УДК 517.9

МЕТОД ФАЕДО – ГАЛЬОРКІНА ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРАМИ ВОЛЬТЕРРИ

Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64

We consider the second order differential-operators equations with w_{λ_0}-pseudomonotone operators. The problem of existence of solutions for the Cauchy problem for the given equations by using Faedo – Galerkin method is investigated. Important a priory estimates have been obtained. An example that illustrates the result is given.

Рассмотрен класс дифференциально-операторных уравнений второго порядка с операторами w_{λ_0}-псевдомонотонного типа. С помощью метода Фаэдо – Галеркина исследована проблема существования решения задачи Коши для данных уравнений. Получены важные априорные оценки. Приведен пример, иллюстрирующий данный результат.

1. Вступ. Один із найважливіших підходів до вивчення нелінійних граничних задач, що описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними, полягає у зведенні даних об'єктів до операторних та диференціально-операторних рівнянь у банахових просторах. Для еволюційних рівнянь та включень першого порядку з нелінійними операторами λ-псевдомонотонного типу питання розв'язності вивчалось багатьма авторами [1 – 13]. У роботі [14], зокрема, розглядаються диференціально-операторні включення з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу. Для еволюційних рівнянь другого порядку дане питання вивчалось у роботах [15, 16] для лінійних та монотонних операторів. У даній роботі досліджується питання про розв'язність еволюційних рівнянь другого порядку з нелінійними немонотонними операторами шляхом зведення даних об'єктів до еволюційних рівнянь першого порядку з некоерцитивними операторами w_{λ_0}-псевдомонотонного типу.

2. Постановка задачі. Нехай H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, $\{V_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$ — ланцюжок гільбертових просторів: $\forall \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0$: $V_{\sigma_1} \subset V_{\sigma_2}$, причому вкладення неперервне та щільне, $V_0 = H$. Зауважимо, що згідно з лемою Ріса топологічно спряжений простір до H відносно білінійної форми $(\cdot,\cdot)$ ототожнимо із самим H. Таким чином, $V_{-\sigma} = V_\sigma^*$ — спряжений до V_σ простір відносно білінійної форми $(\cdot,\cdot)$ (детальніше див. [15, с. 29 – 30]). Нехай, далі, V — рефлексивний сепарабельний банахів простір, компактно та щільно вкладений у гільбертів простір H, V^* — топологічно спряжений до V простір відносно $(\cdot,\cdot)$. Припустимо, що для $\sigma \geq \sigma_0 > 0$ має місце такий ланцюжок вкладень:

$$V_\sigma \subset V \subset H \equiv H^* \subset V^* \subset V_\sigma^*,$$

причому вважаємо, що кожне з вкладень є компактним та щільним. Позначимо через S скінченний інтервал часу $[0,T]$ і покладемо

$$X = L_{p_0}(S;H) \cap L_{p_1}(S;V), \quad X_\sigma = L_{p_0}(S;H) \cap L_{p_1}(S;V_\sigma),$$

© Н. В. Задоянчук, П. О. Касьянов, 2007

$$X^* = L_{q_0}(S;H) + L_{q_1}(S;V^*), \quad X^*_\sigma = L_{q_0}(S;H) + L_{q_1}(S;V^*_\sigma),$$

$$Y = Y^* = L_2(S;H),$$

де $1 < p_1 \le p_0 < \infty, p_0 \ge 2, +\infty > q_1 \ge q_0 > 1$: $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{q_0} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{q_1} = 1$.

Простір $W = \{y \in X \,|\, y' \in X^*\}$ (відповідно $W_\sigma = \{y \in X \,|\, y' \in X^*_\sigma\}$) є банаховим простором відносно норми $\|y\|_W = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*}$ (відповідно $\|y\|_{W_\sigma} = \|y\|_X + \|y'\|_{X^*_\sigma}$), де y' — похідна від елемента $y \in X$ в сенсі простору скалярних розподілів $\mathcal{D}^*(S, V^*_\sigma) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(S); V^*_\sigma)$ (відповідно в сенсі $\mathcal{D}^*(S, V^*)$). Зауважимо, що простір X неперервно та щільно вкладений в Y, а W_σ компактно вкладений в Y, тобто норма $\|\cdot\|_Y$ є компактною відносно $\|\cdot\|_{W_\sigma}$ на W_σ та неперервною відносно $\|\cdot\|_X$ на X.

Для довільних $v \in X$ та $f \in X^*$ існують $f_1 \in L_{q_1}(S;V^*)$, $f_2 \in L_{q_0}(S;H)$ такі, що $f = f_1 + f_2$,

$$\langle f, v\rangle_X = \int_S \langle f_1(t), v(t)\rangle_V dt + \int_S (f_2(t), v(t))_H dt = \int_S (f(t), v(t)) dt = (f, v)_Y.$$

Тут $\langle\cdot,\cdot\rangle_V : V^* \times V \to \mathbb{R}$ — канонічне спарювання в V, що збігається на H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$.

Розглянемо задачу

$$\begin{aligned} &u'' + Au' + Bu = f, \\ &u(0) = a_0,\ u'(0) = a_1,\ u \in C(S;V),\ u' \in X, \end{aligned} \tag{1}$$

де $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ та $f \in X^*$ — довільні фіксовані елементи. Метою даної роботи є доведення розв'язності даної проблеми методом Фаедо–Гальоркіна.

3. Класи відображень.

Означення 1. *Оператор $A : X \to X^*$ називається λ_0-псевдомонотонним на W (на W_σ), якщо із довільної послідовності $\{y_n\}_{n\ge1} \subset W(W_\sigma)$ такої, що $y_n \to y$ слабко в X, $y'_n \to y'$ слабко в $X^*(X^*_\sigma)$, $Ay_n \to d$ слабко в X^* та*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n - y\rangle_X \le 0,$$

можна виділити таку підпослідовність $\{y_{n_k}\}_{k\ge1}$ послідовності $\{y_n\}_{n\ge1}$, що

$$\varliminf_{k\to\infty} \langle Ay_{n_k}, y_{n_k} - w\rangle_X \ge \langle Ay, y - w\rangle_X \quad \forall w \in X.$$

Зауважимо, що ідея переходу до підпослідовностей належить І. В. Скрипнику [3].

Означення 2. *Оператор $A : X \to X^*$ називається оператором з (X, W_σ)-напівобмеженою варіацією ((X, W_σ)-н.о.в.), якщо для будь-яких $R > 0$, $y_1, y_2 \in X$ таких, що $\|y_i\|_X \le R$, $i = 1, 2$, виконується нерівність*

$$\langle Ay_1, y_1 - y_2\rangle_X \ge \langle Ay_2, y_1 - y_2\rangle_X - C(R; \|y_1 - y_2\|'_{W_\sigma}), \tag{2}$$

де $C : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — *неперервна за другою змінною функція така, що* $t^{-1}C(r_1; tr_2) \to 0$ *при* $t \to +0$ $\forall r_1, r_2 \geq 0$, *а (напів)норма* $\|\cdot\|'_{W_\sigma}$ *є компактною відносно* $\|\cdot\|_{W_\sigma}$ *на* W_σ *і неперервною відносно* $\|\cdot\|_X$ *на* X.

Зауваження 1. Оператори з $(W; X)$-н.о.в. були вперше введені Ю. А. Дубінським в [4], а для багатозначних відображень — в роботах [5, 6].

Пропозиція 1 [7]. *Справедлива імплікація:*

„A — радіально неперервний оператор з $(X; W_\sigma)$-н.о.в” ⇒ „A — λ_0-псевдомонотонний на W_σ оператор”.

Лема 1. *Нехай* $A_1, A_2 : X \to X^*$ — *оператори з* $(X; W_\sigma)$-*н.о.в. Тоді їх сума* $\mathcal{A} : X \to X^*$ *є також оператором з* $(X; W_\sigma)$-*н.о.в.*

Доведення. Нехай для оператора $A_i : X \to X^*$, деякої функції $C_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, з означення 2 та (напів)норми $\|\cdot\|_i$, компактної відносно $\|\cdot\|_{W_\sigma}$ на W_σ і неперервної відносно $\|\cdot\|_X$ на X, виконується (2). Тоді візьмемо

$$\forall r, t \geq 0: \quad C_{\mathcal{A}}(r, t) = t\tilde{c}_1(r, t) + t\tilde{c}_2(r, t),$$

де для всіх $r, t \geq 0$

$$\tilde{c}_i(r, t) := \begin{cases} \sup\limits_{s \in (0, t]} \dfrac{C_i(r, s)}{s} & \text{при} \quad t > 0, \\ 0, & \text{при} \quad t = 0, \end{cases} \qquad i = 1, 2.$$

Зауваживши, що для $r \geq 0$ функція $\mathbb{R}_+ \ni t \to \tilde{c}_i(r, t) \in \mathbb{R}$ є монотонно неспадною, неперервною, та взявши

$$\|\cdot\| := \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2,$$

отримаємо, що для всіх $R > 0$ та $y_1, y_2 \in X$ таких, що $\|y_i\|_X \leq R$, $i = 1, 2$, виконується нерівність

$$\langle \mathcal{A}y_1, y_1 - y_2 \rangle_X \geq \langle \mathcal{A}y_2, y_1 - y_2 \rangle_X - C_{\mathcal{A}}(R; \|y_1 - y_2\|).$$

Функція $C_{\mathcal{A}}$, очевидно, задовольняє всі властивості з означення 2, (напів)норма $\|\cdot\|$ є компактною відносно $\|\cdot\|_{W_\sigma}$ на W_σ і неперервною відносно $\|\cdot\|_X$ на X.

Лему доведено.

Означення 3. *Оператор* $A : X \to X^*$ *називається коерцитивним, якщо існує визначена на* $[0, \infty)$ *дійсна функція* γ *з* $\lim\limits_{s \to \infty} \gamma(s) = +\infty$ *така, що*

$$\langle Au, u \rangle_X \geq \gamma(\|u\|_X)\|u\|_X \quad \forall u \in X.$$

Означення 4. *Оператор* $A : X \to X^*$ *називається монотонним, якщо*

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Означення 5. *Оператор* $A : X \to X^*$ *називається оператором типу Вольтерри, якщо для довільного* $t \in S$ *із рівності* $u(s) = v(s)$ *для майже всіх* $s \in [0, t]$ $(u, v \in X)$, *випливає, що* $(Au)(s) = (Av)(s)$ *для майже всіх* $s \in [0, t]$.

Означення 6. *Оператор $A : X \to X^*$ називається радіально неперервним, якщо для будь-яких фіксованих $u, v \in X$ дійсна функція $s \to \langle A(u+sv), v\rangle_X$ є неперервною на* $[0, 1]$.

Означення 7. *Оператор $A : X \to X^*$ називається демінеперервним, якщо з $u_n \to u$ в X випливає, що Au_n слабко збігається до Au в X^*.*

Наведемо приклади λ_0-псевдомонотонних на W операторів.

Означення 8. *Оператор $A : X \to X^*$ називається оператором варіаційного числення на W_σ (на W), якщо він має вигляд $A(y) = \bar{A}(y, y)$, де відображення $\bar{A} : X \times X \to X^*$ характеризується такими властивостями:*

а) для будь-якого $w \in W_\sigma$ $\bar{A}(w, \cdot)$ — радіально неперервний оператор з (X, W_σ)-н.о.в. (*відповідно (X, W)-н.о.в.*);

б) для будь-якого фіксованого $w \in W_\sigma$ відображення $W_\sigma \ni y \longmapsto \bar{A}(y, w) \in X^*$ є обмеженим;

в) з того, що $y_n \to y$ слабко в W_σ (в W) і $\langle \bar{A}(y_n, y_n) - \bar{A}(y_n, y), y_n - y\rangle_X \to 0$, випливає існування такої підпослідовності $\{y_{n_k}\}$, що для будь-якого $w \in W_\sigma$ $\bar{A}(y_{n_k}, w) \to \bar{A}(y, w)$ слабко в X^*;

г) якщо $y_n \to y$ слабко в W_σ (в W) і $\bar{A}(y_n, w) \to d(w)$ слабко в X^* $\forall \omega \in X$, то знайдеться така підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, для якої $\langle \bar{A}(y_{n_k}, w), y_{n_k}\rangle \to \langle d(w), y\rangle_X$ $\forall \omega \in X$.

Пропозиція 2 [7]. *Нехай $A : X \to X^*$— оператор варіаційного числення на W_σ* (*на* W). *Тоді він λ_0-псевдомонотонний на W_σ* (*на* W).

Пропозиція 3 [7]. *Нехай $A_1, A_2 : X \to X^*$ — оператори варіаційного числення на W_σ* (*на* W). *Тоді $A = A_1 + A_2$ є оператором варіаційного числення на W_σ* (*на* W).

Лема 2. *Нехай $A_1 : X \to X^*$ — радіально неперервний оператор з $(X; W_\sigma)$-н.о.в., $A_2 : X \to X^*$ задовольняє умови:*

1) оператор $A_2 : W_\sigma \to X^*$ є обмеженим;

2) якщо $y_n \to y$ слабко в W_σ, $y_n \to y$ $*$-слабко в $L_\infty(S; H)$ і $\langle A_2(y_n) - A_2(y), y_n - y\rangle_X \to \to 0$, то знайдеться така підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, для якої $A_2(y_{nk}) \to A_2(y)$ слабко в X^*;

3) якщо $y_n \to y$ слабко в W_σ, $y_n \to y$ $*$-слабко в $L_\infty(S; H)$ і $A_2(y_n) \to d_2$ слабко в X^*, то знайдеться така підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, для якої $\langle A_2(y_n)_k, y_{nk}\rangle_X \to \langle d_2, y\rangle_X \to 0$.

Тоді $A = A_1 + A_2$ ($Ay = \bar{A}(y, y) = A_1(y) + A_2(y)$, $A(u, v) = A_1(u) + A_2(v)$) є оператором варіаційного числення на W_σ.

Доведення. Встановимо виконання властивості а). Для кожного $v \in W_\sigma$ $\bar{A}(v, \cdot) : X \to \to X^*$ — радіально неперервний оператор з $(X; W_\sigma)$-н.о.в. Радіальна неперервність — наслідок такої ж властивості для A_1. Далі, $\forall y_1, y_2 \in X$: $\|y_1\|_X \le R$, $\|y_2\|_X \le R$,

$$\langle \bar{A}(v, y_1) - \bar{A}(v, y_2), y_1 - y_2\rangle_X = \langle (A_1(y_1) - A_2(v)) - (A_1(y_2) - A_2(v)), y_1 - y_2\rangle_X =$$

$$= \langle A_1(y_1) - A_1(y_2), y_1 - y_2\rangle_X \ge -C(R, \|y_1 - y_2\|'_{W_\sigma}).$$

Властивість б) є очевидною.

Доведемо властивість в). Нехай $y_n \to y$ слабко в W_σ, $y_n \to y$ $*$-слабко в $L_\infty(S; H)$ та

$$0 \leftarrow \langle \bar{A}(y_n, y_n) - \bar{A}(y_n, y), y_n - y\rangle_X = \langle A_2(y_n) - A_2(y), y_n - y\rangle_X.$$

Тоді за умовою 2 для деякої підпослідовності $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ $\bar{A}(y_m, v) \to \bar{A}(y, v)$ слабко в X^* $\forall v \in W_\sigma$.

Покажемо виконання властивості г). Нехай $y_n \to y$ слабко в W_σ, $\bar{A}(y_n, \omega) \to d(\omega)$ слабко в X^* при кожному $\omega \in W_\sigma$, тобто $\bar{A}(y_n, \omega) = A_1(\omega) + A_2(y_n)$ і $A_2(y_n) \to \tilde{d}(\omega)$ слабко в X^*, де $\tilde{d}(\omega) = d(\omega) - A_1(\omega)$. Але тоді на підставі умови 3 існує підпослідовність $\{y_m\} \subset \{y_n\}$ така, що

$$\langle A_2(y_m), y_m \rangle_X \to \langle \tilde{d}(\omega), y \rangle_X = \langle d(\omega) - A_1(\omega), y \rangle_X$$

або

$$\langle \bar{A}(y_m, \omega), y_m \rangle_X = \langle A_1(\omega) + A_2(y_m), y_m \rangle_X \to \langle d(\omega), y \rangle_X.$$

Лему доведено.

Наступне твердження є безпосереднім наслідком леми 2.

Лема 3. *Нехай $A_1 : X \to X^*$ взято з леми 2, $A_2 : Y \to Y^*$ — демінеперервний оператор, обмежений із W_σ в X^* та простір W_σ компактно вкладений в Y. Тоді оператор $A = A_1 + A_2$ є оператором варіаційного числення.*

Доведення. Для оператора $A_2 : Y \to Y^*$ перевіримо виконання умов леми 2.

1. Оператор $A_2 : W_\sigma \to X^*$ є обмеженим за умовою.

2. Нехай $y_n \to y$ слабко в W_σ, тоді $y_n \to y$ сильно в Y, бо W_σ компактно вкладений в Y, $y_n \to y$ $*$-слабко в $L_\infty(S; H)$. Оскільки оператор $A_2 : Y \to Y^*$ є демінеперервним, то $A_2(y_n) \to A_2(y)$ слабко в Y^* і виконується $\langle A_2(y_n) - A_2(y), y_n - y \rangle_X \to 0$. Тому знайдеться така підпослідовність $\{y_{n_k}\}$, для якої $A_2(y_{n_k}) \to A_2(y)$ слабко в X^*.

Умова 3 випливає з п. 2.

Отже, за лемою 2 оператор $A = A_1 + A_2$ ($Ay = \bar{A}(y, y) = A_1(y) + A_2(y)$, $A(u, v) = A_1(u) + A_2(v)$) є оператором варіаційного числення на W_σ.

Лему доведено.

4. Метод Фаедо – Гальоркіна. Нехай $\{h_i\}_{i \geq 1}$ — повна система лінійно незалежних елементів із V_σ для деякого $\sigma \geq \sigma_0$ і H_n — лінійна оболонка множини $\{h_i\}_{i=1}^n$, наділена скалярним добутком, індукованим із H. Згідно з попередніми міркуваннями, спряжений до H_n простір H_n^* ототожнений із самим H_n; $X_n := L_{p_0}(S; H_n)$, $X_n^* = L_{q_0}(S; H_n)$ — спряжений до X_n простір відносно білінійної форми $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_n} = \langle \cdot, \cdot \rangle_X \Big|_{X_n^* \times X_n}$, $W_n := \{y \in X_n | y' \in X_n^*\}$, де похідну y' від елемента $y \in X$ розуміємо в сенсі простору розподілів $\mathcal{D}^*(S, H_n)$.

Нехай для довільного $n \geq 1$ $I_n \in \mathcal{L}(X_n; X)$ — канонічне вкладення X_n в X (тобто $I_n x = x$ $\forall x \in X_n$), I_n^* — спряжений оператор до I_n.

Позначимо через P_n оператор ортогонального проектування з H в H_n. Припустимо, що даний оператор задовольняє умови

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}(H;H)} \leq 1, \quad \|P_n\|_{\mathcal{L}(V_\sigma;V_\sigma)} \leq 1, \quad \|P_n\|_{\mathcal{L}(V_\sigma^*;V_\sigma^*)} \leq 1. \tag{3}$$

Зауважимо, що в якості повної системи векторів $\{h_j\}_{j \geq 1}$, що задовольняє (3), можемо взяти так званий „спеціальний” базис для пари $(V_\sigma; H)$ (детальніше див. [11, 12, 14]). Зауважимо також, що для всіх $n \geq 1$ та $f \in X^*$ $(I_n^* f)(t) = P_n f(t)$ для майже всіх $t \in S$.

Розв'язки задачі (1) будемо „наближати" розв'язками задачі

$$u_n'' + A_n u_n' + B_n u_n = f_n,$$
$$u_n(0) = a_{0n}, \quad u_n'(0) = a_{1n}, \tag{4}$$
$$u_n \in C(S; H_n), \quad u_n' \in X_n,$$

де $A_n := I_n^* A I_n : X_n \to X_n^*$, $B_n := I_n^* B I_n : X \to X^*$, $f_n := I_n^* f \in X_n^*$, $\{a_{0n}\}_{n\geq 1}$, $a_{0n} \in H_n$ — довільна послідовність, що збігається до a_0 в V; $\{a_{1n}\}_{n\geq 1}$: $a_{1n} \in$ $\in H_n$ — довільна послідовність, що збігається до a_1 в H.

5. Основний результат. Наступна теорема обґрунтовує питання розв'язності задачі (1).

Теорема 1. *Нехай $\lambda_A \geq 0$ — фіксоване, $I : X \to X^*$ — канонічне вкладення X в X^*. Припустимо, що $A + \lambda_A I : X \to X^*$ — коерцитивний, радіально неперервний, обмежений оператор Вольтерри з (X, W_σ)-н.о.в. такий, що $A : C(S; V_\sigma) \to X^*$ — демінеперервний. Нехай, далі, $B : Y \to Y^*$ — неперервний оператор Вольтерри, що задовольняє умову*

$$\exists c_1, c_2 \geq 0 : \quad \|By\|_{Y^*} \leq c_1 \|y\|_Y + c_2 \quad \forall y \in Y.$$

Тоді для довільних $a_0 \in V$, $a_1 \in H$ та $f \in X^*$ існує принаймні один розв'язок задачі (1) $u \in X$, причому $u' \in W$ та знайдеться така підпослідовність $\{u_{n_k}\}$ послідовності $\{u_n\}_{n\geq 1}$, для якої виконуються наступні властивості:

$$u_{nk}'' \to u'' \text{ слабко в } X^*, \quad u_{nk}' \to u' \text{ слабко в } X, \quad u_{nk}' \to u' \text{ в } Y,$$

$$u_{nk} \to u \text{ в } C(S; H) \quad \text{та} \quad u_{nk} \to u \text{ слабко в } X,$$

де $\{u_n\}_{n\geq 1}$ — послідовність розв'язків (4).

Зауваження 2. Рівняння $u'' + Au' + Bu = f$ розуміємо як рівняння у просторі $\mathcal{D}^*(S; V^*)$. Якщо $u \in C(S; V)$ з $u' \in X$ задовольняє це рівняння, то $u'' = f - Au' - Bu \in X^*$. Це означає, що $u' \in W \subset C(S; H)$. Звідси випливає виконання умов $u'(0) = a_1 \in H$ та $u' \in W$.

Доведення. По аналогії з [15] (теорема VII.1.1) зведемо еволюційне рівняння з (1) до рівняння першого порядку. Нехай $R : X \to X(Y \to Y,\, C(S; V_\sigma) \to C^1(S; V_\sigma))$ — оператор Вольтерри, визначений співвідношенням

$$(Rv)(t) = a_0 + \int_0^t v(s)ds \qquad \forall v \in X \quad \forall t \in S.$$

R є ліпшиць-неперервним оператором з X в X (з Y в Y, з $C(S; V_\sigma)$ в $C(S; V_\sigma)$). Якщо u — розв'язок задачі (1): $u' \in W$, то $v = u'$ буде розв'язком задачі

$$v' + (A + B \circ R)v = f,$$
$$v(0) = a_1,\ v \in W. \tag{5}$$

Навпаки, якщо v — розв'язок задачі (5), то $u = Rv$ — розв'язок задачі (1) такий, що $u' \in W \subset X$.

Для деякого фіксованого $\lambda \geq \lambda_A$ розглянемо оператор Вольтерри $\mathcal{A} := \lambda I + A + B \circ \circ R : X \to X^*$ ($I : X \to X \subset X^*$ — тотожне відображення). По аналогії із доведенням наслідку 5.2.2 [5], застосувавши замість теореми 5.2.2 з [5] теорему 1 із [7], на підставі пропозиції 1 достатньо перевірити такі умови:

α_1) $\mathcal{A} : X \to X^*$ — радіально неперервний оператор з $(X; W_\sigma)$-н.о.в.;

α_2) оператор $\mathcal{A} : C(S; V_\sigma) \to X^*$ є демінеперервним;

α_3) оператор $\mathcal{A} : X \to X^*$ є коерцитивним.

Перевіримо ці умови.

Щоб перевірити умову α_1), доведемо допоміжне твердження.

Пропозиція 4. *Нехай $B : Y \to Y^*$ — неперервний оператор. Тоді $(B \circ R) : X \to X^*$ — оператор з (X, W_σ)-н.о.в.*

Доведення. Побудуємо функцію $C(R, t)$. Нехай для всіх $R \geq 0$ та $t \geq 0$

$$C(R,t) = t \sup_{\substack{z_1,\, z_2 \,\in\, X \,:\, \|z_i\|_X \,\leq\, R, \\ \|z_1 - z_2\|_Y \,\leq\, t,\ i\,=\,1,2}} \|B(Rz_1) - B(Rz_2)\|_{Y^*} =: tc(R,t).$$

Перевіримо, що дане відображення означене коректно, тобто

$$\forall R,\ t \geq 0 \ :\ c(R,t) < +\infty. \tag{6}$$

Нехай це не так. Тоді для деяких $R > 0$ та $t > 0$ $C(R,t) = +\infty$. Це означає, що існують послідовності $\{z_i^n\}_{n\geq 1} \subset X$, $i = 1, 2$, такі, що $\|z_i^n\|_X \leq R$, $\|z_1^n - z_2^n\|_Y \leq t$ для всіх $n \geq 1$ та $\|B(Rz_1^n) - B(Rz_2^n)\|_{Y^*} \to +\infty$ при $n \to \infty$. Із неперервності вкладення $X \subset X_\sigma^*$ та із глобальної ліпшицевості оператора $R : X \to X$ випливає обмеженість у W_σ послідовностей $\{Rz_1^n\}_{n\geq 1}$ та $\{Rz_2^n\}_{n\geq 1}$, а отже, із компактності вкладення W_σ в Y — і передкомпактність даних послідовностей в Y.

Таким чином, можна виділити такі підпослідовності $\{z_i^m\}_{m\geq 1}$ послідовностей $\{z_i^n\}_{n\geq 1}$, $i = 1, 2$, що

$$Rz_i^m \to \xi_i \text{ в } Y \quad \text{та} \quad B(Rz_i^m) \to B(\xi_i) \text{ в } Y^*, \quad i = 1, 2,$$

для деяких $\xi_i \in Y$. Отже,

$$\|B(Rz_1^m) - B(Rz_2^m)\|_{Y^*} \to \|B(\xi_1) - B(\xi_2)\|_{Y^*} < +\infty.$$

Коректність визначення функції C в сенсі (6) перевірено.

Зауважимо, що для всіх $R \geq 0$ та $t \geq 0$ $c(R, 0) \equiv c(0, t) \equiv 0$.

Виберемо компактну відносно $\|\cdot\|_{W_\sigma}$ на W_σ та неперервну відносно $\|\cdot\|_X$ на X норму $\|\cdot\|'_{W_\sigma} := \|\cdot\|_Y$. Зауважимо, що для всіх $R \geq 0$ та довільних $y_1, y_2 \in X$ таких, що $\|y_i\|_X \leq$

$\leq R, i = 1, 2,$

$$\langle B(Ry_1) - B(Ry_2), y_1 - y_2 \rangle_X = \langle B(Ry_1) - B(Ry_2), y_1 - y_2 \rangle_Y \geq$$

$$\geq -\|B(Ry_1) - B(Ry_2)\|_{Y^*} \|y_1 - y_2\|_Y \geq$$

$$\geq - \sup_{\substack{z_1, z_2 \in X : \|z_i\|_X \leq R, \\ \|z_1 - z_2\|_Y \leq t, i = 1, 2}} \|B(Rz_1) - B(Rz_2)\|_{Y^*} \cdot \|y_1 - y_2\|_Y = -C(R, \|y_1 - y_2\|_Y).$$

Таким чином, для завершення доведення даної пропозиції залишилось довести, що:

1) $\dfrac{C(R,t)}{t} =: c(R,t) \to 0$ при $t \to 0+$;

2) $\forall R \geq 0$ функція $[0, +\infty) \ni t \to C(R,t)$ є неперервною.

1. Перевіримо, що для всіх $R > 0$ $c(R,t) \to 0$ при $t \to 0+$. Для цього застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що існують $\varepsilon > 0$, $t_n \searrow 0+$, $z_1^n \in X$ та $z_2^n \in X$ такі, що для всіх $i = 1, 2$ та $n \geq 1$

$$\|z_i^n\|_X \leq R, \quad \|z_1^n - z_2^n\|_Y \leq t_n, \quad \|B(Rz_1^n) - B(Rz_2^n)\|_{Y^*} \geq \varepsilon.$$

Із неперервності вкладення $X \subset X_\sigma^*$ та із глобальної ліпшицевості оператора $R : X \to X$ випливає обмеженість в W_σ послідовностей $\{Rz_1^n\}_{n\geq 1}$ та $\{Rz_2^n\}_{n\geq 1}$, а отже, із компактності вкладення W_σ в Y — і передкомпактність даних послідовностей в Y. Таким чином, знайдуться такі підпослідовності $\{z_i^m\}_{m\geq 1}$ послідовностей $\{z_i^n\}_{n\geq 1}$, $i = 1, 2$, що

$$Rz_i^m \to \xi_i \text{ в } Y \quad \text{та} \quad B(Rz_i^m) \to B(\xi_i) \text{ в } Y^*,$$

для деяких $\xi_i \in Y$. При цьому із глобальної ліпшицевості оператора $R : Y \to Y$ зі сталою Ліпшиця $K > 0$ випливає

$$\|\xi_1 - \xi_2\|_Y \leftarrow \|Rz_1^m - Rz_2^m\|_Y \leq K\|z_1^m - z_2^m\|_Y \leq Kt_m \to 0$$

та $\xi_1 = \xi_2 =: \xi$. Із неперервності оператора $B : Y \to Y^*$ маємо, що при великих $m \geq 1$

$$0 = \|B(\xi_1) - B(\xi_2)\|_{Y^*} \leftarrow \|B(Rz_1^m) - B(Rz_2^m)\|_{Y^*} \geq \varepsilon > 0.$$

Прийшли до суперечності.

2. Тепер перевіримо, що для будь-якого $R \geq 0$ функція $[0, +\infty) \ni t \to C(R,t)$ є неперервною. Для цього досить перевірити неперервність $[0, +\infty) \ni t \to c(R,t)$.

Випадок $t = 0$ випливає з попереднього пункту. Тому вважатимемо, що $t > 0$. Для перевірки застосуємо метод від супротивного. Нехай існують такі $R > 0$, $t_0 > 0$, $t_n \to t_0$ при $n \to +\infty$ та $\varepsilon^* > 0$, що

$$|c(R, t_n) - c(R, t_0)| \geq \varepsilon^* \quad \forall n \geq 1. \tag{7}$$

Не втрачаючи загальності, вважаємо, що або $t_n \to t_0$ знизу, або $t_n \to t_0$ зверху при $n \to +\infty$.

2.1. Нехай $t_n \to t_0$ зверху при $n \to \infty$. Із вигляду функції $c(R,t)$ бачимо, що для всіх $R \geq 0$ та $t_1 \geq t_2 > 0$ $c(R,t_1) \geq c(R,t_2)$. Тому з (7) випливає

$$\forall n \geq 1 \ : \ c(R,t_n) \geq \varepsilon^* + c(R,t_0).$$

А це означає, що для кожних $n \geq 1$ та $i = 1,2$ існують $z_1^n \in X$ та $z_2^n \in X$ такі, що $\|z_i^n\|_X \leq R$, $\|z_1^n - z_2^n\|_Y \leq t_n$ та

$$\|B(Rz_1^n) - B(Rz_2^n)\|_{Y^*} \geq \frac{\varepsilon^*}{2} + c(R,t_0). \tag{8}$$

Із неперервності вкладення $X \subset X_\sigma^*$ та із глобальної ліпшицевості оператора $R : X \to X$ випливає обмеженість в W_σ послідовностей $\{Rz_1^n\}_{n\geq 1}$ та $\{Rz_2^n\}_{n\geq 1}$, а отже, із компактності вкладення W_σ в Y — і передкомпактність даних послідовностей в Y. Таким чином, існують такі підпослідовності $\{z_i^m\}_{m\geq 1}$ послідовностей $\{z_i^n\}_{n\geq 1}$, $i = 1,2$, що

$$Rz_i^m \to \xi_i \text{ в } Y \quad \text{та} \quad B(Rz_i^m) \to B(\xi_i) \text{ в } Y^*$$

для деяких $\xi_i \in Y$. Більш того, оскільки простори X, X_σ, X^*, X_σ^*, Y, Y^* є рефлексивними та сепарабельними, то, не втрачаючи загальності, можемо вважати, що

$$z_i^m \to \zeta_i \text{ слабко в } X, \ z_i^m \to \zeta_i \text{ слабко в } Y, \ \|\zeta_i\|_X \leq R, \ \|\zeta_1 - \zeta_2\|_Y \leq t_0 \text{ та } R\zeta_i = \xi_i.$$

Із неперервності оператора $B : Y \to Y^*$ випливає, що, перейшовши до границі в (8) при $m \to +\infty$, отримаємо

$$c(R,t_0) \geq \|B(R\zeta_1) - B(R\zeta_2)\|_{Y^*} \geq \frac{\varepsilon^*}{2} + c(R,t_0).$$

Прийшли до суперечності.

2.2. Тепер розглянемо випадок, коли $t_n \to t_0$ знизу при $n \to \infty$. Із (7) випливає

$$c(R,t_n) + \varepsilon^* \leq c(R,t_0) \leq \|B(Rz_1) - B(Rz_2)\|_{Y^*} + \frac{\varepsilon^*}{2},$$

де $z_i \in X$ такі, що $\|z_i\|_X \leq R$ та $\|z_1 - z_2\|_Y \leq t_0$. Нехай для довільних $n \geq 1$ та $i = 1,2$ $z_i^n := \dfrac{t_n}{t_0} z_i \to z_i$ в X (Y, W_σ) при $n \to \infty$, $\|z_i^n\|_X \leq R$, $\|z_1^n - z_2^n\|_Y \leq t_n$ та $Rz_i^n \to Rz_i$ в Y при $n \to \infty$, $i = 1,2$. Отже,

$$\|B(Rz_1) - B(Rz_2)\|_{Y^*} + \frac{\varepsilon^*}{2} \leftarrow \|B(Rz_1^n) - B(Rz_2^n)\|_{Y^*} + \frac{\varepsilon^*}{2} \leq$$

$$\leq c(R,t_n) + \frac{\varepsilon^*}{2} \leq c(R,t_0) - \frac{\varepsilon^*}{2} \leq \|B(Rz_1) - B(Rz_2)\|_{Y^*}.$$

Знову отримали суперечність. Отже, функція $C(R,t) = tc(R,t)$ є неперервною по $t \in \mathbb{R}_+$ для кожного $R \geq 0$.

Пропозицію доведено.

α_1) На підставі леми 1, пропозиції 4 та монотонності оператора $\lambda I : X \to X^*$ випливає $(X; W_\sigma)$-н.о.в. оператора $\mathcal{A} : X \to X^*$.

Радіальна неперервність оператора $\mathcal{A} : X \to X^*$, очевидно, виконується.

α_2) Із неперервності вкладень $C(S; V_\sigma) \subset X \subset X^*$ випливає демінеперервність $\lambda I : C(S; V_\sigma) \to X^*$. Демінеперервність $B \circ R : C(S; V_\sigma) \to X^*$ випливає з неперервності $R : C(S; V_\sigma) \to Y$, неперервності $B : Y \to Y^*$ та неперервності вкладення Y^* в X^*. Таким чином, маємо демінеперервність $\mathcal{A} : C(S; V_\sigma) \to X^*$.

α_3) Завдяки коерцитивності оператора $A + \lambda_A I : X \to X^*$ досить довести, що для $\lambda_B = c_1 c_3 + 1 > 0$ (c_3 — константа Ліпшиця для оператора $R : Y \to Y$) виконується наступне:

$$\varliminf_{\|y\|_X \to +\infty} \frac{\langle (\lambda_B I + B \circ R) y, y \rangle_Y}{\|y\|_X} > -\infty. \tag{9}$$

Дійсно, для всіх $y \in X \subset Y$

$$\frac{\langle (\lambda_B I + B \circ R) y, y \rangle_Y}{\|y\|_X} \geq \frac{\lambda_B \|y\|_Y^2 - \|B(Ry)\|_{Y^*} \|y\|_Y}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_B \|y\|_Y^2 - c_2 \|y\|_Y - c_1 \|Ry\|_Y \|y\|_Y}{\|y\|_X} \geq \frac{\|y\|_Y^2 - (c_2 + c_1 \|R\bar{0}\|_Y) \|y\|_Y}{\|y\|_X} \geq$$

$$\geq -(c_2 + c_1 \|R\bar{0}\|_Y) c_4 > -\infty,$$

де $c_4 > 0$ така, що $\| \cdot \|_Y \leq c_4 \| \cdot \|_X$.

Таким чином, оператор $\mathcal{A} = \lambda_A I + A + \lambda_B I + B \circ R : X \to X^*$ задовольняє умови $\alpha_1) - \alpha_3$).

Теорему доведено.

6. Приклад. Нехай Ω із $\mathbb{R}^n$ — обмежена область з регулярною границею $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times (0; T)$, $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0; T)$.

$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що задовольняє умову росту [17]:

$$\text{для деяких } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad |\Phi(t)| \leq c_1 |t| + c_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Для довільного $f \in X^* = L_2(S; L_2(\Omega)) + L_q(S; W^{-1,q}(\Omega) + L_2(\Omega))$ розглянемо задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x_i \, \partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x_i \, \partial t} \right) + \\
+ \left| \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \Phi(y(x,t)) = f(x,t) \qquad \text{майже скрізь на } Q, \\
y(x,0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \qquad \text{майже скрізь на } \Omega, \\
y(x,t) = 0 \qquad \text{майже скрізь на } \partial\Omega.
\end{gathered} \tag{10}$$

В якості оператора A візьмемо $(Au)(t) = A(u(t))$:

$$A(\varphi) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) + |\varphi|^{p-2}\varphi \qquad \forall\varphi \in C_0^2(\bar{\Omega})$$

(див. [18], гл. 2.9.5), а в якості оператора B — $(Bu)(t) = B(u(t))$:

$$B(\varphi) = \Phi(\varphi) \qquad \forall\varphi \in C(\bar{\Omega}).$$

Покладемо $H = L_2(\Omega)$, $V = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $V_\sigma := H_0^\sigma(\Omega) = W_0^{\sigma,2}(\Omega)$ $\forall\sigma \geq 0$ і розглянемо

$$X = L_p(S;V) \cap L_2(S;H), \quad X_\sigma = L_p(S;V_\sigma) \cap L_2(S;H),$$

$$X^* = L^q(S;V^*) + L_2(S;H), \quad X_\sigma^* = L_2(S;H) + L_q(S;V_\sigma^*),$$

$$Y = L_2(S;H).$$

Побудуємо „розширення” для операторів A та B і перевіримо, що оператори $A : X \to X^*$ і $B : Y \to Y^*$ задовольняють всі умови теореми 1.

Оператор A. Нехай Y — деякий банахів простір із нормою $\|\cdot\|_Y$, Y^* — спряжений до Y простір. Зауважимо, що V — рефлексивний банахів простір із нормою $\|\cdot\|_V$. $\langle\cdot,\cdot\rangle_V : V^* \times V \to \mathbb{R}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_Y : Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ — канонічні форми.

Означення 9. *Енергетичним розширенням оператора E (з природною областю визначення $M(E)$, областю визначення $D(E)$ і областю значень $R(E)$) будемо називати оператор вигляду*

$$A = L^* A_0 L : V \to V^*,$$

якщо виконано наступні умови:

a) $A_0 : Y \to Y^*$ — демінеперервне відображення;

b) $L : V \to V^*$ — лінійне відображення, таке, що

$$\|Lu\|_Y = \|u\|_V \quad \forall u \in V;$$

c) V щільно і неперервно вкладений в H; далі, $D(E) \subset V$, $R(E) \subset V^*$ і має місце рівність

$$Au = Eu \quad \forall u \in D(E)$$

(як рівність в V^*);

d) $\{u | u \in M(E) \cap V, Au \in V^*\} = D(E)$.

Побудуємо енергетичне розширення для оператора $A + I$. Нехай

$$(A+I)u = Eu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(\omega) + a_{n+1}(\omega) + a_{n+2}(\omega) \quad \forall u \in M(E) = C^2(\bar{\Omega})$$

з областю визначення $D(E) = C_0^2(\overline{\Omega})$. Тут $\omega = \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, u\right\}$, а функції a_i, $i = 1, 2, ..., n+1$, визначено таким чином:

$$a_i(v_1, v_2, ..., v_{n+1}) = |v_i|^{p-2} v_i \quad \forall v_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n+2, \quad a_{n+2} = v_{n+2}.$$

Визначимо оператор $L : V \to Y$ таким чином:

$$L : u \to \left\{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, u, u\right\}.$$

Тоді спряжений до L оператор $L^* : (L^q(\Omega))^{n+1} + L^2(\Omega) \to W^{-1,q} + L^2(\Omega)$ буде мати вигляд

$$L^* z = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial x_i} + z_{n+1} + z_{n+2} \quad \forall z \in Y^*.$$

Оператор Немицького $A_0 : (L^p(\Omega))^{n+1} \cap L^2(\Omega) \to (L^q(\Omega))^{n+1} + L^2(\Omega)$ у даному випадку має вигляд

$$A_0(y_1, ..., y_{n+2}) = \left\{|y_1|^{p-2} y_1, |y_2|^{p-2} y_2, ..., |y_{n+1}|^{p-2} y_{n+1}, y_{n+2}\right\}.$$

Зауваження 3. Коректність оператора A_0 доведено нижче.

Далі, покладемо

$$\|u\|_V = \left(\int_\Omega (|\operatorname{grad} u|^2 + u^2)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|y\|_Y = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega y_{n+2}^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Перевіримо, що побудований оператор $A_1 = L^* A_0 L : V \to V^*$ задовольняє умови a) – d) означення 9.

a) Доведемо, що $A_0 : Y \to Y^*$ — демінеперервне відображення. Для цього покажемо, що функції a_i, $i = 1, ..., n+2$, задовольняють такі умови [15] (II, лема 2.2):

1) функції $\omega \to a_i(\omega)$ неперервні на $\mathbb{R}^{n+2}$;

2) для всіх $\omega \in \mathbb{R}^{n+2}$ виконується нерівність

$$|a_i(\omega)| \leq c\left(1 + \sum_{j=1}^{n+1} |\omega_j|^{p-1} + |\omega_{n+2}|\right), \quad p > 1,$$

де $c = \text{const}$.

Отже, маємо:

1. Для v_i, $i = 1, ..., n+1$, що не дорівнюють нулю, неперервність, очевидно, виконується. Розглянемо функцію $|v_i|^{p-2}v_i, \quad i = 1, ..., n+1$, при $v_i \to 0$. Оскільки $1 < p < 2$, то $\frac{v_i}{|v_i|^{2-p}} \to 0$ при $v_i \to 0, \quad i = 1, ..., n+1$. Для v_{n+2} неперервність виконується.

2. Покладаючи $c = 1$, переконуємось у виконанні необхідної нерівності.

Отже, виконуються потрібні умови на a_i, $i = 1, ..., n+2$, тому, згідно з лемою 2.2 з [15], оператор A_0 визначений коректно і є демінеперервним.

b) Оператор $L : V \to Y$, очевидно, лінійний. Внаслідок визначених норм в V і Y для кожного $u \in V$ маємо

$$\|Lu\|_Y = \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_\Omega u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки $|\mathrm{grad}\, u|^2 = \sum\limits_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2$, то $\|Lu\|_Y = \|u\|_V$.

c) Очевидно, що $D(E) \subset V \subset H$, $R(E) \subset V^*$. Згідно з означенням оператора L спряжений до нього оператор L^* діє з Y^* в V^* та для $h \in V$ і $z \in Y^*$

$$(L^* z, h) = \langle z, Lh \rangle_Y.$$

Використовуючи формулу Стокса, знаходимо, що для довільних $u \in\in D(E)$ і $h \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(A_1, h) = (L^* A_0 L u, h) = \langle A_0 L u, Lh \rangle_Y = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + a_{n+1} h + a_{n+2} h \right) dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^{p-2} v_i \frac{\partial h}{\partial x_i} + |v_{n+1}|^{p-2} v_{n+1} h + v_{n+2} h \right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n |v_i|^{p-2} v_i \cos(\nu, x_i) h d\sigma +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left(- \sum_{i=1}^n |v_i|^{p-2} v_i + |v_{n+1}|^{p-2} v_{n+1} + v_{n+2} \right) h dx = \int\limits_\Omega Eu \cdot h dx.$$

Оскільки множина $C_0^\infty(\Omega)$ є щільною в V, то $A_1 u = Eu \quad \forall u \in D(E)$.

Умова d) безпосередньо випливає із зауваження 1.13 і наслідку із зауваження 1.16 [15].

Отже, оператор $A_1 = L^* A_0 L : V \to V^*$ є енергетичним розширенням оператора E.

Тепер доведемо, що оператор $A_1 : X \to X^*$, що діє за правилом $(A_1(y))(t) = A_1(y(t))$ для майже всіх $t \in S$ і будь-якого $y \in X$, задовольняє наступні умови:

а) $A_1 : X \to X^*$ є обмеженим;

б) $A_1 : X \to X^*$ є монотонним;

в) $A_1 : X \to X^*$ є коерцитивним;

г) $A_1 : X \to X^*$ є радіально неперервним.

а) Доведемо, що $A_1 : X \to X^*$ визначено коректно. Зауважимо, що для будь-якого $u \in X$ відображення $(A_1(u))(\cdot) = A_1(u(\cdot)) : (S \to V^*)$ є вимірним за Бохнером. Тому достатньо довести нерівність

$$\exists\, C_1, C_2 \geq 0 \quad \forall u \in X : \quad \|A_1 u\|_{X^*} \leq C_1 + C_2 \|u\|_X. \tag{11}$$

Спочатку перевіримо, що виконується наступне:

$$\begin{gathered} \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall u \in V : \\ \langle A_1 u, v\rangle_V \leq C\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \end{gathered} \tag{12}$$

де C — стала. Для доведення (12) використаємо той факт, що в $\mathbb{R}^n$ всі норми еквівалентні, а саме, будемо використовувати нерівності

$$\forall m \geq 1 \quad \forall q \geq 1 \quad \exists c_1, c_2 > 0 : \quad \forall (a_i)_i^m \subset \mathbb{R} :$$

$$c_1 \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Покладемо $A_0 u = (\bar{A}_0 u, A_0^{n+2} u)$ та $Lu = (\bar{L}u, L^{n+2}u)$, де

$$\bar{A}_0 : (L^p(\Omega))^{n+1} \to (L^q(\Omega))^{n+1}, \quad A_0^{n+2} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),$$

$$\bar{L} : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega), \quad L^{n+2} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega).$$

Розглянемо

$$\langle A_1 u, v\rangle_V = \langle A_0 L u, L v\rangle_Y = \langle \bar{A}_0 \bar{L} u, \bar{L} v\rangle_{(L^p(\Omega))^{n+1}} + \langle A_0^{n+2} L^{n+2} u, L^{n+2} v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

На підставі означення енергетичного розширення, визначення норм у просторах V та Y та означення оператора L маємо

$$\langle \bar{A}_0 \bar{L} u, \bar{L} v\rangle_{(L^p(\Omega))^{n+1}} + \langle A_0^{n+2} L^{n+2} u, L^{n+2} v\rangle_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|\bar{A}_0 \bar{L} u\|_{(L^q(\Omega))^{n+1}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|A_0^{n+2} L^{n+2} u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\right)^2 + |u|^{2(p-1)}\right)^{\frac{q}{2}} dx\right)^{\frac{1}{q}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \left(\int\limits_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Використовуючи нерівності для норм в $\mathbb{R}^n$ (13), отримуємо

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-1}\right)^2+|u|^{2(p-1)}\right)^{\frac{q}{2}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\left(\int\limits_{\Omega}u^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq$$

$$\leq c_2\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}+|u|^{p}\right)dx\right)^{\frac{1}{q}}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq$$

$$\leq \frac{c_2}{c_1^{\frac{p}{q}}}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{2}+|u|^{2}\right)^{\frac{p}{2}}dx\right)^{\frac{1}{q}}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\leq$$

$$\leq \frac{c_2c_2^{\frac{1}{q}}}{c_1^{\frac{p}{q}}}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p}+|u|^{p}\right)dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}=$$

$$= C\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \tag{14}$$

де $C=\dfrac{c_2c_2^{1/q}}{c_1^{p/q}}$.

Тому

$$\langle A_1u,v\rangle_V\leq C\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}+\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Отже, (12) доведено.

Розглянемо

$$\langle A_1u,v\rangle_X=\int\limits_S\langle A_1(u(s)),v(s)\rangle_V ds.$$

За попередніми міркуваннями маємо

$$\int\limits_S\langle A_1(u(s)),v(s)\rangle_V ds=\int\limits_S\langle A_0(Lu(s)),Lv(s)\rangle_Y ds=$$

$$=\int\limits_S\langle \bar{A}_0(\bar{L}u(s)),\bar{L}v(s)\rangle_{(L^p(\Omega))^{n+1}}ds+\int\limits_S\langle A_0^{n+2}(L^{n+2}u(s)),L^{n+2}v(s)\rangle_{L^2(\Omega)}ds\leq$$

$$\leq C\int\limits_S\|u(s)\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|v(s)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}ds+\int\limits_S\|u(s)\|_{L^2(\Omega)}\|v(s)\|_{L^2(\Omega)}ds.$$

Використовуючи нерівність Гельдера, отримуємо

$$C\int_S \|u(s)\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|v(s)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}ds+\int_S \|u(s)\|_{L^2(\Omega)}\|v(s)\|_{L^2(\Omega)}ds\le$$

$$\le C\|u\|^{p-1}_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega))}\|v\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega))}+\|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}\|v\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}.$$

Оскільки $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\le\|\cdot\|_V$, то $\|\cdot\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega))}\le\|\cdot\|_{L^p(S;V)}$. Тому

$$C\|u\|^{p-1}_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega))}\|v\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega))}+\|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}\|v\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}\le$$

$$\le C\|u\|^{p-1}_{L^p(S;V)}\|v\|_{L^p(S;V)}+\|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}\|v\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}\le$$

$$\le\max\{C\|u\|^{p-1}_{L^p(S;V)};\|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}\}\|v\|_X\le(C_1+C_2\|u\|_X)\|v\|_X,$$

що і доводить нерівність (11). З неї, зокрема, випливає коректність та обмеженість оператора $A_1:X\to X^*$.

б) Доведемо монотонність оператора $A_1:X\to X^*$. Розглянемо для будь-яких $u\in\in((L^p(\Omega))^{n+1}\times L^2(\Omega))$, $v\in((L^p(\Omega))^{n+1}\times L^2(\Omega))$

$$\langle A_0u-A_0v,u-v\rangle_Y=\sum_{i=1}^{n+1}\int_\Omega(|u_i|^{p-2}u_i-|v_i|^{p-2}v_i)(u_i-v_i)dx+$$

$$+\int_\Omega(u_{n+2}-v_{n+2})(u_{n+2}-v_{n+2})dx.$$

Візьмемо функцію $\varphi(t)=|t|^{p-2}t$, $1<p<2$. При $t\ge0$ $\varphi(t)=t^{p-1}$, а при $t<<0$ $\varphi(t)=-(-t)^{p-1}$ — монотонно неспадна функція. Тому $(|u_i|^{p-2}u_i-|v_i|^{p-2}v_i)(u_i-v_i)\ge\ge0$ $\forall u_i,v_i\in\mathbb{R}$. З останнього маємо $\langle A_1y_1-A_1y_2,y_1-y_2\rangle_V\ge0$ $\forall y_1,y_2\in V$. Отже, оператор $A_1:V\to V^*$ є монотонним. Звідси для будь-яких $y_1,y_2\in X$

$$\langle A_1y_1-A_1y_2,y_1-y_2\rangle_X=\int_S\langle A_1(y_1(t))-A_1(y_2(t)),y_1(t)-y_2(t)\rangle_V dt\ge0.$$

Отже, оператор $A_1:X\to X^*$ є монотонним.

в) Доведемо коерцитивність оператора $A_1:X\to X^*$, а саме, доведемо таку еквівалентну властивість:

$$\frac{\langle A_1u,u\rangle_X}{\|u\|_X}\to+\infty\quad\text{при}\quad\|u\|_X\to+\infty.$$

Для цього використаємо рівність для оператора $A_1 : V \to V^*$:

$$\langle A_1 u, u\rangle_V = \langle A_0 Lu, Lu\rangle_Y = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i} + |u|^{p-2}\cdot u\cdot u\right) dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega u\cdot u dx = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p} + |u|^p\right) dx + \int\limits_\Omega |u|^2 dx = \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Далі розглянемо

$$\frac{\langle A_1 u, u\rangle_X}{\|u\|_X} = \frac{\int\limits_S \|u(s)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} ds + \int\limits_S \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds}{\|u\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}} =$$

$$= \frac{\int\limits_S \|u(s)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} ds + \int\limits_S \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \int\limits_S \|u(s)\|^p_{L^2(\Omega)} ds - \int\limits_S \|u(s)\|^p_{L^2(\Omega)} ds}{\|u\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}}.$$

За допомогою нерівності $a^p + b^p \geq c(a+b)^p \quad \forall a, b \geq 0$, де $c = 2^{1-p}$— стала, одержимо

$$\frac{\int\limits_S \|u(s)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} ds + \int\limits_S \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \int\limits_S \|u(s)\|^p_{L^2(\Omega)} ds - \int\limits_S \|u(s)\|^p_{L^2(\Omega)} ds}{\|u\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}} \geq$$

$$\geq \frac{c\int\limits_S \|u(s)\|^p_V ds + \int\limits_S \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds - \int\limits_S \|u(s)\|^p_{L^2(\Omega)} ds}{\|u\|_{L^p(S;W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(S;L^2(\Omega))}}.$$

Оскільки

$$-\int\limits_S \|u(s)\|^p_{L^2(\Omega)} ds \geq -\left(\int\limits_S \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_S 1^q ds\right)^{\frac{1}{q}} := -C\left(\int\limits_S \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, то

$$\frac{\langle A_1 u, u\rangle_X}{\|u\|_X} \geq \frac{c\|u\|^p_{L^p(S;V)} + \|u\|^2_{L^2(S;H)} - C\|u\|_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}}.$$

Нехай тепер $\|u\|_X \to +\infty$. Розглянемо три можливі випадки:

1. Існує $c_1 > 0$ таке, що $\|u\|_{L^2(S;H)} \leq c_1$, а $\|u\|_{L^p(S;V)} \to +\infty$. Тоді вираз

$$\frac{c\|u\|^p_{L^p(S;V)} + \|u\|^2_{L^2(S;H)} - C\|u\|_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}}$$

при $\|u\|_X \to +\infty$ еквівалентний наступному:

$$\frac{c\|u\|^p_{L^p(S;V)}}{\|u\|_{L^p(S;V)}} = c\|u\|^{p-1}_{L^p(S;V)} \to +\infty.$$

2. Існує $c_1 > 0$ таке, що $\|u\|_{L^p(S;V)} \le c_1$, а $\|u\|_{L^2(S;H)} \to +\infty$. Тоді вираз

$$\frac{c\|u\|^p_{L^p(S;V)} + \|u\|^2_{L^2(S;H)} - C\|u\|_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}}$$

при $\|u\|_X \to +\infty$ еквівалентний наступному:

$$\frac{\|u\|^2_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^2(S;H)}} = \|u\|_{L^2(S;H)} \to +\infty.$$

3. Нехай $\|u\|_{L^p(S;V)} \to +\infty, \quad \|u\|_{L^2(S;H)} \to +\infty$. Тоді

$$\varliminf_{\|u\|_X\to+\infty} \frac{c\|u\|^p_{L^p(S;V)} + \|u\|^2_{L^2(S;H)} - C\|u\|_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}} \ge \varliminf_{\|u\|_X\to+\infty} \frac{\|u\|^p_{L^p(S;V)} + \|u\|^2_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}} \ge$$

$$\ge \varliminf_{\|u\|_X\to+\infty} \frac{\|u\|^{\min(p,2)}_{L^p(S;V)} + \|u\|^{\min(p,2)}_{L^2(S;H)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}} \ge \varliminf_{\|u\|_X\to+\infty} \frac{C_1(\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)})^{\min(p,2)}}{\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)}} =$$

$$= C_1 \varliminf_{\|u\|_X\to+\infty} (\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)})^{\min(p,2)-1} \to +\infty$$

при $\|u\|_{L^p(S;V)} + \|u\|_{L^2(S;H)} = +\infty$.

Отже, коерцитивність оператора $A_1 : X \to X^*$ доведено.

г) Доведемо радіальну неперервність оператора $A_1 : X \to X^*$. Для цього скористаємось теоремою про неперервність інтеграла Лебега за параметром. Згідно з лемою 1.4 з [15], оператор $A_1 : V \to V^*$ — демінеперервний, а саме для майже всіх $t \in S \quad \langle A_1(u(t) + sv(t)), v(t)\rangle_V \to \langle A_1(u(t) + s_0 v(t)), v(t)\rangle_V$ при $s \to s_0$ для будь-яких $u, v \in X, \quad s_0 \in [0,1]$. Тому для відображення $[0,1] \ni t \to \langle A_1(u(t) + sv(t)), v(t)\rangle_V, \quad s \in [0,1]$, досить знайти інтегровну мажоранту. З оцінок (14) випливає наступне:

$$\langle A_1(u(t) + sv(t)), v(t)\rangle_V \le C\|u(t) + sv(t)\|^{p-1}_V \|v(t)\|_V + \|u(t) + sv(t)\|_H \|v(t)\|_H \le$$

$$\le C(c(\|u(t)\|^{p-1}_V + \|v(t)\|^{p-1}_V)\|v(t)\|_V) + (\|u(t)\|_H + \|v(t)\|_H)\|v(t)\|_H =$$

$$= C_1\|u(t)\|^{p-1}_V \|v(t)\|_V + C_1\|v(t)\|^p_V + \|u(t)\|_H\|v(t)\|_H + \|v(t)\|^2_H.$$

Отже, $\varphi(t) = C_1\|u(t)\|^{p-1}_V \|v(t)\|_V + C_1\|v(t)\|^p_V + \|u(t)\|_H\|v(t)\|_H + \|v(t)\|^2_H, t \in S$, і буде шуканою інтегровною мажорантою. Дійсно, $C_1\|v(t)\|^p_V \in L^1(S)$, а $\|v(t)\|^2_H \in L^1(S)$. Для двох інших доданків використаємо нерівність Гельдера:

$$\int\limits_S \|u(t)\|_V^{p-1}\|v(t)\|_V dt \le \|u\|^{p-1}_{L^p(S;V)}\|v\|_{L^p(S;V)},$$

$$\int\limits_S \|u(t)\|_H\|v(t)\|_H dt \le \|u\|_{L^2(S;H)}\|v\|_{L^2(S;H)}.$$

За згаданою вище теоремою будемо мати, що функція $[0,1] \ni s \to \langle A_1(u+sv), v\rangle_X$ є неперервною на $[0,1]$. Таким чином, оператор $A_1 : X \to X^*$ — радіально неперервний.

Отже, умови теореми 1 для оператора $A : X \to X^*$, $A(y) = A_1(y) - y$, доведено. Зауважимо, що $(A(y))(t) = A(y(t))$, і, крім того,

$$\forall\omega \in C^2(\bar\Omega) \ : \ A(\omega) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) + |\omega|^{p-2}\omega,$$

тобто оператор $A : V \to V^*$ є в деякому сенсі енергетичним розширенням оператора $-\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + |u|^{p-2}u \quad \forall u \in C^2(\Omega)$.

Зауваження 4. Демінеперервність оператора $A : C(S; V_\sigma) \to X^*$ випливає із демінеперервності оператора $A : X \to X^*$ та неперервного вкладення простору $C(S;H)$ в X.

Оператор B**.** Перевіримо для оператора B виконання умов теореми 1. Насамперед перевіримо, що для будь-якого $v \in L^2(Q)$ виконується $B(v) \in L^2(Q)$. Справді,

$$\int\limits_Q |B(v(t))|^2 dxdt = \int\limits_Q |\Phi(v(t))|^2 dxdt \le c_3\int\limits_Q |v(t)|^2 dxdt + \int\limits_Q c_4 dxdt,$$

де c_3, c_4 — константи. Отже, $B(v) \in L^2(Q)$. Перевіримо лінійний ріст для $B : L^2(Q) \to \to L^2(Q)$. Нехай тут $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(Q)$:

$$\|B(v)\| = \left(\int\limits_Q |B(v(t))|^2 dxdt\right)^{\frac12} = \left(\int\limits_Q |\Phi(v(t))|^2 dxdt\right)^{\frac12} \le$$

$$\le \left(\int\limits_Q (c_3|v(t)|^2 + c_4) dxdt\right)^{\frac12} \le C_1\|v\| + C_2,$$

де C_1 та C_2 — сталі, що залежать від c_3 та c_4.

Перевіримо неперервність оператора $B : L^2(Q) \to L^2(Q)$. Нехай $y_n \to y$ в $L^2(Q)$ при $n \to \infty$, тоді для майже всіх $(x,t) \in Q$ $y_n(x,t) \to y(x,t)$ при $n \to \infty$. Розглянемо

$A_n = \{(x,t) \in Q : |y_n(x,t) - y(x,t)| \le 1\}$. Отримуємо

$$\int_Q |B(y_n(t)) - B(y(t))|^2 dxdt = \int_Q |\Phi(y_n(t)) - \Phi(y(t))|^2 dxdt =$$

$$= \int_{A_n} |\Phi(y_n(x,t)) - \Phi(y(x,t))|^2 dxdt +$$

$$+ \int_{Q \setminus A_n} |\Phi(y_n(x,t)) - \Phi(y(x,t))|^2 dxdt.$$

За теоремою Лебега $\int_{A_n} |\Phi(y_n(x,t)) - \Phi(y(x,t))|^2 dxdt \to 0, n \to \infty$. Розглянемо $\lambda(Q \setminus A_n)$. За нерівністю Чебишова

$$\lambda(Q \setminus A_n) \le \int_Q |y_n(x,t) - y(x,t)| dxdt \to 0, \quad n \to \infty.$$

Далі маємо

$$\Big(\int_{Q \setminus A_n} |\Phi(y_n(x,t)) - \Phi(y(x,t))|^2 dxdt\Big)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\int_{Q \setminus A_n} |\Phi(y(x,t))|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{Q \setminus A_n} |\Phi(y_n(x,t))|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вираз $\left(\int_{Q \setminus A_n} |\Phi(y(x,t))|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ при $\lambda(Q \setminus A_n) \to 0, \quad n \to \infty$. Тому

$$\left(\int_{Q \setminus A_n} |\Phi(y_n(x,t))|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_{Q \setminus A_n} c_4 dxdt + c_3 \int_{Q \setminus A_n} |y_n(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Знову ж таки вираз $\int\limits_{Q\setminus A_n} c_4 dxdt \to 0$ при $\lambda(Q \setminus A_n) \to 0, \quad n \to \infty$. Розглянемо

$$\int\limits_{Q\setminus A_n} |y_n(x,t)|^2 dxdt \le 2\int\limits_{Q} |y_n(x,t) - y(x,t)|^2 dxdt +$$

$$+ 2\int\limits_{Q\setminus A_n} |y(x,t)|^2 dxdt \to 0, \quad \lambda(Q \setminus A_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отже, $\Phi(y_n) \to \Phi(y)$ при $n \to \infty$. Звідси отримуємо

$$\|B(y_n) - B(y)\|^2 \to 0, \quad y_n \to y \quad \text{в} \quad L^2(Q), \quad n \to \infty,$$

а тому оператор $B : L^2(Q) \to L^2(Q)$ є неперервним.

Тепер проілюструємо теорему 1 на прикладі задачі (10). В якості повної системи векторів $\{h_j\}_{j\ge1}$ візьмемо „спеціальний” базис для пари $(H_0^\sigma(\Omega), L^2(\Omega))$, тобто $\{h_j\}_{j\ge1}$ — ортогональний базис в $H_0^\sigma(\Omega)$ і ортонормований базис в $L^2(\Omega)$, для $\{h_j\}_{j\ge1}$ виконується

$$(h_j, v)_{H_0^\sigma(\Omega)} = \lambda_j^{\frac{1}{\sigma}} (h_j, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^\sigma(\Omega), \quad 0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \to +\infty.$$

Будемо шукати наближений розв'язок $y_m = y_m(t)$ розглядуваної задачі у вигляді

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) h_i,$$

де g_{im} визначаються з умов

$$(y_m''(t), h_j) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial^2 y_m(x,t)}{\partial x_i \partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial^2 y_m(x,t)}{\partial x_i \partial t} \right), h_j \right) +$$

$$+ \left(\left| \frac{\partial y_m(x,t)}{\partial t} \right|^{p-2} \frac{\partial y_m(x,t)}{\partial t}, h_j \right) + (\Phi(y_m(x,t)), h_j) = (f(x,t), h_j), \quad 1 \le j \le n.$$

Запишемо дані рівняння в більш конкретному вигляді:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)h_i, h_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right), h_j\right) +$$

$$+\left(\left|\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i\right|^{p-2} \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i, h_j\right) +$$

$$+\left(\Phi\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)h_i\right), h_j\right) = (f(x,t), h_j).$$

Взявши до уваги визначення скалярного добутку в просторі $L^2(\Omega)$, будемо мати

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)h_i h_j dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right) h_j dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left|\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i\right|^{p-2} \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)h_i h_j dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Phi\left(\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)h_i\right) h_j dx = \int\limits_{\Omega} f(x,t)h_j dx.$$

Розглянемо перший доданок:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)h_i h_j dx = \sum_{i=1}^{m} g''_{im}(t)\int\limits_{\Omega} h_i h_j dx = g''_{jm}(t).$$

Взявши другий інтеграл частинами, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right)h_j dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial h_j}{\partial x_i}dx,$$

бо функції $\{h_j\}_{j\geq 1}$ на межі області Ω дорівнюють нулю. Отже, в результаті будемо мати

$$g''_{jm}(t) + \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right)}{\partial x_i}\right)\frac{\partial h_j}{\partial x_i}dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left|\sum_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i\right|^{p-2}\sum_{i=1}^{m}g'_{im}(t)h_i h_j dx + \int\limits_{\Omega}\Phi\left(\sum_{i=1}^{m}g_{im}(t)h_i\right)h_j dx = \int\limits_{\Omega}f(x,t)h_j dx.$$

Одержали систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що доповнюються початковими умовами $g_{im}(0) = 0, \quad g'_{im}(0) = 0.$

Таким чином, має місце наступне твердження.

Теорема 2. *Задача (10) має розв'язок* $y \in C(S; W_0^{1,p}(\Omega))$ *такий, що* $y' \in C(S; L_2(\Omega))$, $y'' \in X^*$, *причому*

$$y_n \to y \quad \textit{в} \quad C(S;H), \quad n \to \infty,$$

тобто

$$\max_{0<t<T}\left(\int\limits_{\Omega}|y_n(t,x) - y(t,x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$y'_n \to y' \quad \textit{слабко} \quad \textit{в} \quad X = L^p(S;V)\cap L^2(S;H), \quad n \to \infty,$$

тобто

$$\forall f \in X^* = L^q(S;V^*) + L^2(S;H) \ : \ \int\limits_{S}\left(\int\limits_{\Omega}({y_n}'(t,x) - y'(t,x))f(t,x)dx\right)dt \to 0, \quad n \to \infty,$$

$$y''_n \to y'' \quad \textit{слабко} \quad \textit{в} \quad X^* = L^q(S;V^*) + L^2(S;H), \quad n \to \infty,$$

тобто

$$\forall f \in X = L^p(S;V) \cap L^2(S;H): \quad \int\limits_S \left(\int\limits_\Omega (y_n{}''(t,x) - y''(t,x)) f(t,x)dx \right) dt \to 0, \quad n \to \infty,$$

де для кожного $m \geq 1$ $y_m(t) = \sum\limits_{i=1}^m g_{im}(t)h_i$ — *розв'язок задачі*

$$g''_{jm}(t) + \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{\partial \left(\sum\limits_{i=1}^m g'_{im}(t)h_i \right)}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial \left(\sum\limits_{i=1}^m g'_{im}(t)h_i \right)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left| \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)h_i \right|^{p-2} \sum_{i=1}^m g'_{im}(t)h_i h_j dx + \int\limits_\Omega \Phi \left(\sum_{i=1}^m g_{im}(t)h_i \right) h_j dx = \int\limits_\Omega f(x,t)h_j dx,$$

$$1 \leq j \leq n, \quad g_{im}(0) = 0, \quad g'_{im}(0) = 0.$$

1. *Толстоногов А. А.* О решениях эволюционных включений. 1 // Сиб. мат. журн. — 1992. — **33**, № 3. — С. 145–162.
2. *Толстоногов А. А., Уманский Я.И.* О решениях эволюционных включений. 2 // Там же. — № 4. — С. 163–174.
3. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990. — 442 с.
4. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. — 1976. — № 9. — С. 5–130.
5. *Згуровский М. З., Мельник В. С., Новиков А. Н.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями. — Киев: Наук. думка, 2004. — 590 с.
6. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наук. думка, 1988. — 255 с.
7. *Мельник В. С., Тоскано Л.* О нелинейных дифференциально-операторных уравнениях в банаховых пространствах с отображениями псевдомонотонного типа. 1 // Sys. Res. and Inform. Technol. — 2004. — № 3. — P. 63–81.
8. *Vakulenko A. N., Mel'nik V. S.* In topological method in operator inclusions which densele defined mappings in Banach spaces // Nonlinear Boundary Value Problems. — 2000. — № 10. — P. 125–142.
9. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Про розв'язність і властивості розв'язків одного класу операторних включень в банахових просторах // Доп. НАН України. — 1999. — № 3. — С. 105–112.
10. *Вакуленко А. Н., Мельник В. С.* Про один клас операторних включень в банахових просторах // Там же. — 1998. — № 5.
11. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для класу диференціально-операторних включень з многозначними відображеннями псевдомонотонного типу // Наук. вісті НТУУ "КПІ". — 2005. — № 2. — С. 139–151.
12. *Касьянов П. О.* Метод Гальоркіна для класу диференціально-операторних включень // Доп. НАН України. — 2005. — № 9. — С. 20–24.

13. *Kasyanov P. O., Mel'nik V. S., Toscano L.* Method of approximation of evolutionary inclusions та variational inequalities by stationary // Sys. Res. and Inform. Technol. — 2005. — № 4. — P. 106 – 119.

14. *Касьянов П. О., Мельник В. С.* Метод Фаедо – Гальоркіна для диференціально-операторних включень в банахових просторах з відображеннями w_{λ_0}-псевдомонотонного типу // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 1. — С. 103 – 126.

15. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 337 с.

16. *Lions J.-L., Strauss W.* Some nonlinear evolution equations // Bull. Soc. math. France. — 1965. — **93**. — P. 43 – 96.

17. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.

18. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

Одержано 19.06.2006