j = 1, 2$) положительны,

$$Q_1 = A_2C_1 - A_1C_2 > 0, \quad Q_2 = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0. \quad (17)$$

Тогда наибольшее значение $f(x)$ определяется следующим образом:

- 1) $M = A_1/(2\sqrt{B_1C_1})$, если а) $Q_2 \leq 0$, либо б) $Q_2 > 0$,

$$Q_3 = A_1(B_1C_2 + B_2C_1) - 2A_2B_1C_1 < 0, \quad Q_4 = A_2(B_1C_2 + B_2C_1) - 2A_1B_2C_2 < 0;$$

$$2) \quad M = A_2 / (2\sqrt{B_2C_2}), \text{ если } Q_2 > 0, \quad Q_3 > 0, \quad Q_4 > 0;$$

$$3) \quad M = \sqrt{Q_1Q_2} / |B_1C_2 - B_2C_1|, \text{ если } Q_2 > 0, \quad Q_3Q_4 \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f_j(x)$ ($j = 1, 2$) непрерывно дифференцируема при $x > 0$, ее производная положительна в правой полукрестности нуля и отрицательна при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, в своей единственной точке экстремума $x_{j0} = C_j/B_j$ эта функция принимает свое наибольшее значение $A_j/(2\sqrt{B_jC_j})$. Графики функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ пересекаются в точке

$$x_* = (A_2C_1 - A_1C_2)/(A_1B_2 - A_2B_1) > 0. \quad (18)$$

Если $A_1B_2 - A_2B_1 < 0$, то $x_* \leq 0$ – точки пересечения нет, и значение M представляет собой меньшее из экстремальных значений этих функций. Из первого неравенства (17) следует, что в правой полукрестности нуля $f_1 < f_2$. Если $x_* < 0$, то, в силу непрерывности, $f_1(x) < f_2(x)$ для всех значений аргумента. Следовательно, в этом случае $M = A_1/(2\sqrt{B_1C_1})$ (вариант 1 а)). Выполнение условий варианта 1 б) означает, что $x_* > 0$, $f'_1(x_*) < 0$, $f'_2(x_*) < 0$, т.е. графики функций пересекаются, и точка пересечения принадлежит интервалам убывания (другими словами, $x_{j0} > x_*$ ($j = 1, 2$)). На интервале $(0, x_*)$ выполняется неравенство $f_1(x) < f_2(x)$, которое меняет знак на противоположный при переходе через x_* . Таким образом, в качестве M снова выступает максимум $f_1(x)$.

Случай 2) отличается от случая 1 б) тем, что точка x_* принадлежит интервалам возрастания функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ (т.е. $x_{j0} > x_*$ ($j = 1, 2$)). Соответственно, в качестве M следует брать максимум $f_2(x)$.

Наконец, в случае 3) $f_1(x_*)f_2(x_*) \leq 0$, при этом, в силу условия $A_1C_2 - A_2C_1 > 0$, обязательно $f_1(x_*) \geq 0$, $f_2(x_*) \leq 0$. На промежутке $(0, x_*]$ выполняется неравенство $f_2(x) \geq f_1(x)$. Соответственно, $\max f(x) = \max f_2(x) = f_2(x_*)$. Аналогично, на промежутке $(x_*, +\infty]$ имеем $f_1(x) \leq f_2(x)$, и $M = \max f(x) = \max f_1(x) = f_1(x_*) = f_2(x_*)$. \square

В качестве приближенного значения для минимального ХЧЛ возьмем значение $\sigma_*/4r$, где $\sigma_* = \min(\sigma(r), -\sigma(-r))$. Согласно лемме 1 (при $y = 4\kappa$), оптимальным для κ будет его наименьшее возможное значение, т.е. $\kappa = 1$.³ Тогда

$$A_1 = (a+2r)^2(a+2r-2)(a+2r-4)^2, \quad B_1 = (a+2r-2)^2, \quad C_1 = (a+2r)(a+2r-4),$$

$$A_2 = (a+2r)^2(2r+2-a)(a+2r-4)^2, \quad B_2 = (2r+2-a)^2, \quad C_2 = (2r-a)(4-a-2r),$$

$$Q_1 = 512b^2(2-a)(4-2a+b)^2 > 0, \quad Q_2 = 32(2-a)(a-b-1) q_2(a, r),$$

$$Q_3 = 16(2-a)(a+2r-2)(a+2r)^2(a+2r-4)^2 q_3(a, r), \quad (19)$$

$$Q_4 = -16(2-a)(2r+2-a)(a-2r)^2(2r+4-a)^2 q_4(a, r), \quad q_2 = a^4 - 8a^3 + 8a^2(r^2+2) -$$

³С учетом формул (6) это означает $\varkappa = 0$ – жесткость шарнира минимальна.

$$-32ar^2+16r^2(4-3r^2), q_3(a, r) = a^5-2a^4(5+2r)+8a^3(2+r)^2-16a^2(2+5r+3r^2)+$$

$$+16ar(4+8r-3r^2)+32r^2(2r^3+3r^2-2r-4), q_4 = a^5-2a^4(5-2r)+$$

$$+8a^3(2-r)^2-16a^2(2-5r+3r^2)-16ar(4-8r+3r^3)+32r^2(4-2r-3r^2+2r^3).$$

Очевидно, что знаки Q_j и q_j совпадают при $j = 2, 3$ и противоположны при $j = 4$. Покажем, что $Q_2 > 0$ всюду в D . Найдем наименьшее значение функции $q_2(a, r)$. Она не имеет стационарных точек в ограниченной области D (хотя имеет две точки на границе: $P_1 = \{2 - \sqrt{2}, \sqrt{2}/2\}$, $P_2 = \{2, \sqrt{3}/3\}$), поэтому свое наибольшее и наименьшее значения принимает на границе области. Последовательно вычисляем $q_2|_{a=2r} = 128r^2(1-r) \geq 0$, $q_2|_{a=2-2r} = 2048r^2(1-r) \geq 0$, $q_2|_{a=2} = 16(1+2r^2-3r^4) \geq 0$. Наименьшее значение, равное нулю, функция принимает на границе, следовательно, всюду в области D она положительна.

Аналогично можно показать положительность $q_3(a, r)$. Функция же $q_4(a, r)$ имеет одну ветвь, принадлежащую D . Как следствие, Q_4 может принимать значения разных знаков. На основании леммы 2 заключаем, что при $q_4 < 0$ имеет место случай 2), а при $q_4 > 0$ — случай 3). Соответственно определяются σ_* и оптимальное значение $h = \sqrt{x}$. На рис. 2 показано разбиение области D (заштрихована) кривой $q_4(a, r) = 0$ на подобласти D_2 и D_3 ,

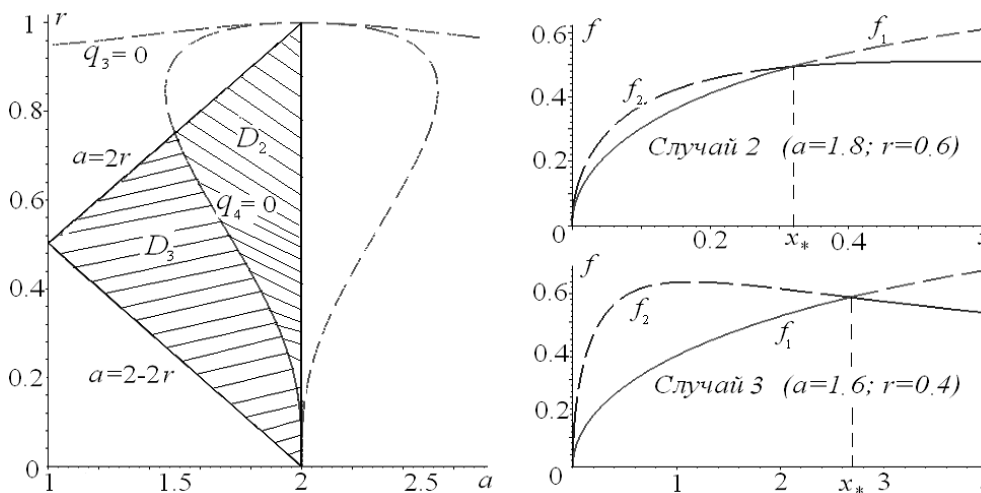


Рис. 2. Вид кривых $q_3 = 0, q_4 = 0, f(x)$.

соответствующие случаям 2) и 3) леммы 2, и графики кривой $f(x)$ (сплошная линия).

Как показывают численные расчеты, для различных точек области D оценка для $\lambda_* = \max(\text{Re}\lambda_1, \text{Re}\lambda_2)$, полученная согласно формуле (16), меняется в достаточно широких пределах. Однако получаемые при этом значения существенно превосходят соответствующие значения для демпфера, использованного в [1]. Так, при $a = 1.6, r = 0.4, \mu = 0.03$ находим

$h \approx 1.48, \lambda_* \approx -0.0104$, а при $a = 1.8, r = 0.6, \mu = 0.03$ имеем $h \approx 0.66, \lambda_* \approx -0.0062$. В [1] оценка для минимального характеристического числа Ляпунова составила $|\max(\operatorname{Re}\lambda_j)| \approx 0.0014$. Таким образом, демпфер-балансиры является значительно более эффективным с точки зрения уменьшения интервала затухания возмущенных решений.

1. Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. Пассивная стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 172–180.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.
3. Пузырев В.Е. Об устойчивости стационарных движений механических систем с неполной диссипацией энергии // Механика твердого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 99–104.
4. Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций. – Тр. матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – XXVI – 331 с.
5. Найфе А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
6. Peiffer K., Savchenko A. Ya. On passive stabilization in critical cases // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – 244. – P. 106–119.
7. Савченко А.Я., Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. Пассивная стабилизация положения равновесия двузвенного маятника с упругими связями // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 104–113.

А.Е. Pozdnyakovich, V.E. Puzirev

Stability of permanent rotations around the principal axis of the Lagrange's gyroscope with dampers-balancers

The problem of passive stabilization is considered for permanent rotations of Lagrange's gyroscope. The two balancers are attached to the rigid body by cylindrical viscous-elastic hinges. The necessary and sufficient conditions of asymptotic stability for the linearized motion equations are obtained and analyzed. The estimation of eigenvalues is given. The question of optimal choice of the damper characteristics, which guarantees the fastest damping rate of the perturbed motions is discussed. The damper presented is much more effective than the 1-DOF one that was used in [1].

Keywords: *passive stabilization, damper-balancer, Gurvitz criterion for complex polynomial, Lyapunov's exponent.*

О.Є. Позднякович, В.Є. Пузырьов

Стійкість рівномірних обертань навколо головної осі гіроскопа Лагранжа з демпферами-балансирами

Розглянуто задачу про пасивну стабілізацію обертань навколо вертикалі гіроскопа Лагранжа з двохстепеневим демпфером типу "гойдалка". Отримано і проаналізовано умови стійкості руху, що вивчається, за першим наближенням. Наведено оцінку власних значень лінеаризованої системи. Досліджено питання про вибір параметрів демпфера, які забезпечують максимальну швидкість згасання збурених рухів. Демпфер, що пропонується, є значно більш ефективним, ніж одноступеневий, який був застосований в [1].

Ключові слова: *пасивна стабілізація, демпфер-балансири, критерій Гурвіца для комплексних многочленів, характеристичне число Ляпунова.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк;
Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры,
Макеевка

Получено 14.10.12

vpsr@iamm.ac.donetsk.ua