УДК 531.38+517.938.5

©2012. **М.П. Харламов**

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ – ЯХЬЯ

Представлено полное исследование множества равномерных вращений гиростата в случае интегрируемости Ковалевской – Яхья. Введено понятие классов эквивалентности относительно определяющих параметров, построено разделяющее множество. Для каждого класса вычислен тип особенности как тип неподвижной точки в приведенной системе, получен характер устойчивости, указана структура локального слоения Лиувилля.

**Ключевые слова:** *гиростат Ковалевской – Яхья, равномерные вращения, устойчивость, круговая молекула.*

**Введение.** Движение гиростата Ковалевской–Яхья описывается уравнениями

$$\begin{array}{lll} 2\dot{\omega}_1 = \omega_2(\omega_3 - \lambda), & 2\dot{\omega}_2 = -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\omega}_3 = \alpha_2, \\ \dot{\alpha}_1 = \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\alpha}_2 = \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, & \dot{\alpha}_3 = \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1. \end{array} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\alpha}$ – вектор силового поля, $\lambda > 0$ – гиростатический момент. Фазовое пространство $P^5 = \mathbb{R}^3_\omega \times S^2_\alpha$ определено в $\mathbb{R}^6$ геометрическим интегралом $\Gamma = \boldsymbol{\alpha}^2$, постоянная которого принимается равной единице. Первые интегралы системы таковы

$$\begin{array}{l} H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dfrac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1, \qquad L = \omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \dfrac{1}{2}(\omega_3 + \lambda)\alpha_3, \\ K = (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2)^2 + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\omega_1\alpha_3]. \end{array}$$

Интеграл $K$ указан в работе [1]. Система (1) имеет гамильтонову форму $\dot{x} = \{H, x\}$ относительно скобки Ли – Пуассона на пространстве $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$. Функции $\Gamma$ и $L$ являются аннуляторами скобки, поэтому на любом их совместном уровне $P^4_\ell = \{\Gamma = 1, L = \ell\}$ возникает гамильтонова система с двумя степенями свободы (приведенная система).

Аналитическому и топологическому исследованию системы (1) посвящено много работ. Основные из них указаны, например, в библиографии статьи [2]. Однако до сих пор нет строгой и полной классификации такого важного типа движений гиростата Ковалевской – Яхья, как равномерные вращения.

Известно, что в поле силы тяжести равномерные вращения (движения с постоянной угловой скоростью) возможны только вокруг вертикали, поэтому соответствующие значения пары $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$ являются неподвижными точками системы (1) и "положениями равновесия" в приведенных системах. В силу этого равномерные вращения называют также относительными равновесиями. Ниже относительным равновесием называется именно неподвижная

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00043).

точка системы (1), а под характером устойчивости равномерного вращения понимается характер устойчивости соответствующей неподвижной точки в содержащей ее приведенной системе на $P^4_\ell$.

Равномерными вращениями гиростатов различных конфигураций занимались многие авторы. Вероятно, наиболее полное изложение истории вопроса можно найти в [3]. Некоторая информация об устойчивости относительных равновесий в случае Ковалевской – Яхья может быть получена из работы [4], где, в частности, приведены условия существования движений, асимптотических к семейству периодических траекторий, включающих и все относительные равновесия как точки бифуркации. Вопрос существования асимптотических движений для этого же семейства изучался в работе [5], но полученные в [5] условия сразу же следуют из результатов [4]. Однако в задаче классификации неподвижных точек интегрируемой системы информация о наличии или отсутствии асимптотических движений является недостаточной для строгого описания характера устойчивости. Гораздо более точными характеристиками являются тип неподвижной точки и ее круговая молекула. Тип точки полностью определяет детальное свойство устойчивости (количество переменных, по которым неподвижная точка устойчива или неустойчива, и соответствующие направления в фазовом пространстве), а круговая молекула описывает топологию системы в окрестности неподвижной точки с точностью до изоморфизма слоения на интегральные многообразия.

Цель настоящей работы – в терминах подходящих параметров определить понятие класса эквивалентности относительных равновесий гиростата Ковалевской – Яхья, указать все разделяющие значения параметров, для каждого класса указать тип относительного равновесия как особой точки интегрируемой гамильтоновой системы, характер устойчивости, топологию совместного уровня первых интегралов, содержащего относительное равновесие, и возникающее в его окрестности слоение интегральных многообразий.

**1. Множество относительных равновесий.** Множество точек $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$ в $P^5$, отвечающих равномерным вращениям, т.е. множество относительных равновесий всех приведенных систем, обозначим через $\mathcal{R}$. Локально множество $\mathcal{R}$ параметризовано значением $\ell$ интеграла площадей (для приведенных систем относительные равновесия – это критические точки ранга 0). В то же время, на каждом $P^4_\ell$ имеется конечное число точек $\mathcal{R}$, существенно меняющееся с изменением $\ell$, поэтому аналитические выражения в зависимости от $\ell$ плохо подходят для исследований.

Известно, хотя специально это нигде не отмечено, что все равномерные вращения в случае Ковалевской – Яхья содержатся в семействе траекторий, отвечающем решению, найденному П.В. Харламовым в работе [6]. Это решение обобщает на гиростат с осевой динамической симметрией и произвольным отношением осевого и экваториального моментов инерции случай интегрируемости Бобылева–Стеклова. Если первая ось инерции, как и в уравнениях (1), выбрана в направлении центра масс, а последний лежит в экваториальной плоскости, то соответствующее фазовое пространство задано системой инвариантных соотношений $\{\omega_2 = 0, \dot{\omega}_2 = 0\}$. В принятых здесь обозначениях явные формулы решения [6, § 5.4] имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = p_0, && \omega_2 = 0, && \omega_3 = r,\\
&\alpha_1 = p_0^2 + \frac{1}{2}r^2 - h, && \alpha_2 = f(r), && \alpha_3 = -p_0(r-\lambda),
\end{aligned} \tag{2}
$$

где $h$ – произвольная постоянная интеграла энергии, $p_0$ – свободный параметр, $r$ – независимая переменная, подчиненная уравнению $\dot r = f(r)$, и

$$
f^2(r) = -\frac{1}{4}r^4 - (2p_0^2 - h)r^2 + 2\lambda p_0^2 r + 1 - (p_0^2 - h)^2 - p_0^2\lambda^2.
$$

Относительное равновесие получим, если величина $r$ постоянна и равна кратному корню многочлена $f^2(r)$. Тогда

$$
\begin{gathered}
\omega_1 = \pm V, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = r,\\
\alpha_1 = \frac{1}{2}\,[r(r-\lambda) - d], \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \mp(r-\lambda)V,
\end{gathered} \tag{3}
$$

где

$$
d^2 = r^2(r-\lambda)^2 + 4, \qquad V = \sqrt{\frac{r}{2}\left[-r + \frac{1}{r-\lambda}d\right]} \geqslant 0.
$$

Знаки $\omega_1, \alpha_3$ согласованы (оба верхние или оба нижние). Изучая кривые пересечения бифуркационных поверхностей, И.Н. Гашененко [7] указал область изменения константы $r$, рассматриваемой как единственный свободный параметр, правило выбора знака $d$, а также явные выражения первых интегралов. Эти результаты непосредственно применимы к относительным равновесиям.

**Предложение 1** [7]. *Для относительных равновесий параметр $r$ пробегает множество*

$$
r \in (-\infty, 0] \cup [0, \lambda) \cup (\lambda, +\infty), \tag{4}
$$

*знак $d$ совпадает со знаком $r(r-\lambda)$ при $r \ne 0$ и произволен при $r = 0$, а значения первых интегралов таковы*

$$
\begin{gathered}
\ell = \mp\frac{1}{2}[\lambda(r-\lambda) + d]V, \quad h = -\frac{1}{2}r(r-\lambda) + \frac{2r-\lambda}{2(r-\lambda)}d,\\
k = \frac{\lambda}{4(r-\lambda)^2}[r(r-\lambda) - d][r(r-\lambda)(4r-3\lambda) - \lambda d].
\end{gathered}
$$

Из (3), (4) сразу же следует, что множество $\mathcal{R}$ имеет ровно четыре связных компоненты, гомеоморфных вещественной прямой при фиксированном $\lambda > 0$. В соответствии с промежутками изменения $r$ введем обозначения для подмножеств в $\mathcal{R}$, определяемых формулами (3):

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1: && r \in [0, \lambda), && d < 0, && \lim_{r\to+0} d = -2,\\
&\mathcal{R}_2: && r \in (-\infty, 0], && d > 0, && \lim_{r\to-0} d = 2,\\
&\mathcal{R}_3: && r \in (\lambda, +\infty), && d > 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Первые два множества связны, последнее состоит из двух компонент, отличающихся знаком $\omega_1$. В $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ каждому значению $r \neq 0$ отвечают ровно две точки. В $\mathcal{R}_1$ значению $r = 0$ отвечает точка $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\alpha} = \{1, 0, 0\}$ нижнего (абсолютного) положения равновесия тела. Для дальнейшего обозначим ее в соответствии со стремлением $r$ к нулю справа через $c_+$. В $\mathcal{R}_2$ нулевое значение $r$ приводит к точке $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\alpha} = \{-1, 0, 0\}$ верхнего (абсолютного) положения равновесия. Обозначим ее через $c_-$. На множествах (5) определена очевидная симметрия $\boldsymbol{\tau} : (\omega_1, \alpha_3) \mapsto (-\omega_1, -\alpha_3)$, которая меняет знак постоянной площадей $\ell$, связные множества $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ переводит в себя, а в множестве $\mathcal{R}_3$ меняет местами связные компоненты. Устройство семейства множеств $\mathcal{R}(\lambda)$ проиллюстрировано на рис. 1.

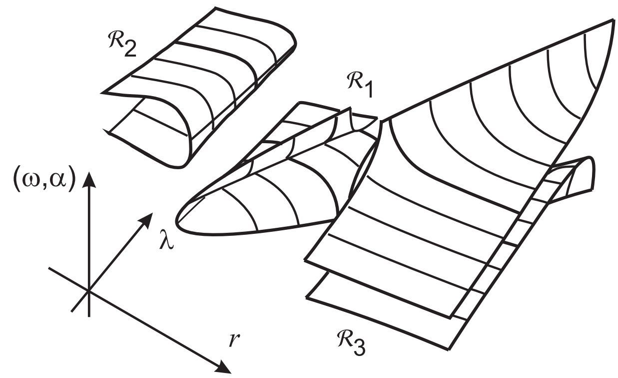



*Рис. 1. Поверхности относительных равновесий.*

Параметр $\lambda$ обычно трактуется как физический. Однако гиростат – это система с четырьмя степенями свободы (тело плюс ротор), в которой $\lambda$ есть константа циклического интеграла, а уравнения Эйлера – Пуассона описывают систему, полученную понижением порядка. Поэтому все исследования каких-либо свойств системы относительно интегральных постоянных естественно проводить в *расширенном* пространстве параметров, включающем ось значений $\lambda$.

Введем следующее понятие. Если $\{S = S(\lambda)\}$ – семейство зависящих от параметра $\lambda$ множеств в $P^5$, определим *расширенное множество*

$$\Lambda(S) = \bigcup_{\lambda} S(\lambda) \times \{\lambda\} \subset P^5 \times \mathbb{R} = \{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) : \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\alpha} \in S^2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Считая $\lambda > 0$, случай $\lambda = 0$ рассматриваем лишь как предельную возможность там, где это явно оговорено. Как следует из предложения 1, множество $\Lambda(\mathcal{R})$ в части $\lambda > 0$ гомеоморфно четырем плоскостям и дважды накрывает область $\mathcal{D} = \{(r, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda > 0, r \neq \lambda\}$. Фактически это накрытие и показано на рис. 1.

Условимся образы множеств $\Lambda(\mathcal{R}_i)$ при отображении на плоскость параметров $(r, \lambda)$ обозначать через $\delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{array}{l} \delta_1 : \{(r, \lambda) : 0 \leqslant r < \lambda,\ \lambda > 0\}, \\ \delta_2 : \{(r, \lambda) : r \leqslant 0,\ \lambda > 0\}, \\ \delta_3 : \{(r, \lambda) : r > \lambda,\ \lambda > 0\}. \end{array}$$

При дополнительной детализации будем снабжать подмножества этих множеств двойными индексами.

**2. Классы эквивалентности и типы относительных равновесий.** Напомним некоторые понятия, связанные с классификацией неподвижных точек в интегрируемой системе с двумя степенями свободы [8]. Все объекты предполагаются аналитическими. Система, заданная гамильтонианом $F$, обозначается $\operatorname{sgrad} F$ и в локальных координатах имеет вид

$$\dot{x} = \Omega(x)\nabla F(x), \qquad x \in \mathbb{R}^4. \tag{6}$$

Здесь $\Omega$ – невырожденная кососимметрическая $4{\times}4$-матрица, которая определяется симплектической структурой или, как в случае уравнений Эйлера – Пуассона, вырожденной скобкой Пуассона на некотором объемлющем пространстве.

Пусть $x_0$ – неподвижная точка системы, т.е. $\nabla F(x_0) = 0$. Тогда линеаризованная система в точке $x_0$ задана матрицей

$$A_F = \Omega(x_0) D_F(x_0) \qquad \left( D_F = \| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \| \right).$$

Хорошо известно, что характеристическое уравнение матрицы $A_F$ биквадратное, поэтому его корни либо разбиты на две пары, каждая из которых имеет вид $\pm a$ или $\pm b\,\mathrm{i}$, либо составляют четверку $\pm a \pm b\,\mathrm{i}$. Пусть $\det A_F \neq 0$. Тогда в первом случае $\mathbb{R}^4$ есть прямая сумма двух инвариантных плоскостей, ограничения на которые линеаризованной системы имеют начало координат седлом или центром. Во втором случае начало координат в $\mathbb{R}^4$ является фокусной особенностью. В соответствии с этим говорят, что точка $x_0$ имеет тип "центр-центр" в случае двух пар мнимых корней, "центр-седло" (или "седло-центр", если важно подчеркнуть порядок следования корней) в случае пары мнимых и пары вещественных корней, "седло-седло" в случае двух пар вещественных корней, "фокус-фокус" в случае четверки комплексных корней. В интегрируемой системе тип точки полностью определяет характер устойчивости: точка типа "центр-центр" устойчива по всем переменным, точка типа "центр-седло" по двум переменным устойчива и по двум – неустойчива, остальные – неустойчивы по всем переменным.

***Замечание* 1.** *Пусть система* (6) *изначально задана на некотором объемлющем пространстве* (*как, например,* $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$ *в случае системы Эйлера – Пуассона*), *а фактическое фазовое пространство* (*в нашей задаче –* $P^4_\ell$) *является совместным уровнем первых интегралов – аннуляторов скобки*

*Пуассона (в нашем случае это интегралы $\Gamma$ и $L$). Пусть $\Phi$ – один из таких интегралов. Тогда $A_F \nabla \Phi = 0$, и этот интеграл порождает нулевое собственное значение матрицы $A_F$. Поэтому при вычислении собственных чисел оператора $A_F$ (в отличие от вычисления собственных чисел ограничения оператора $D_F$ на подмногообразия совместного уровня) интегралы такого рода учитывать не нужно, а следует просто отбросить соответствующее количество нулевых корней характеристического многочлена, которые заведомо существуют. Таким образом, нет необходимости переходить к каким-либо специальным координатам, отвечающим приведенным системам, а все вычисления легко проделать в исходных переменных (в нашем случае – в переменных Эйлера – Пуассона). Говоря далее о собственных значениях операторов вида $A_F$, вычисленных в переменных Эйлера – Пуассона, всегда имеем в виду, что два нулевых значения уже отброшены.*

Отметим еще одно преимущество перехода от $D_F$ к $A_F$ – характеристическое уравнение $A_F$ зависит не от самой точки $x_0$, а от значений первых интегралов в этой точке.

Пусть $G$ – первый интеграл, независимый с $F$ почти всюду в окрестности точки $x_0$ и такой, что $x_0$ – неподвижная точка для $\operatorname{sgrad} G$ (последнее заведомо выполнено, если $\det D_F(x_0) \neq 0$).

***Определение* 1** [8]**.** Неподвижная точка $x_0$ называется невырожденной, если:

1°) матрицы $A_F$ и $A_G$ линейно независимы;

2°) существует линейная комбинация матриц $A_F$ и $A_G$, у которой все четыре собственных значения различны.

Невырожденность позволяет описать топологию интегральных многообразий в окрестности точки $x_0$ в виде почти прямого произведения атомов одномерных систем. При этом не запрещается "странная" динамика, в которой все точки одного из сомножителей могут оказаться неподвижными. Дополнительное условие $\det A_F \neq 0$ гарантировало бы, что неподвижная точка изолирована в четырехмерном фазовом пространстве. Ниже показано, что в рассматриваемой задаче в невырожденных точках это условие выполняется. Для краткости вырожденную точку $x_0$ назовем *сильно* вырожденной, если для нее нарушается условие 1° определения 1, и *слабо* вырожденной в противном случае. Эти термины не являются стандартными, а из сильной вырожденности не следует слабая.

Для уравнений Эйлера – Пуассона 2-форма, индуцированная на $P^5$ симплектической структурой многообразия $TSO(3)$, заведомо вырождена. Введенные понятия необходимо рассматривать с точки зрения систем на $P^4_\ell$. Но, как отмечалось, в явном переходе к этим системам, которые сделали бы вычисления необозримыми, нет необходимости. Корректно определены скобки Ли – Пуассона на $\mathbb{R}^6(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha})$, поэтому поле $\operatorname{sgrad} F$, сопоставленное функции $F$, определено уравнениями

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}}. \tag{7}$$

Здесь $\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}\{2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, \lambda)$.

Вернемся к рассматриваемой системе.

***Определение 2.*** Будем говорить, что точки $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda(\mathcal{R})$ принадлежат к одному классу, если существует непрерывный путь в $\Lambda(\mathcal{R})$, соединяющий $\xi_1$ с $\xi_2$ или $\xi_1$ с $\boldsymbol{\tau}(\xi_2)$, вдоль которого тип точки не меняется.

Пусть $(r, \lambda) \in \mathcal{D}$. При $r \neq 0$ и $\mathrm{sgn}\, d = \mathrm{sgn}\, r(r - \lambda)$ обозначим через $\xi_\pm(r, \lambda)$ две точки (3) в $P^5$. В соответствии с принятыми ранее обозначениями имеем

$$\lim_{r \to +0} \xi_\pm(r, \lambda) = c_+ \in \mathcal{R}_1, \qquad \lim_{r \to -0} \xi_\pm(r, \lambda) = c_- \in \mathcal{R}_2.$$

***Определение 3.*** Точку $(r, \lambda)$ назовем разделяющей, если в любой ее окрестности найдутся образы точек из $\Lambda(\mathcal{R})$ разных классов.

Обозначим через $\overline{\pi}$ луч запрещенных точек $\{r = \lambda,\ \lambda > 0\}$, не включенный в $\mathcal{D}$. Он является разделяющим, если в качестве области изменения параметров рассматривать всю полуплоскость $\{\lambda \geqslant 0\}$, т.е. замыкание множества $\mathcal{D}$. Поскольку $\xi_1 \in \mathcal{R}_1$ и $\xi_2 \in \mathcal{R}_2$ не могут принадлежать одному классу, точки вида $(0, \lambda)$ всегда являются разделяющими. Обозначим полуось $\{r = 0,\ \lambda \geqslant 0\}$ через $\pi_0$. Подчеркнем, что точки луча $\pi_0$ разделяют образы множеств $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ при любом $\lambda$, но внутри каждого из этих множеств значения $r = 0$, как будет ясно ниже, не являются разделяющими за исключением конечного числа точек вида $(0, \lambda)$, в которых меняется тип абсолютного равновесия. При $r \neq 0$ типы точек $\xi_\pm(r, \lambda)$ всегда одинаковы, поэтому точка $(r, \lambda)$ является разделяющей тогда и только тогда, когда точки $\xi_\pm(r, \lambda)$ вырождены. Для исследования свойства вырожденности будем использовать пару функционально независимых (т.е. независимых почти всюду) первых интегралов $H$ (гамильтониан) и $K$ (интеграл Ковалевской – Яхья).

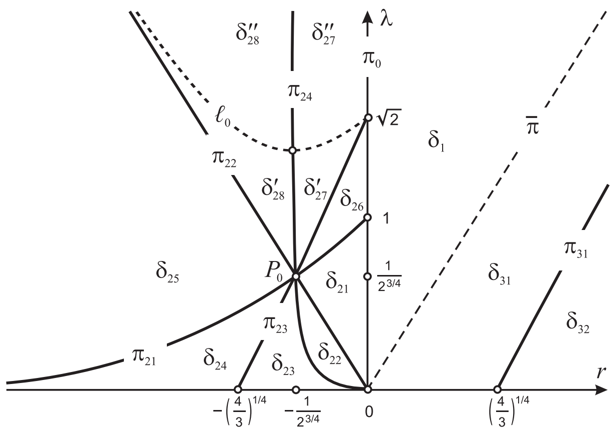



*Рис. 2. Разделяющее множество и классы относительных равновесий.*

Вычислим характеристический многочлен оператора $A_H$. Для этого линеаризуем уравнения (1) или, что то же самое, уравнения (7) с $F = H$, после чего характеристический многочлен 6×6-матрицы линеаризованной системы в подстановке (3) сократим на $\mu^2$ в соответствии с замечанием 1. Получим $\chi_H(\mu) = (\mu^2 - \mu_1^2)(\mu^2 - \mu_2^2)$, где

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= -\frac{1}{4}[(2r-\lambda)(r-\lambda)-d], \\ \mu_2^2 &= -\frac{1}{2(r-\lambda)}[(2r-\lambda)(r-\lambda)r+\lambda d]. \end{aligned} \tag{8}$$

Эти величины впервые вычислены в работе [9].

**Теорема 1.** *Точки $\xi_\pm(r,\lambda)$ вырождены тогда и только тогда, когда точка $(r,\lambda) \in \mathcal{D}$ лежит на одной из кривых*

$$\begin{array}{lllll} \pi_{21}: & r = \lambda - \dfrac{1}{\lambda^{1/3}}, & 0 < \lambda \leqslant 1, & & \\ \pi_{22}: & r = -\lambda, & \lambda > 0, & & \\ \pi_{23}: & r = \dfrac{\sigma^4-4}{2\sigma^3}, & \lambda = \dfrac{3\sigma^4-4}{2\sigma^3}, & \sigma \in (\sqrt[4]{4/3}, \sqrt{2}], & \\ \pi_{24}: & r = \dfrac{1}{2}\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2+4\lambda^{2/3}}\right), & \lambda > 0, & & \\ \pi_{31}: & r = \dfrac{\sigma^4-4}{2\sigma^3}, & \lambda = \dfrac{3\sigma^4-4}{2\sigma^3}, & \sigma \in (-\sqrt[4]{4/3}, 0). & \end{array} \tag{9}$$

*Первый индекс в обозначении кривой соответствует номеру подмножества, т.е. кривая $\pi_{ij}$ содержится в соответствующем множестве $\delta_i \subset \mathcal{D}$. Только кривая $\pi_{21}$ отвечает точкам сильного вырождения.*

*Кривые (9) порождают разбиение множества невырожденных относительных равновесий в $\Lambda(\mathcal{R})$ на 11 классов в смысле определения 2 – прообразов областей $\delta_1$, $\delta_{21}$– $\delta_{28}$, $\delta_{31}$, $\delta_{32}$ (рис. 2). Классы в прообразах подобластей $\delta_1, \delta_{21}, \delta_{26}, \delta_{27}$ связны, остальные имеют по две связных компоненты. В соответствии с обозначениями подобластей относительные равновесия имеют следующие характеристики*:

- $\delta_1, \delta_{24}, \delta_{25}, \delta_{28}, \delta_{32}$ – $\mu_1^2 < 0$, $\mu_2^2 < 0$, *тип "центр-центр", устойчивы по всем переменным*;
- $\delta_{27}$ – $\mu_1^2 < 0$, $\mu_2^2 > 0$, *тип "центр-седло", по двум переменным устойчивы, по двум – неустойчивы*;
- $\delta_{23}, \delta_{31}$ – $\mu_1^2 > 0$, $\mu_2^2 < 0$, *тип "седло-центр", по двум переменным устойчивы, по двум – неустойчивы*;
- $\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{26}$ – $\mu_1^2 > 0$, $\mu_2^2 > 0$, *тип "седло-седло", неустойчивы по всем переменным.*

Нетрудно уточнить утверждения об устойчивости, указав соответствующие направления в фазовом пространстве. Ясно, что таких уточнений требует лишь смешанный тип относительного равновесия, в котором присутствуют как "седло", так и "центр". Обозначим трехмерное многообразие, заданное уравнениями (2), сотканное из одномерных траекторий (периодических и асимптотических к относительному равновесию), через $\mathcal{M}_1$. В точке невырожденного относительного равновесия касательное пространство к $\mathcal{M}_1$ есть сумма прямой, касательной к одномерному семейству относительных равновесий, и плоскости, касательной к уровню интеграла площадей в самом $\mathcal{M}_1$, т.е. к пересечению $\mathcal{M}_1 \cap P^4_\ell$. Дополнение к трехмерному касательному пространству многообразия $\mathcal{M}_1$ в пятимерном фазовом пространстве $P^5$ есть плоскость, и эту плоскость можно выбрать так, что она окажется лежащей в трехмерном касательном пространстве к другому многообразию $\mathcal{M}_2$ частного решения, найденного в работах [10, 11], а именно, будет касательной плоскостью к уровню интеграла площадей в $\mathcal{M}_2$. За устойчивость относительно этой последней плоскости отвечает показатель $\mu_1^2$ (т.е. он является “внешним” типом относительного равновесия для инвариантного многообразия $\mathcal{M}_1$). Направление прямой (общее для касательных пространств к $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$) является собственным вектором линеаризованной системы с нулевым собственным значением и не учитывается при описании устойчивости (оно трансверсально уровню интеграла площадей). За устойчивость по отношению к направлениям в плоскости, касательной к $\mathcal{M}_1 \cap P^4_\ell$, отвечает показатель $\mu_2^2$. Таким образом, при $\mu_1^2 > 0$, $\mu_2^2 < 0$ относительное равновесие устойчиво в $\mathcal{M}_1$ и неустойчиво в $\mathcal{M}_2$, при $\mu_1^2 < 0$, $\mu_2^2 > 0$, наоборот, относительное равновесие неустойчиво в $\mathcal{M}_1$ и устойчиво в $\mathcal{M}_2$.

Изображенная на рис. 2 кривая $\ell_0$ в области $\delta_2$ задана уравнением

$$\lambda(r-\lambda)+d=0 \qquad (d>0).$$

Она отвечает случаю, когда в точках $\xi_\pm(r,\lambda)$ значение интеграла $L$ равно нулю, т.е. эти точки попадают на один интегральный уровень. Однако, как нетрудно установить из соответствующих аналитических решений для траекторий ранга 1, две точки $\xi_\pm(r,\lambda)$ и в этом случае принадлежат разным компонентам интегрального многообразия, поэтому ни тип относительного равновесия, ни топологическая структура связной компоненты его насыщенной окрестности при пересечении кривой $\ell_0$ не изменяются. В то же время ниже будет показано различие в глобальной структуре уровня первых интегралов для подобластей в $\delta_{27}, \delta_{28}$, обозначение которых снабжено штрихами.

Доказательство теоремы проведем в виде последовательности утверждений. Обозначим для краткости $x_0 = \xi_\pm(r,\lambda)$ и пусть

$$B = \nu_1 A_H + \nu_2 A_K, \qquad \nu_1^2+\nu_2^2 \neq 0. \tag{10}$$

Если у такой матрицы $B$ все собственные числа различны, то она называется *регулярным элементом* (алгебры симплектических операторов [8]). Таким образом, условие 2° в определении невырожденности можно назвать требованием существования регулярного элемента.

**Лемма 1.** *Точки $x_0$ сильно вырождены тогда и только тогда, когда $(r,\lambda) \in \pi_{21}$.*

Доказательство. Сильно вырожденная точка отвечает существованию нулевой комбинации $B$. Располагая переменные и, соответственно, элементы матриц в порядке $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}$, приравняем к нулю элемент

$$B_{12} = \frac{1}{2}(r-\lambda)\left[\nu_1 - 2\nu_2\lambda(Q^2+\lambda+r)\right] = 0 \quad \left(Q^2 = \frac{1}{2}\left[-r + \frac{1}{r-\lambda}d\right] \neq 0\right).$$

Отсюда выразим $\nu_1 = 2\nu_2\lambda(Q^2+\lambda+r)$ $(\nu_2 \neq 0)$. Тогда

$$B = \varkappa \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{r} & 0 & 0 & \dfrac{\lambda+r}{Q(\lambda-r)} & 0 \\ 0 & -2r\sqrt{r} & 0 & 0 & \dfrac{r(\lambda+r)}{Q(\lambda-r)} & 0 \\ 2r\sqrt{r} & 0 & -\lambda Q & -\dfrac{r(\lambda+r)}{Q(\lambda-r)} & 0 & \dfrac{2\lambda\sqrt{r}}{\lambda-r} \\ 0 & 2rQ & 0 & 0 & -\dfrac{\sqrt{r}(\lambda+r)}{\lambda-r} & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\varkappa = 2\nu_2(\lambda-r)Q(Q^2+\lambda)$. Очевидно, матрица в правой части ненулевая, поэтому $Q^2+\lambda=0$, что равносильно уравнению $1+\lambda(r-\lambda)^3=0$ с условием $Q^2<0$. Но $\operatorname{sgn} Q^2 = \operatorname{sgn}[(r-\lambda)d]$ совпадает с $\operatorname{sgn} r$ (см. предложение 1). Поэтому из решений уравнения нужно взять только лежащие в $\delta_2$, что и дает первую кривую (9). $\square$

В частности, относительные равновесия сильно вырождены над “узловой” точкой

$$P_0: \quad r = -2^{-3/4}, \qquad \lambda = 2^{-3/4},$$

в которой пересекается пучок разделяющих кривых. Далее для краткости, говоря о слабой вырожденности над разделяющими кривыми, опускаем естественную оговорку “за исключением точки $P_0$”.

**Лемма 2.** *Относительные равновесия над кривой $\pi_{22}$ слабо вырождены. При этом* $\det A_H \neq 0$.

Доказательство. Полагая $r=-\lambda$, вычислим характеристический многочлен комбинации (10). Получим

$$\chi(\mu) = \left[\mu^2 + \frac{(Z^2-2)(\nu_1 Z+\nu_2)}{2Z^3}\right]^2, \qquad Z = \lambda^2 + \sqrt{\lambda^4+1}.$$

Поэтому в линейной оболочке операторов $A_H, A_K$ регулярного элемента нет, нарушено условие 2°. Случай $Z^2=2$ приводит к точке $P_0$. В остальных точках $B \neq 0$, даже если $\nu_1 Z + \nu_2 = 0$ и все собственные числа равны нулю. Поэтому имеет место слабая вырожденность.

Положим $\nu_1 = 1, \nu_2 = 0$. Получим для многочлена $\chi_H(\mu)$ при $\lambda \neq 2^{-3/4}$

$$\mu_{1,2}^2 = -\frac{(Z^2-2)Z}{2Z^3} \neq 0,$$

т.е. второй дифференциал ограничения $H$ на $P^4_\ell$ в соответствующих точках невырожден. $\square$

**Лемма 3.** *Относительные равновесия над кривыми* $\pi_{23}, \pi_{24}, \pi_{31}$ *слабо вырождены. При этом характеристический многочлен* $A_H$ *имеет два нулевых собственных числа.*

Доказательство. Характеристический многочлен комбинации (10) имеет вид

$$\chi(\mu) = \mu^4 - \frac{(\sigma^8 + 2\sigma^4 - 8)[-2\nu_1\sigma^2 + \nu_2(\sigma^4 - 4)]^2}{8\sigma^{10}}\mu^2$$

при условии $(r, \lambda) \in \pi_{23} \cup \pi_{31}$. Полагая $Z = \lambda^{2/3} + \sqrt{4 + \lambda^{4/3}}$, в точках кривой $\pi_{24}$ получим

$$\chi(\mu) = \mu^4 + \frac{(Z^2 - 8)(4 + Z^2)\{\nu_2[Z^2(Z^2 - 8)^2 - 64] - 4\nu_1 Z^3\}^2}{512 Z^7}\mu^2.$$

Поэтому $\chi(\mu)$ при всех $\nu_1, \nu_2$ имеет два нулевых корня, т.е. регулярного элемента нет. В частности, два нулевых собственных числа имеет и сама матрица $A_H$ (естественно, с учетом замечания 1). $\square$

Итак, доказана вырожденность относительных равновесий в прообразах всех кривых, перечисленных в формулировке теоремы 1. Это технически наиболее сложная часть доказательства теоремы, так как необходимо доказывать *несуществование* некоторого объекта (регулярного элемента). Примеры явных доказательств вырожденности в литературе на эту тему автору неизвестны. Обычно ограничиваются утверждением об областях невырожденности (достаточными условиями). Здесь такое утверждение получить легко.

**Лемма 4.** *За пределами кривых, перечисленных в теореме* 1, *относительные равновесия невырождены. При этом во всех таких точках второй дифференциал приведенного гамильтониана невырожден.*

Доказательство. По лемме 1 сильного вырождения в этой области быть не может. В качестве возможного регулярного элемента возьмем саму матрицу $A_H$. Она может иметь совпадающие собственные числа лишь в трех случаях $\mu_1^2 = 0$, $\mu_2^2 = 0$ или $\mu_1^2 = \mu_2^2$. Первое условие при $r \neq 0$ дает уравнение $(r - \lambda)(3r - \lambda) = 4$ с условием $\operatorname{sgn}(2r - \lambda) = \operatorname{sgn} r$. Отсюда подстановкой $r = \lambda - \sigma$ получаем параметрические выражения кривых $\pi_{23}, \pi_{31}$. При $r = 0$ из $\mu_1^2 = 0$ следует $\lambda = \sqrt{2}$, $d = 2 > 0$. Это – граничная точка кривой $\pi_{23}$. Случай $\mu_2^2 = 0$ сводится к уравнению $r(r - \lambda) = \lambda^{2/3}$, которое при $\lambda > 0$ определяет ровно по одной точке в $\delta_2$ $(r < 0)$ и в $\delta_3$ $(r > \lambda)$. В этих областях следует считать $d > 0$. Но тогда в области $\delta_3$ будет $(2r - \lambda)(r - \lambda)r = -\lambda r < 0$, что не так. Поэтому допустимым решением здесь является лишь кривая $\pi_{24}$.

Вне кривых $\pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{24}$ многочлен $\chi_H(\mu)$ не имеет нулевых корней, что, в частности, означает невырожденность ограничения второго дифференциала функции $H$ на фазовое пространство $P^4_\ell$ соответствующей приведенной системы.

Условие $\mu_1^2 = \mu_2^2$ за пределами кривой $\pi_{22}$ дает

$$(2r-\lambda)(r-\lambda)+d=0.$$

Выполняя подстановку $r=\lambda-\sigma$, получим то же параметрическое представление, что и на кривых $\pi_{23}, \pi_{31}$, но при $\sigma \geqslant \sqrt{2}$ и $d<0$. Характеристический многочлен $\chi_H(\mu)$ по условию имеет хотя и ненулевые, но попарно совпадающие собственные числа и задачу о невырожденности не решает. Вычислим, однако, характеристический многочлен $A_K$:

$$\chi_K(\mu) = \left[\mu^2 + \frac{(\sigma^4-4)^2(4+\sigma^4)}{\sigma^{14}}\right]\left[\mu^2 + \frac{(\sigma^4+4)(3\sigma^8-7\sigma^4+4)^2}{\sigma^{14}}\right].$$

При $\sigma > \sqrt{2}$ все его корни различны, поэтому он представляет собой искомый регулярный элемент. В граничной точке $\sigma=\sqrt{2}$, которая соответствует нижнему абсолютному равновесию тела $c_+$ при $\lambda=\sqrt{2}$ ($r=0$, $d=-2$), многочлен

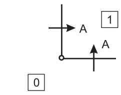
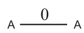
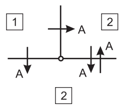
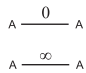
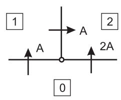
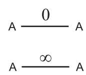
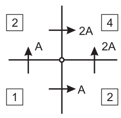
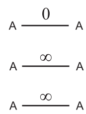
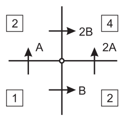
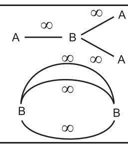
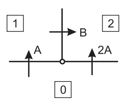
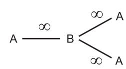
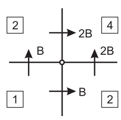
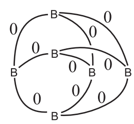
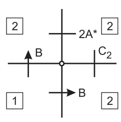
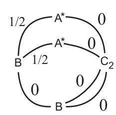
$$\chi_K(\mu) = (\mu^2+36)\mu^2$$

регулярным элементом не является. Однако для комбинации (10) имеем $\chi(\mu) = (\mu^2+\nu_1^2)\left[\mu^2+(\nu_1-6\nu_2)^2\right]$. Поэтому при любых $\nu_1 \neq 0$, $\nu_2 \neq 0$ матрица $B$ есть регулярный элемент и соответствующие точки невырождены. $\square$

Доказательство теоремы завершается применением лемм 1 – 4 и непосредственным определением знаков величин (8) в подобластях множества $\mathcal{D}$.

**3. Топология интегральных уровней относительных равновесий.** Пусть $x$ – точка невырожденного относительного равновесия, $\ell = L(x)$. Рассмотрим $\mathcal{F}_\ell = H\times K : P_\ell^4 \to \mathbb{R}^2$ – интегральное отображение приведенной системы. Обозначим через $J(x)$ полный прообраз точки $\mathcal{F}_\ell(x)$ – критическую интегральную поверхность, а через $U(x)$ – достаточно малую насыщенную окрестность поверхности $J(x)$, не содержащую относительных равновесий с другими значениями отображения $\mathcal{F}_\ell$. Поверхность $J(x)$ может состоять из нескольких связных компонент. Как следует из формул (3), компонента точки $x$ всегда содержит ровно одно относительное равновесие. Одновременно могут существовать компоненты, содержащие ровно одну критическую окружность. Количество и топология этих компонент устанавливаются по сводке результатов для критических подсистем, приведенных в работе [12]. Рассматривая точку $x$ в каждой из двух содержащих ее критических подсистем [12], анализируем информацию по прилегающим областям в образе критической подсистемы. Эти области порождают дуги бифуркационной диаграммы отображения $\mathcal{F}_\ell$ в окрестности точки $x$. Структура критического множества в прообразах этих дуг и перестройки в $U(x)$ при их пересечении находятся по таблицам из [12]. После этого тип круговых молекул самих относительных равновесий и лежащих на том же уровне критических периодических траекторий вместе с метками однозначно устанавливается исходя из исчерпывающего описания круговых молекул невырожденных особенностей низкой сложности [8]. Кроме компонент, содержащих критические точки, в $J(x)$ могут входить и регулярные торы, заполненные двояко-периодическими траекториями. Их количество однозначно устанавливается по виду бифуркационной диаграммы, дополненной указанием атомов на дугах.

*Таблица*

| Класс точек | Компонент в прообразе | Особые траектории в прообразе | Диаграмма | Молекулы в прообразе | Регул. торы |
|---|---|---|---|---|---|
| $\delta_1$ | 1 | $p_{CC}$ |  |  | 0 |
| $\delta_{25}$ | 3 | $p_{CC} \cup S^1_E$ |  |  | 1 |
| $\delta''_{28}, \delta_{32}$ | 2 | $p_{CC} \cup S^1_E$ |  |  | 0 |
| $\delta_{24}, \delta'_{28}$ | 4 | $p_{CC} \cup 2S^1_E$ |  |  | 1 |
| $\delta_{23}, \delta'_{27}$ | 2 | $p_{CS} \cup S^1_H$ |  |  | 0 |
| $\delta_{31}, \delta''_{27}$ | 1 | $p_{CS}$ |  |  | 0 |
| $\delta_{22}, \delta_{26}$ | 1 | $p_{SS}$ |  |  | 0 |
| $\delta_{21}$ | 1 | $p_{SS}$ |  |  | 0 |

Результат топологической классификации приведен в таблице. Для круговых молекул указаны только $r$-метки с единственной целью – отличить молекулы относительных равновесий типа “центр-центр” (метка $r = 0$) от молекул лежащих на том же уровне эллиптических периодических траекторий (метка $r=\infty$). В действительности же, здесь все метки (включая $\varepsilon, n$-метки) выставляются автоматически в соответствии с [8].

На фрагментах диаграммы в окрестности относительного равновесия указаны атомы, возникающие на критических окружностях при пересечении дуг диаграммы. Здесь встречаются лишь атомы типов $A, B, A^*, C_2$. Для несимметричных атомов стрелкой указано направление возрастания числа торов. Само это число в регулярных областях указано в рамке. При описании особых траекторий (сингулярной компоненты интегрального многообразия) $p_{CC}$ – это неподвижная точка типа "центр-центр", $p_{CS}$ – критическое многообразие неподвижной точки типа "центр-седло" – восьмерка, $p_{SS}$ – критическое многообразие неподвижной точки типа "седло-седло" – две восьмерки с общей центральной точкой и приклеенные к ним четыре прямоугольника, заполненных асимптотическими траекториями из регулярных точек (правило склейки полностью определено соответствующей круговой молекулой). Через $S^1_E$ обозначена периодическая траектория эллиптического типа, исчерпывающая соответствующую связную компоненту, а через $S^1_H$ – поверхность периодической траектории гиперболического типа, отвечающая атому типа $B$ (прямое произведение восьмерки на окружность). Полученная классификация по количеству классов и по виду круговых молекул полного прообраза значения отображения момента в относительных равновесиях отличается от результатов, представленных недавно в [13]. Ввиду отсутствия в цитируемой работе точного определения принципа классификации детальное сопоставление результатов не проводилось.

**Заключение.** Сформулируем кратко результаты классификации относительных равновесий случая Ковалевской – Яхья.

1) В фазовом пространстве $P^5=\mathbb{R}^3{\times}S^2$ при любом $\lambda>0$ множество относительных равновесий $\mathcal{R}(\lambda)$ однопараметрическое, имеет четыре связных компоненты. Две из них сохраняются симметрией $\boldsymbol{\tau}$, меняющей знак интеграла площадей, две остальных симметричны друг другу.

2) Объявляя эквивалентными в расширенном множестве $\cup_\lambda(\mathcal{R}(\lambda),\lambda)$ относительные равновесия, которые можно перевести друг в друга непрерывным изменением параметров или симметрией $\boldsymbol{\tau}$ с сохранением топологии связной насыщенной окрестности, получим 11 классов эквивалентности. Разделяющие кривые в пространстве параметров и типы относительных равновесий в классах определены в теореме 1. Для связных окрестностей относительных равновесий имеется четыре вида круговых молекул.

3) Требуя сохранение при непрерывном изменении параметров полного уровня первых интегралов, отвечающего относительному равновесию, приходим к 13 классам. Для таких интегральных многообразий получаем семь различных сочетаний круговых молекул на одном уровне без учета наличия регулярных торов, и восемь – с учетом этого наличия (два последних столбца таблицы).

1. *Yehia H.M.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, 3. – P. 169–172.
2. *Харламов М.П., Харламова И.И., Шведов Е.Г.* Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях гиростата Ковалевской–Яхья // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 77–90.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 365 с.
4. *Гашененко И.Н.* Новый класс движений тяжелого гиростата // Докл. АН СССР. – 1991. – **318**, № 1. – С. 66–68.
5. *Малаха А.Е.* Об одном классе асимптотических движений гиростата Ковалевской // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 7–10.
6. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Изд-во НГУ, 1965. – 221 с.
7. *Гашененко И.Н.* Бифуркационное множество задачи о движении гиростата, подчиненного условиям Ковалевской // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 31-35.
8. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация // Ижевск: Изд-во РХД. – 1999. – Т. 1. - 444 с.; Т. 2. - 448 с.
9. *Рябов П.Е.* Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхья // Вестн. УдГУ. – 2010. – № 4. – С. 25–30.
10. *Харламова Е.И., Харламов П.В.* Новое решение дифференциальных уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку, при условиях С.В. Ковалевской // Докл. АН СССР. – 1969. – **189**, № 5. – С. 967–968.
11. *Харламов П.В.* Один случай интегрируемости уравнений движения твердого тела, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1971. – Вып. 3. - С.57-64.
12. *Харламов М.П., Рябов П.Е.* Диаграммы Смейла–Фоменко и грубые инварианты Ковалевской–Яхья // Вестн. УдГУ. – 2011. – № 4. – С. 40–59.
13. *Логачева Н.С.* Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхья // Матем. сб. – 2012. – **203**, № 1. – С. 31–60.


## Analytical classification of the permanent rotations of the Kowalevski – Yehia gyrostat

**M.P. Kharlamov**

The complete investigation of the permanent rotations of a gyrostat in the integrable case of Kowalevski – Yehia is presented. The notion of equivalence classes is given with respect to the defining parameters, the separating set is constructed. For each class the type of a singularity is calculated as the type of a fixed point in the reduced system. The detailed character of stability is obtained, and the structure of local Liouville foliation is shown.

**Keywords:** *permanent rotations, type of singularity, stability, loop molecule.*

**М.П. Харламов**

## Аналітична класифікація рівномірних обертань гіростата Ковалевської – Яхья

Подано повне дослідження множини рівномірних обертань гіростата у випадку інтегровності Ковалевської – Яхья. Введено поняття класів еквівалентності відносно визначальних параметрів, побудовано розділяючу множину. Для кожного класу обчислено тип особливості як тип нерухомої точки у зведеній системі, отримано детальний характер стійкості, указано структуру локального шарування Ліувілля.

**Ключові слова:** *рівномірні обертання, тип особливості, стійкість, кругова молекула.*

*Волгоградский филиал РАНХиГС, Россия* Получено 11.08.12

mharlamov@vags.ru