УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ ХУКУХАРЫ

Т. А. Комлева

Одес. нац. политехн. ун-т
Украина, 65044, Одесса, пр. Шевченко, 1
e-mail: t-komleva@ukr.net

А. В. Плотников

Одес. акад. строительства и архитектуры
Украина, 65029, Одесса, ул. Дидрихсона, 4
e-mail:a-plotnikov@ukr.net

We introduce two types of differential inclusions with Hukuhara derivative and consider properties of such inclusions. For differential inclusions of the second type, we give several definitions of a solution, and prove theorems on existence of an ordinary solution and establish compactness of the set these solutions.

Введено два типи диференціальних включень з похідною Хукухари і розглянуто їхні властивості. Для диференціального включення другого типу наведено різні означення розв'язку та доведено теореми існування звичайного розв'язку і компактність їх множини.

1. Введение. Развитие теории многозначных отображений привело к вопросу о том, что понимать под производной от многозначного отображения. Основной причиной, затрудняющей введение данного понятия, является нелинейность пространства непустых компактных подмножеств евклидова пространства, что влечет отсутствие операции вычитания. Поэтому существует несколько подходов к определению разности двух множеств. Один из них — разность Хукухары [1], которая является частным случаем разности Минковского [2–4].

Одновременно с введенными разностями появились и понятия производных. Первая из них — производная Хукухары [1]. В работе [1] Хукухара ввел интеграл и производную для многозначных отображений и рассмотрел как они связаны между собой. Впоследствии в работах [5–8] были рассмотрены и другие ее свойства.

В 1969 г. после появления производной Хукухары F. S. De Dlasi и F. Iervolino в [5] впервые рассмотрели дифференциальное уравнение с производной Хукухары, в котором решением было многозначное отображение. В последующем в работах [6, 9–11] были введены различные определения решения этого уравнения и доказаны теоремы их существования, а в [12, 13] рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа уравнений в стандартной форме. Затем в работе [14] данные уравнения были существенно использованы при изучении некоторых свойств „интегральной воронки" дифференциального включения в банаховом пространстве, а в работах [15, 16] — применялись при исследовании уравнений с нечеткими начальными условиями.

Впоследствии А. В. Плотниковым в [17] было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары и получены некоторые свойства их решений, а также рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа

© Т. А. Комлева, А. В. Плотников, 2007

включений в стандартной форме [18–20, 13]. А R. Dabrowska и T. Janiak в [21] получили некоторые аналогичные результаты для дифференциальных включений с производной Хукухары с запаздыванием.

2. Понятие дифференциального включения с производной Хукухары. Вначале введем некоторые необходимые в дальнейшем обозначения и определения.

Пусть $\mathrm{comp}\,(R^n)(\mathrm{conv}\,(R^n))$ — пространство непустых компактных (и выпуклых) подмножеств евклидова пространства R^n с метрикой Хаусдорфа

$$h(A,B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subset S_r(B),\ B \subset S_r(A)\},$$

где $A, B \in \mathrm{comp}\,(R^n)$; $S_r(x)$ — шар радиуса $r \geq 0$ с центром в $x \in R^n$, $S_r(A) = A + S_r(0)$.

Обозначим через $\mathrm{cc}\,(R^n)$ $(\mathrm{cocc}\,(R^n))$ пространство, соостоящее из всех непустых компактных (и выпуклых) подмножеств пространства $\mathrm{conv}\,(R^n)$.

Легко убедиться, что данное пространство имеет те же свойства, что и пространство $\mathrm{comp}\,(R^n)$.

В $\mathrm{cc}\,(R^n)$ введем метрику между двумя множествами $A,\, B \in \mathrm{cc}\,(R^n)$ по формуле

$$d(A,B) = \max\left\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a,b),\ \ \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a,b)\right\},$$

а также определим скалярную функцию $\mathrm{dist}\,(A,B)$, $A \in \mathrm{conv}\,(R^n)$, $B \in \mathrm{cc}\,(R^n)$ следующим образом:

$$\mathrm{dist}\,(A,B) = \min_{b\in B} h(A,b).$$

Очевидно, что для нее будут справедливы следующие свойства:

1) $\mathrm{dist}\,(A,B) \geq 0$ и равна нулю тогда и только тогда, когда $A \in B$;

2) $\mathrm{dist}\,(A,B) \leq \mathrm{dist}\,(A,C) + d(C,B)$, $C \in \mathrm{cc}\,(R^n)$;

3) $\mathrm{dist}\,(A,B) \leq h(A,C) + \mathrm{dist}\,(C,B)$, $C \in \mathrm{conv}\,(R^n)$.

Введем определение интеграла для таких многозначных отображений $F(\cdot) : [t_0,T] \to \to \mathrm{cc}\,(R^n)$.

Определение 1. *Пусть $F(\cdot) : R^1 \to \mathrm{cc}\,(R^n)$. Тогда под интегралом Ауманна будем подразумевать интеграл*

$$\int\limits_{t_0}^{T} F(t)dt = \left\{ \int\limits_{t_0}^{T} f(t)dt \,\middle|\, f(\cdot) \in F(\cdot) \right\},$$

где $f(\cdot)$ — многозначный селектор $F(\cdot)$, интегрируемый по Ауманну [22] на $[t_0,T]$.

Теорема 1 [20]. *Пусть многозначное отображение $F(\cdot) : [t_0,T] \to \mathrm{cocc}\,(R^n)$ ограничено и интегрируемо.*

Тогда множество

$$Y = \int\limits_{t_0}^{T} F(t)dt$$

выпукло и компактно.

Определение 2. *Под интегралом Ауманна – Хукухары от многозначного отображения $F(\cdot) : R^1 \to \mathrm{cc}\,(R^n)$ будем понимать множество $G \in \mathrm{cc}\,(R^n)$, определяемое следующим образом:*

$$G = \left\{ g \in \mathrm{conv}\,(R^n), \;\; g = \int\limits_{t_0}^{T} f(t)dt \,\middle|\, f(\cdot) \in F(\cdot) \right\},$$

где $f(\cdot) : [t_0, T] \to \mathrm{conv}\,(R^n)$ и интеграл от многозначного отображения $f(\cdot)$ понимается в смысле Хукухары [1].

Замечание 1. Если интеграл Ауманна – Хукухары существует, то его значение совпадает со значением интеграла Ауманна.

Введем дифференциальное включение, которое является обобщением обычных дифференциальных включений и дифференциальных уравнений с производной Хукухары, и назовем его дифференциальным включением I типа:

$$D_h X \subset F(t, X), \tag{1}$$

где $D_h X(t)$ — производная Хукухары от многозначного отображения $X(\cdot)$ в точке $t \in [t_0, T]$, т. е. существует Δ-окрестность точки t такая, что $(t - \Delta, t + \Delta) \subset [t_0, T]$ и для любых $t', t'' \in (t - \Delta, t + \Delta)$ и $t' < t''$ существует множество $G(t', t'') \in \mathrm{conv}\,(R^n)$, которое называется разностью Хукухары множеств $X(t'')$ и $X(t')$, $\;G(t', t'') = X(t'') \overset{h}{-} X(t')$, такое, что $X(t'') = X(t') + G(t', t'')$ и выполняется тождество

$$\lim_{\Delta \to 0_+} \left(\frac{1}{\Delta} (X(t + \Delta) \overset{h}{-} X(t)), D_h X(t) \right) =$$

$$= \lim_{\Delta \to 0_+} \left(\frac{1}{\Delta} (X(t) \overset{h}{-} X(t - \Delta)), D_h X(t) \right);$$

$F(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathrm{conv}\,(R^n) \to \mathrm{comp}\,(R^n)$ — многозначное отображение.

Определение 3. *Решением дифференциального включения (1) называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot)$, производная которого удовлетворяет включению (1) почти всюду на $[t_0, T]$.*

Множество всех таких решений обозначим через $H(F)$.

Лемма 1. *Множество $OB(F)$ всех решений дифференциального включения*

$$\dot{x} \in F(t, x), \; x \in R^n, \; F(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times R^n \to \mathrm{comp}\,(R^n),$$

принадлежит $H(F)$.

Действительно, однозначная функция является частным случаем многозначного отображения. При этом производная Хукухары от однозначной функции совпадает с обычной производной.

Лемма 2. *Если $F(\cdot,\cdot) : [t_0,T] \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{conv} R^n$, то $BL(F) \subset H(F)$, где $BL(F)$ — множество решений дифференциального уравнения с производной Хукухары*

$$D_h X = F(t,X).$$

Замечание 2. В общем случае существуют решения, отличные от $OB(F)$ и $BL(F)$.

Например, пусть $F(t,X) = [-1,1]$, $X(0) = 0$, $t_0 = 0$, $T = 1$, тогда $OB(F)$ соответствует множеству решений дифференциального включения $\dot{x} \in [-1,1]$, $x(0) = 0$, а множество решений $BL(F)$ состоит из единственного элемента – $t \cdot [-1,1]$. Заметим, что, например, решения $t \cdot [-1,0] \in H(F)$ и $t[-1/2,1/2]$ принадлежат $H(F)$, но не принадлежат $OB(F)$ и $BL(F)$.

Если $F(t,X) = \{[-1,-1/2] \bigcup [1/2,1]\}$, $X(0) = 0$, то решений $BL(F)$ не существует, так как $F(t,X) \notin \operatorname{conv}(R^n)$. При этом решения $t \cdot [k_1,k_2]$ и $t \cdot [l_1,l_2]$, где $l_1, l_2 \in \in [1/2,1]$, $k_1,k_2 \in [-1,-1/2]$, принадлежат $H(F)$.

Лемма 3. *Теоремы существования для решений $OB(F)$ и $BL(F)$ являются также теоремами существования для решений $H(F)$.*

Рассмотрим теперь дифференциальное включение с производной Хукухары II типа:

$$D_h X \in F(t,X), \tag{2}$$

где $F(\cdot,\cdot) : R^1 \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{cc}(R^n)$ — многозначное отображение.

Определение 4. *Решением дифференциального включения (2) называется абсолютно непрерывное многозначное отображение $X(\cdot)$, производная которого удовлетворяет включению (2) почти всюду на R^1 .*

Множество всех таких решений обозначим через $O(F)$.

Замечание 3. Если в правой части дифференциального включения (2) отображение таково, что все множества, принадлежащие $F(t,X)$, являются одноточечными, то включение (2) превращается в обычное дифференциальное включение $\dot{x} \in F(t,x)$ и $OB(F) = = O(F)$.

Если $F(\cdot,\cdot)$ таково, что множество $F(t,X)$ состоит из одного множества из $\operatorname{conv}(R^n)$, то дифференциальное включение (2) превращается в дифференциальное уравнение с производной Хукухары и $BL(F) = O(F)$.

Рассмотрим, как соотносятся между собой решения дифференциальных включений с производной Хукухары I и II типов.

Поставим в соответствие дифференциальному включению (1) дифференциальное включение

$$D_h X \in G(t,X), \tag{3}$$

где $G(\cdot,\cdot)$ ставит в соответствие каждому $t \in [t_0,T]$ и $X \in \operatorname{conv}(R^n)$ множество всех непустых выпуклых компактных подмножеств непустого компактного множества $F(t,X)$.

Очевидно, что решения включений (1) и (3) совпадают.

Наоборот, поставим в соответствие включению (2) дифференциальное включение I типа

$$D_h X \subset P(t, X), \tag{4}$$

где $P(t, X)$ — объединение всех множеств, являющихся элементами множества $F(t, X)$. Тогда все решения включения (2) являются решениями включения (4), но не наоборот.

Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только дифференциальные включения II типа.

3. Различные определения решения и их свойства. Рассмотрим дифференциальное включение с производной Хукухары

$$D_h X \in F(t, X), \ X(t_0) = X_0, \tag{5}$$

где $F(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \mathrm{conv}\,(R^n) \to \mathrm{cc}\,(R^n)$ — многозначное отображение.

После введения данного дифференциального включения возникают те же вопросы и трудности, что и в теории обыкновенных дифференциальных включений [23], но при этом появляются и дополнительные проблемы. Это связано, например, с тем, что при рассмотрении обыкновенного дифференциального включения мы использовали пространства R^n и $\mathrm{comp}\,(R^n)$ и хотя бы одно из них было линейным. Теперь же мы используем пространства $\mathrm{conv}\,(R^n)$ и $\mathrm{cc}\,(R^n)$, а они оба – нелинейны [4, 13]. Это обусловливает определенные трудности при доказательстве результатов, которые аналогичны полученным для обыкновенных дифференциальных включений.

Вначале введем, как и в теории обыкновенных дифференциальных включений, различные понятия решения для системы (5) и приведем некоторые из их свойств.

3.1. Обобщенное решение.

Определение 5. *Многозначное отображение $X(\cdot)$ называется обобщенным решением включения (5), если $X(\cdot)$ — непрерывное многозначное отображение на $[t_0, T]$ ($X(\cdot) \in \in C_n^M[t_0, T]$) и интегральное включение*

$$X(t'') \overset{h}{-} X(t') \in \int_{t'}^{t''} F(t, X(t))dt \tag{6}$$

справедливо для всех $t' < t''$, $t', t'' \in [t_0, T]$.

Обозначим через $G(F)$ множество всех обобщенных решений включения (5).

Теорема 2. *Пусть $F(\cdot, \cdot) : R^1 \times \mathrm{conv}\,(R^n) \to \mathrm{occ}\,(R^n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $F(\cdot, X)$ измеримо для всех $X \in \mathrm{conv}\,(R^n)$;

2) $F(t, \cdot)$ непрерывно для всех $t \in [t_0, T]$;

3) $|F(t, X)| \le m(t)$, $(t, X) \in [t_0, T] \times \mathrm{conv}\,(R^n)$, $m(\cdot) \in L_1[t_0, T]$.

Тогда $O(F) = G(F)$.

Доказательство. Очевидно, что $O(F) \subset G(F)$. Покажем, что $G(F) \subset O(F)$. Пусть $X(\cdot) \in G(F)$. Тогда

$$\left| X(t'') \overset{h}{-} X(t') \right| \le \left| \int_{t'}^{t''} F(s, X(s)) ds \right| \le \int_{t'}^{t''} |F(s, X(s))| \, ds \tag{7}$$

для $t', t'' \in [t_0, T]$ таких, что $t' < t''$. Следовательно, $X(\cdot)$ является абсолютно непрерывной функцией на $[t_0, T]$ и по теореме 1.2.1 [13] многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре на $[t_0, T]$. Тогда имеем

$$0 \le \operatorname{dist}(D_h X(t), F(t, X(t))) \le h \left(D_h X(t), \frac{1}{\eta} \left(X(t+\eta) \overset{h}{-} X(t) \right) \right) +$$

$$+ d \left(\frac{1}{\eta} \int_{t}^{t+\eta} F(s, X(s)) ds, F(t, X(t)) \right) = A_1(t, \eta) + A_2(t, \eta) \tag{8}$$

для каждого $\eta > 0$ и $t \in [t_0, T]$.

Почти для всех $t \in [t_0, T]$ имеем (аналогично [24])

$$\lim_{\eta \to 0_+} d \left(\frac{1}{\eta} \int_{t}^{t+\eta} F(s, X(s)) ds, F(t, X(t)) \right) = 0. \tag{9}$$

Оценки (7) и (9) показывают, что $A_1(t, \eta) \to 0$ и $A_2(t, \eta) \to 0$ при $\eta \to 0_+$ почти для всех $t \in [t_0, T]$. Если в (8) η устремить к 0_+, то получим, что $\operatorname{dist}(D_h X(t), F(t, X(t))) = 0$ почти всюду на $[t_0, T]$.

Следовательно, $D_h X(t) \in F(t, X(t))$ почти всюду на $[t_0, T]$, т. е. $X(\cdot) \in O(F)$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $F(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{cc}(R^n)$ — *многозначное отображение, удовлетворяющее условиям 1 – 3 теоремы.*

Тогда $O(\operatorname{conv} F) = G(F)$.

3.2. Контингентное решение.

Определение 6 [18, 20]. *Пусть* $X(\cdot) : [t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$. *Множество* $D_h^* X(\tau) = R_\tau \bigcup L_\tau$, *где*

$$R_\tau = \Big\{ Y \in \operatorname{conv}(R^n) \mid \exists\, t_n \to \tau,\ t_n > \tau,$$

$$\lim_{n \to \infty} h\Big((t_n - \tau)^{-1} \Big(X(t_n) \overset{h}{-} X(\tau) \Big), Y \Big) = 0 \Big\},$$

$$L_\tau = \Big\{ Y \in \operatorname{conv}(R^n) \mid \exists\, t_n \to \tau,\ t_n < \tau,$$

$$\lim_{n \to \infty} h\Big((\tau - t_n)^{-1} \Big(X(\tau) \overset{h}{-} X(t_n) \Big), Y \Big) = 0 \Big\},$$

будем называть контингенцией от $X(\cdot)$ в точке $\tau \in (t_0, T)$.

Определение 7 [18, 20]. *Пусть $X(\cdot) : [t_0, T] \to \mathrm{conv}\,(R^n)$. Множество*

$$D_h^{**}X(\tau) = \Big\{ Y \in \mathrm{conv}\,(R^n) \mid \exists\, t_n \to \tau,\ t_i \to \tau,\ t_n > t_i,$$

$$\lim_{n,i\to\infty} h\Big((t_n - t_i)^{-1} \Big(X(t_n) \overset{h}{-} X(t_i) \Big), Y \Big) = 0 \Big\}$$

будем называть паратингенцией от $X(\cdot)$ в точке $\tau \in [t_0, T]$.

Определение 8. *Многозначное отображение $X(\cdot)$ называется контингентным (паратингентным) решением, если $X(\cdot) \in C_n^M[t_0, T]$ и*

$$D_h^* X(t) \subset F(t, X(t)),\ t \in [t_0, T] \quad (D_h^{**} X(t) \subset F(t, X(t)),\ t \in [t_0, T]).$$

Будем обозначать множество контингентных (паратингентных) решений через $C(F)$ $(P(F))$.

Лемма 4. *Пусть $S \in \mathrm{conv}\,(R^n)$, $I = [t_0, T]$, $X(\cdot)$ — абсолютно непрерывное многозначное отображение на I ($X(\cdot) \in AC_n^M(I)$), $D_h X(t) \subset S$ для почти всех $t \in I$.*

Тогда

$$(T - t_0)^{-1} \left(X(T) \overset{h}{-} X(t_0) \right) \subset S.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 7.1.1 [23].

Теорема 3. *Пусть $F(\cdot,\cdot) : [t_0, T] \times \mathrm{conv}\,(R^n) \to \mathrm{cc}\,(R^n)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение.*

Тогда $O(F) = C(F)$.

Доказательство. Допустим, что $X(\cdot) \in C(F)$ и $\mathcal{L}$ — компактный подынтервал $[t_0, T]$. Из условия теоремы следует, что $F(\cdot, X(\cdot))$ полунепрерывно сверху по t.

Пусть $\mathcal{G} \in \mathrm{cc}\,(R^n)$. Через $U\mathcal{G}$ обозначим множество в пространстве $\mathrm{comp}\,(R^n)$, которое является объединением всех элементов множества $\mathcal{G}$, т. е.

$$U\mathcal{G} = \bigcup_{g \in \mathcal{G}} g,\ g \in \mathrm{conv}\,(R^n).$$

Тогда существует $C \in \mathrm{comp}\,(R^n)$ такое, что $UF(t, X(t)) \subset C$ для $t \in \mathcal{L}$. Следовательно, $X(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица в $\mathcal{L}$ и поэтому $X(\cdot) \in AC_n^M(\mathcal{L})$. Тогда $D_h X(\cdot)$ существует почти всюду на $[t_0, T]$.

Учитывая, что $D_h X(t) \in D_h^* X(t) \subset F(t, X(t))$ почти всюду на $[t_0, T]$, получаем, что $X(\cdot) \in O(F)$.

Пусть теперь $X(\cdot) \in O(F)$. Поскольку $X(\cdot) \in AC_n^M[t_0, T]$, то $X(\cdot) \in C_n^M[t_0, T]$. Возьмем $t' \in [t_0, T]$, $k > 0$ и положим $U_k = S_k(F(t', X(t')))$. Так как $F(\cdot, X(\cdot))$ полунепрерывно сверху, существует окрестность H точки t' такая, что $F(t, X(t)) \subset U_k$ для $t \in H$. Следовательно, $D_h X(t) \subset U_k$ почти всюду и по лемме 4 для всех

$$(t - t')^{-1} \left(X(t) \overset{h}{-} X(t') \right) \subset U_k,$$

т. е. $D_h^* X(t) \subset U_k$.

Переходя к пределу при k, стремящемся к нулю, получаем

$$D_h^* X(t) \subset F(t, X(t)),$$

т. е. $X(\cdot) \in C(F)$.

Теорема доказана.

3.3. Квазирешения.

Определение 9. *Многозначное отображение $X(\cdot)$ называется квазирешением дифференциального включения (5), если существует последовательность многозначных отображений $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:*

1) $X_k(\cdot) \in AC_n^M[t_0, T],\ k = 1, 2, \ldots;$

2) $|D_h X_k(t)| \leq m(t),\ t \in [t_0, T],\ m(\cdot) \in L_1^n[t_0, T],\ k = 1, 2, \ldots;$

3) $\lim\limits_{k \to \infty} X_k(t) = X(t),\ t \in [t_0, T];$

4) $\lim\limits_{k \to \infty} \operatorname{dist}(D_h X_k(t), F(t, X_k(t))) = 0$ *почти всюду на* $[t_0, T]$.

Множество квазирешений включения (5) обозначим через $Q(F)$.

Теорема 4. *Пусть $F(\cdot, \cdot) : [t_0, T] \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{cc}(R^n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $F(\cdot, X)$ измеримо для всех $X \in \operatorname{conv}(R^n)$;

2) $F(t, \cdot)$ непрерывно для всех $t \in [t_0, T]$;

3) $|F(t, X)| \leq m(t),\ (t, X) \in [t_0, T] \times \operatorname{conv}(R^n),\ m(\cdot) \in L_1^n[t_0, T]$.

Тогда $O(\operatorname{conv} F) = Q(F) = Q(\operatorname{conv} F)$.

Доказательство. Из определения квазирешения следует, что $Q(F) \subset Q(\operatorname{conv} F)$. Покажем, что $Q(\operatorname{conv} F) \subset O(\operatorname{conv} F)$.

Пусть $X(\cdot) \in Q(\operatorname{conv} F)$. Тогда существует последовательность многозначных отображений $\{X_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$, сходящаяся к $X(\cdot)$. Из непрерывности многозначного отображения $\operatorname{conv} F(t, \cdot)$ по $X \in \operatorname{conv}(R^n)$ следует, что $d(\operatorname{conv} F(t, X_i), \operatorname{conv} F(t, X)) \to 0$ для $t \in [t_0, T]$ при $i \to \infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$T_i = \{t \in [t_0, T] \mid \operatorname{dist}(D_h X_i(t), F(t, X(t))) > \varepsilon\}.$$

При $i \to \infty$ имеем $\operatorname{meas}(T_i) \to 0$. Поскольку $\operatorname{conv} F(t, X(t))$ измерима на $[t_0, T]$, существует измеримая функция $G(\cdot)$ такая, что $G(t) \in \operatorname{conv} F(t, X(t)),\ |G(t)| \leq m(t)$ для $t \in [t_0, T]$.

Возьмем

$$U_i(t) = \begin{cases} D_h X_i(t) & \text{для почти всех } t \in [t_0, T] \backslash T_i, \\ G(t) & \text{для } t \in T_i, \end{cases}$$

которые удовлетворяют включению $U_i(t) \in S_\varepsilon(\operatorname{conv} F(t, X(t)))$ почти всюду на $[t_0, T]$.

Пусть $V_i(\cdot)$ — абсолютно непрерывное многозначное отображение, для которого почти всюду на $[t_0, T]$ $D_h V_i(t) = U_i(t)$. Следовательно,

$$V_i(t'') \overset{h}{-} V_i(t') \in \int\limits_{t'}^{t''} S_\varepsilon(\operatorname{conv} F(t, X(t))) dt.$$

Так как $V_i(t) \to X(t)$ при $i \to \infty$, то

$$X(t'') \overset{h}{-\!\!-} X(t') \in \int\limits_{t'}^{t''} S_\varepsilon(\operatorname{conv} F(t, X(t)))dt.$$

Из абсолютной непрерывности многозначного отображения $X(\cdot)$ и существования разностей Хукухары на $[t_0, T]$ следует, что почти всюду на этом отрезке $D_h X(t) \in \in S_\varepsilon(\operatorname{conv} F(t, X(t)))$. А так как ε — произвольное число, то $D_h X(t) \in \operatorname{conv} F(t, X(t))$ почти всюду на $[t_0, T]$, т. е. $X(\cdot) \in O(\operatorname{conv} F)$.

Теперь осталось показать, что $O(\operatorname{conv} F) \subset Q(F)$. Пусть $X(\cdot) \in O(\operatorname{conv} F)$. Тогда $F(\cdot, X(\cdot))$ измерима на $[t_0, T]$ и по теореме Егорова существует система непересекающихся компактных подынтервалов $\{I_i\}$, а также множество $N \subset [t_0, T]$, $\operatorname{meas}(N) = 0$, такие, что $[t_0, T] = \bigcup\limits_i I_i \bigcup N$ и $X(\cdot)$ и соответствующее $S(\cdot) = F(\cdot, X(\cdot))$ непрерывны на I_i. Разбиение $[t_0, T]$ можно выбрать так, что $D_h X(\cdot) \in \operatorname{conv} F(t, X(t))$ почти всюду на $[t_0, T]$ и

$$h(D_h X(t), D_h X(\tau)) \le 1/k, \;\; d(F(t, X(t)), F(\tau, X(\tau))) \le 1/k,$$

$t, \tau \in I_i$, $i = 1, 2, \ldots$, и k — произвольно.

Определим $U(\cdot) : [t_0, T] \to \operatorname{conv}(R^n)$ и $\tilde F(\cdot) : [t_0, T] \to \operatorname{cc}(R^n)$ следующим образом:

$$U(t) = \begin{cases} D_h X(t), & t \in I_i, \; i = 1, 2, \ldots, \\ \{0\}, & t \in N, \end{cases}$$

$$\tilde F(t) = \begin{cases} F(t_i, X(t_i)), & t \in I_i, \; i = 1, 2, \ldots, \\ \{0\}, & t \in N. \end{cases}$$

Тогда $h(U(t), D_h X(t)) \le 1/k$ и $d(\tilde F(t), F(t, X(t))) \le 1/k$ для почти всех $t \in [t_0, T]$.

Определим $X_k(\cdot)$ следующим образом:

$$X_k(t) = X(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} U(s)ds, \;\; t \in [t_0, T].$$

Тогда для $X_k(\cdot)$ справедливо:

1) $X_k(\cdot) \in AC_n^M[t_0, T]$, $X_k(t_0) = X(t_0)$;
2) $|D_h X_k(t)| \le m(t)$, $t \in [t_0, T]$;
3) $D_h X_k(t) \in \tilde F(t)$ для почти всех $t \in [t_0, T]$;
4) $\operatorname{dist}(D_h X_k(t), F(t, X_k(t))) \le 1/k$ для почти всех $t \in [t_0, T]$.

Оценим

$$h(X_k(t), X(t)) \leq$$

$$\leq h\left(\int\limits_{t_0}^{t} U(s)ds, \int\limits_{t_0}^{t} D_hX(s)ds\right) \leq \int\limits_{[t_0,T]\cap I_1} h\left(U(s), D_hX(s)\right) ds + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{[t_0,T]\cap I_i} h(U(s), D_hX(s))ds + \ldots \leq$$

$$\leq \frac{1}{k}\sum_i \operatorname{meas}(I_i) = \frac{1}{k}(T - t_0),$$

т. е. $X_k(t) \to X(t)$ при $k \to \infty$ и $t \in [t_0, T]$.

Поскольку

$$\operatorname{dist}(D_hX_k(t), F(t, X_k(t))) < \operatorname{dist}(D_hX_k(t), F(t, X(t)))+$$

$$+ d(F(t, X(t)), F(t, X_k(t))) \leq \frac{1}{k} + d(F(t, X(t)), F(t, X_k(t)))$$

и $F(t, \cdot)$ непрерывно, то $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{dist}(D_hX_k(t), F(t, X_k(t))) = 0$ почти всюду на $[t_0, T]$, т. е. $X(\cdot) \in Q(F)$. Тем самым теорема доказана.

Следствие 2. *При предположениях теоремы имеем*

$$O(\operatorname{conv} F) = Q(F) = Q(\operatorname{conv} F) = G(F) = G(\operatorname{conv} F).$$

3.4. Классическое решение.

Определение 10. *Многозначное отображение $X(\cdot)$ называется классическим решением дифференциального включения (5), если отображение $X(\cdot)$ непрерывно дифференцируемо по Хукухаре ($X(\cdot) \in DC_n^M[t_0, T]$), $D_hX(t) \in F(t, X(t))$ для всех $t \in [t_0, T]$.*

Обозначим множество всех классических решений дифференциального включения (5) через $KL(F)$.

Непосредственно из определений классического и обычных решений следует, что $KL(F) \subset O(F)$.

Теперь докажем следующую теорему существования классического решения.

Теорема 5. *Пусть многозначное отображение $F(\cdot) : \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{cc}(R^n)$ абсолютно непрерывно и $V^0 \in F(X^0)$.*

Тогда существует интервал $I = [-T, T]$ и непрерывно дифференцируемое отображение $X(\cdot)$, определенное на I, являющееся решением задачи

$$D_hX(t) \in F(X(t)),\ X_0 = X^0,\ D_hX(0) = V^0 \in F(X(0)). \tag{10}$$

Доказательство. Возьмем некоторый шар $S = S_r(X^0)$ с центром в X^0 радиуса r. Поскольку $F(\cdot)$ является непрерывным на S и имеет компактные значения, существует M такое, что $|F(X)| \leq M$ на S.

Положим $T = r/M$ и поставим в соответствие каждому целому n подразбиение $[0, T]$, определенное точками $t_n^i = iT/n$. Определим $X_n(t_n^0) = X^0$ и $V_n(t_n^0) = V^0$.

Предположим, что до $i = \nu - 1 < n$ известны $X_n(t_n^i)$ и $V_n(t_n^i)$. Для $i = \nu$ положим

$$X_n(t_n^\nu) = X_n(t_n^{\nu-1}) + \frac{T}{n} V_n(t_n^{\nu-1}) \tag{11}$$

и выберем $V_n(t_n^\nu)$ так, чтобы

$$h(V_n(t_n^{\nu-1}), V_n(t_n^\nu)) = \operatorname{dist}(V_n(t_n^{\nu-1}), F(X_n(t_n^\nu))). \tag{12}$$

Определим $X_n(\cdot)$ и $V_n(\cdot)$ на $[0, T]$, как многозначные ломаные отображения, значения которых в узлах t_n^i равны $X_n(t_n^i)$ и $V_n(t_n^i)$ соответственно.

Покажем, что последовательность $\{V_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon)$ и определим $\delta_1 = \delta/M$. Пусть t и t' взяты из интервала $|t - t'| < \delta_1/3$ и для каждого $n \geq 3T/\delta_1$ числа $i = i(n)$ и $j = j(n)$ будут такими, что $t_n^i \leq t < t_n^{i+1} < \ldots < t' \leq t_n^j$. Следовательно, $t_n^j - t_n^i \leq \dfrac{\delta_1}{3} + \dfrac{\delta_1}{3} + \dfrac{\delta_1}{3} = \delta_1$.

Тогда

$$h(V_n(t), V_n(t')) \leq h(V_n(t), V_n(t_n^{i+1})) +$$

$$+ \sum_{k=i+1}^{j-2} h(V_n(t_n^k), V_n(t_n^{k+1})) + h(V_n(t_n^{j-1}), V_n(t')).$$

Поскольку на $[t_n^i, t_n^{i+1}]$ и $[t_n^{j-1}, t_n^j]$ отображение $V_n(\cdot)$ является линейным, то

$$h(V_n(t), V_n(t')) \leq \frac{t_n^{i+1} - t}{t_n^{i+1} - t_n^i} h(V_n(t_n^i), V_n(t_n^{i+1})) \leq h(V_n(t_n^i), V_n(t_n^{i+1}))$$

и

$$h(V_n(t_n^{j-1}), V_n(t')) \leq h(V_n(t_n^j), V_n(t_n^{j-1})).$$

Это значит, что

$$h(V_n(t), V_n(t')) \leq \sum_{k=i+1}^{j} h(V_n(t_n^{k-1}), V_n(t_n^k)).$$

Вследствие того что для каждого k выполняются условия $h(V_n(t_n^{k-1}), V_n(t_n^k)) = \operatorname{dist}(V_n(t_n^k), F(X_n(t_n^k)))$ и $V_n(t_n^{k-1}) \in F(X_n(t_n^{k-1}))$, имеем

$$h(V_n(t_n^{k-1}), V_n(t_n^k)) \leq d(F(X_n(t_n^{k-1})), F(X_n(t_n^k))).$$

Из (11) следует, что

$$\sum_{k=i+1}^{j} h(X_n(t_n^{k-1}), X_n(t_n^k)) \le M \sum_{k=i+1}^{j} |t_n^{k+1} - t_n^k| \le M\delta_1 = \delta.$$

Тогда из абсолютной непрерывности $F(\cdot)$ получаем

$$h(V_n(t), V_n(t')) \le \varepsilon. \tag{13}$$

Эта оценка не зависит от n. Тем самым доказана равностепенная непрерывность последовательности $\{V_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$.

По теореме Асколи [25] существует подпоследовательность последовательности $\{V_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к непрерывному отображению $V_*(\cdot)$. Обозначим ее, по-прежнему, через $\{V_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$.

Определим $Y_*(\cdot)$, положив

$$Y_*(t) = X^0 + \int_0^t V_*(s)ds, \tag{14}$$

и покажем, что $Y_*(\cdot)$ является решением сформулированной задачи, т. е.

$$V_*(t) \in F(Y_*(t)). \tag{15}$$

Для этого докажем, что последовательность $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $Y_*(\cdot)$:

$$h(Y_*(t), X_n(t)) \le h\left(X^0 + \int_0^t V_*(s)ds, X^0 + \int_0^t D_h X_n(s)ds\right) \le$$

$$\le h\left(\int_0^t V_*(s)ds, \int_0^t D_h X_n(s)ds\right) \le \int_0^t h(V_*(s), D_h X_n(s))ds \le$$

$$\le \int_0^t h(V_*(s), V_n(s))ds + \int_0^t h(V_n(s), D_h X_n(s))ds.$$

Поскольку $V_n(\cdot)$ и $D_h X_n(\cdot)$ совпадают в точках t_n^i (где фактически $D_h X_n(\cdot)$ — только левая производная Хукухары), $D_h X_n(\cdot)$ является константой на каждом подынтервале, где $V_n(\cdot)$ является линейной. Очевидно, что интеграл от $h(V_n(s),\ D_h X_n(s))$ не больше $\dfrac{1}{2}(t_n^k - t_n^{k-1})^2 M$ на каждом $[t_n^{k-1}, t_n^k]$, т. е. не больше $\dfrac{MT^2}{2n}$ на $[0, T]$. Это доказывает равномерную сходимость последовательности многозначных отображений $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ к $Y(\cdot)$.

Пусть (t_n^{j-1}, t_n^j) — интервал, в котором содержится t. Тогда

$$\operatorname{dist}(V_*(t), F(Y_*(t))) \le h(V_*(t), V_*(t_n^j)) + h(V_*(t_n^j), V_n(t_n^j)) +$$

$$+ \operatorname{dist}(V_n(t_n^j), F(X_n(t_n^j))) + d(F(X_n(t_n^j)), F(Y_*(t_n^j))) +$$

$$+ d(F(Y_*(t_n^j)), F(Y_*(t))). \tag{16}$$

Так как $V_*(\cdot)$ непрерывно по t, $V_n(\cdot)$ сходится равномерно к $V_*(\cdot)$, $V_n(t_n^j)$ принадлежит $F(X_n(t_n^j))$, $X_n(\cdot)$ сходится равномерно к функции $Y_*(\cdot)$ и $F(\cdot)$ равномерно непрерывно на S, правую часть неравенства (16) можно сделать сколь угодно малой.

В силу того что при каждом t множество $F(Y_*(t))$ замкнуто, $V_*(t) \in F(Y_*(t))$, т. е. $Y_*(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемое решение задачи (10).

Теорема доказана.

Следующим из приводимых здесь результатов является теорема существования и непрерывной зависимости обычного решения от параметра.

Теорема 6. *Пусть правая часть системы (5) удовлетворяет условиям:*

1) отображение $F(\cdot,\cdot) : [t_0, T] \times \operatorname{conv}(R^n) \to \operatorname{cc}(R^n)$ *непрерывно по* (t, X) *и удовлетворяет условию Липшица по* X *с* $k(\cdot) \in L_1^n[t_0, T]$;

2) отображение $Y(\cdot)$ *абсолютно непрерывно на* $[t_0, T]$ *и*

$$\operatorname{dist}(D_h Y(t), F(t, Y(t))) \le \rho(t)$$

почти всюду на $[t_0, T]$, *где* $\rho(\cdot)$ *— суммируемая функция на* $[t_0, T]$;

3) для некоторого $X^0 \in \operatorname{conv}(R^n)$ *выполнено условие* $h(Y(t_0), X^0) \le \delta < b$.

Тогда существует обычное решение $X(\cdot)$ *задачи (5), определенное на* $[t_0, T]$, *такое, что:*

1) $X(t_0) = X^0$;

2) $h(X(t), Y(t)) \le \xi(t),\ t \in [t_0, T]$;

3) $h(D_h X(t), D_h Y(t)) \le k(t)\xi(t) + \rho(t)$ *почти всюду на* $[t_0, T]$, *где*

$$\xi(t) = \delta e^{m(t)} + \left| \int_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)} \rho(s) ds \right|, \quad m(t) = \left| \int_{t_0}^{t} k(s) ds \right|,\ t \in [t_0, T].$$

Доказательство. Построим последовательность Коши последовательных приближений:

$$X_0(t) = Y(t),\ t \in [t_0, T],$$

$$X_{i+1}(t) = X^0 + \int_{t_0}^{t} V_i(s) ds,\ t \in [t_0, T], \tag{17}$$

где

$$V_i(t) \in F(t, X_i(t)),\ t \in [t_0, T], \tag{18}$$

$$h(V_i(t), D_h X_i(t)) = \mathrm{dist}\,(D_h X_i(t), F(t, X_i(t))). \tag{19}$$

Существование отображения $V_i(\cdot)$, удовлетворяющего условиям (18) и (19), доказывается аналогично случаю многозначных отображений $F(\cdot,\cdot) : [t_0, T] \times R^n \to \mathrm{comp}\,(R^n)$ [23].

Оценим расстояние между $D_h X_{i+1}(\cdot)$ и $D_h X_i(\cdot)$:

$$\begin{aligned} h(D_h X_{i+1}(t), D_h X_i(t)) &= h(V_i(t), D_h X_i(t)) = \\ &= \mathrm{dist}\,(D_h X_i(t), F(t, X_i(t))) = \mathrm{dist}\,(V_{i-1}(t), F(t, X_i(t))) \le \\ &\le d(F(t, X_{i-1}(t)), F(t, X_i(t))) \le k(t) h(X_{i-1}(t), X_i(t)). \end{aligned} \tag{20}$$

Для первого шага индукции оценим расстояние между $D_h X_0(\cdot)$ и $D_h X_1(\cdot)$:

$$h(D_h X_0(t), D_h X_1(t)) = h(V_0(t), D_h Y(t)) = \mathrm{dist}\,(D_h Y(t), F(t, Y(t))) \le \rho(t).$$

Отсюда

$$h(X_1(t), Y(t)) \le \delta + \int\limits_{t_0}^{t} \rho(\tau) d\tau. \tag{21}$$

Из (20) и (21) получим

$$h(D_h X_{i+1}(t), D_h X_i(t)) \le k(t) \left\{ \frac{\delta [m(t)]^{i-1}}{(i-1)!} + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{[m(t) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} \rho(s) ds \right| \right\},$$

$$h(X_{i+1}(t), X_i(t)) \le \delta \frac{[m(t)]^i}{i!} + \left| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} \rho(s) ds \right|.$$

Теперь оценим расстояние между $X_l(\cdot)$ и $Y(\cdot)$, предварительно расписав его по правилу треугольника:

$$h(X_l(t),Y(t)) \le h(X_l(t),X_{l-1}(t)) + \ldots + h(X_1(t),Y(t)) \le$$

$$\le \delta \sum_{i=0}^{l-1} \frac{[m(t)]^i}{i!} + \left| \int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{l-1} \frac{[m(t)-m(s)]^i}{i!} \rho(s)ds \right| \le$$

$$\le \delta e^{m(t)} + \left| \int_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)} \rho(s)ds \right| = \xi(t), \;\; t \in [t_0,T]. \tag{22}$$

Аналогично

$$h(D_hX_l(t), D_hY(t)) \le k(t)\xi(t) + \rho(t), \;\; t \in [t_0,T]. \tag{23}$$

Полученные последовательности $\{X_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{D_hX_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ по обобщенной теореме Асколи сходятся к $X(\cdot)$ и $D_hX(\cdot)$.

Поскольку $\operatorname{dist}(D_hX_i(t), F(t,X_i(t))) \to 0$ и $D_hX_i(t) \to D_hX(t)$, $X_i(t) \to X(t)$, имеем

$$\operatorname{dist}(D_hX(t), F(t,X(t))) = 0,$$

откуда

$$D_hX(t) \in F(t,X(t)),$$

а из неравенств (22) и (23) следуют утверждения 2 и 3.

Теорема доказана.

Замечание 4. Пусть X^0 и Y^0 — два начальных множества и

$$h(X^0,Y^0) = \delta < b.$$

Тогда решению $Y(\cdot)$ такому, что $Y(t_0) = Y^0$, можно поставить в соответствие решение $X(\cdot)$ такое, что

$$X(t_0) = X^0, \;\; h(X(t),Y(t)) \le h(X^0,Y^0)e^{\int_{t_0}^{t} k(s)ds}, \;\; t \in [t_0,T].$$

Замечание 5. Так же, как и для случая обыкновенных дифференциальных включений, данная теорема справедлива, если отображение $F(\cdot,X)$ измеримо по t.

Замечание 6. В случае, когда $F(\cdot,\cdot) : [t_0,T] \times R^n \to \operatorname{conv}(R^n)$, получим теорему А. Ф. Филиппова [26] для обычных дифференциальных включений.

Теперь воспользуемся полученными результатами для доказательства теоремы релаксации для системы (5).

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы 4, а также $F(t,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $k(\cdot) \in L_1^n[t_0,T]$, т. е.*

$$h(F(t,X_1),F(t,X_2)) \le k(t)h(X_1,X_2)$$

и $X(\cdot) \in O(\mathrm{conv}\, F)$. Тогда существует последовательность $\{X_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится к $X(\cdot)$, и $X_k(\cdot) \in O(F)$, $\quad k=\overline{1,\infty}$.

Доказательство. По теореме 4 решение $X(\cdot)$ является также и квазирешением системы (5), т. е. существует последовательность абсолютно непрерывных многозначных отображений $\{Y_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} Y_k(t) = X(t), \quad t\in[t_0,T]$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k(t) = 0$ для почти всех $t\in[t_0,T]$,

где $\rho_k(t) = \mathrm{dist}\,(D_hY_k(t),F(t,Y_k(t)))$.

Согласно теореме 6 существуют абсолютно непрерывные функции $X_k(\cdot) \in O(F)$, $k=\overline{1,\infty}$, такие, что:

1) $X_k(t_0)=X_0$;

2) $h(X_k(t),Y_k(t)) \le h(X_k(t_0),Y_k(t_0))e^{\,m(t)} + \left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{m(t)-m(s)}\rho_k(s)ds\right|$,

где $m(t) = \left|\int\limits_{t_0}^{t} k(s)ds\right|$, $t\in[t_0,T]$, $k=\overline{1,\infty}$.

Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} h(X_k(t_0),Y_k(t_0)) = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k(t) = 0$ для почти всех $t\in[t_0,T]$, то $\lim\limits_{k\to\infty} h(X_k(t),Y_k(t)) = 0$ для всех $t\in[0,T]$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} X_k(t) = X(t)$ для всех $t\in[t_0,T]$.

Теорема доказана.

И в завершение докажем одно из важнейших свойств множества обычных решений — его компактность.

Теорема 8. *Пусть многозначное отображение $F(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $F(\cdot,X)$ измеримо для всех $X\in\mathrm{conv}\,(R^n)$ на $[t_0,T]$;

2) $F(t,\cdot)$ непрерывно для всех $t\in[t_0,T]$ на $\mathrm{conv}\,(R^n)$;

3) существует $l(\cdot)\in L_1[t_0,T]$ такая, что

$$d(F(t,X),0) \le l(t), \quad (t,X)\in[t_0,T]\times\mathrm{conv}\,(R^n);$$

4) для всех $(t,X)\in[t_0,T]\times\mathrm{conv}\,(R^n)$ множество $F(t,X)$ выпукло.

Тогда множество обычных решений дифференциального включения (5) компактно в пространстве $C^M[t_0,T]$.

Доказательство. Пусть $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность обычных решений системы (5), т. е. $D_hX_n(t)\in F(t,X_n(t))$ почти для всех $t\in[t_0,T]$.

Тогда для любых $t,\tau\in[t_0,T]$ таких, что $t>\tau$, имеем

$$X_n(t)\overset{h}{-}X_n(\tau) \in \int\limits_{\tau}^{t} F(\xi,X_n(\xi))d\xi.$$

Следовательно, для любых $t > \tau, t, \tau \in [t_0, T]$

$$h(X_n(t), X_n(\tau)) \leq \left| \int\limits_{\tau}^{t} l(s)ds \right|.$$

Тем самым последовательность $\{X_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной на $[t_0, T]$. Тогда по теореме Асколи [25] существует ее подпоследовательность $\{X_{n_k}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$, равномерно сходящаяся на $[t_0, T]$ к некоторому абсолютно непрерывному многозначному отображению $X(\cdot)$.

Из условий 2 и 4 для всех $t, \tau \in [t_0, T]$ таких, что $t > \tau$, получаем

$$X(t) \overset{h}{-} X(\tau) \in \lim_{k \to \infty} \sup \int\limits_{\tau}^{t} F(\xi, X_{n_k}(\xi))d\xi \subset$$

$$\subset \int\limits_{\tau}^{t} \lim_{k \to \infty} \sup F(\xi, X_{n_k}(\xi))d\xi \subset \int\limits_{\tau}^{t} F(\xi, X(\xi))d\xi.$$

Следовательно, $X(\cdot)$ является обобщенным решением системы (5) и в силу теоремы 2 имеем $D_h X(t) \in F(t, X(t))$ для почти всех $t \in [t_0, T]$, т. е. $X(\cdot) \in O(F)$.

Теорема доказана.

1. *Hukuhara M.* Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. — 1967. — № 10. — P. 205 – 223.
2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. — 1982. — **19**. — С. 127 – 130.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1986. — 104 с.
4. *Половинкин Е. С.* Элементы теории многозначных отображений. — М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1982. — 127 с.
5. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Equazioni differentiali con soluzioni a valore compatto convesso // Boll. Unione mat. ital. — 1969. — **2**, № 4-5. — P. 491 – 501.
6. *De Blasi F. S., Iervolino F.* Euler method for differential equations with set-valued solutions // Ibid. — 1971. — **4**, № 4. — P. 941 – 949.
7. *Kikuchi N.* On some fundamental theorem of contingent equations in connections with the control problems // Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A. — 1967. — **3**. — P. 177 – 201.
8. *Martelli M., Vignoli A.* On differentiability of multi-valued maps // Boll. Unione mat. ital. — 1974. — **4**, № 10. — P. 701 – 712.
9. *Brandao Lopes Pinto A. J., De Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Ibid. — 1970. — **4**. — P. 534 – 538.
10. *Kisielewicz M.* Description of a class of differential equations with set-valued solutions // Lincei-Rend. Sci. fis. mat. e nat. — 1975. — **58**. — P. 158 – 162.
11. *Kisielewicz M., Serafin B., Sosulski W.* Existence theorem for functional-differential equation with compact convex valued solutions // Demonstr. math. — 1975. — **13**, № 2. — P. 229 – 237.

12. *Kisielewicz M.* Method of averaging for differential equations with compact convex valued solutions // Rend. mat. — 1976. — **9**, № 3. — P. 397 – 408.

13. *Плотников В. А., Плотников А. В., Витюк А. Н.* Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.

14. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.

15. *Kaleva O.* Fuzzy differential equations // Fuzzy Sets and Systems. — 1987. — **24**, № 3. — P. 301 – 317.

16. *Kaleva O.* The Cauchy problem for fuzzy differential equations // Ibid. — 1990. — **35**. — P. 389 – 396.

17. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары и некоторые задачи управления. — Одесса, 1982. — 35 с. — Деп. в ВИНИТИ, № 2036-82.

18. *Плотников А. В.* Дифференциальные включения с производной Хукухары. — Одесса, 1987. — 43 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, № 989-Ук87.

19. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 1. — С. 121 – 125.

20. *Плотников А. В.* Исследование некоторых дифференциальных уравнений с многозначной правой частью: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Одесса, 1994.

21. *Dabrowska R., Janiak T.* Stability of functional-differential equations with compact convex valued solutions // Discuss. Math. — 1993. — № 13. — P. 87 – 92.

22. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. — 1965. — **12**, № 1. — P. 1 – 12.

23. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. — Springer-Verlag, 1984. — 348 p.

24. *Половинкин Е. С.* Теория многозначных отображений. — М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1983. — 108 с.

25. *Келли Дж. Л.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с.

26. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. — 1967. — № 3. — С. 16 – 26.

Получено 22.09.2006