УДК 517 . 929

ПРО СТРУКТУРУ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Г. П. Пелюх, А. В. Вельгач

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We study the structure of the set of solutions, which are continuously differentiable for $t \in R^+ = [0; +\infty)$*, of a boundary-value problem for systems of nonlinear differential-functional equations of neutral type with nonlinear argument deviations depending on the unknown function.*

Исследуется структура множества непрерывно дифференцируемых при $t \in R^+ = [0; +\infty)$ *решений одной предельной задачи для систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа с нелинейными отклонениями аргумента, зависящих от неизвестной функции.*

Системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$x'(t+1) = x'(t) + F(t, x(t), x(f(t, x(t))), x'(g(t, x(t)))), \tag{1}$$

де $t \in R^+ = [0; +\infty)$, $F\colon R^+ \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$, $f\colon R^+ \times R^n \to R^+$, $g\colon R^+ \times R^n \to R^+$, були об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–3] і наведену в них бібліографію). При цьому, як правило, вивчалися задачі, які характерні для звичайних диференціальних рівнянь: існування і єдиність розв'язків задачі Коші, основної початкової задачі, різного роду крайових задач. Але при дослідженні таких рівнянь дуже часто виникає необхідність в дослідженні задач, які враховують їх специфіку. Одна із таких задач полягає в описі структури множини неперервно диференційовних при $t \in R^+$ розв'язків систем рівнянь вигляду (1), які задовольняють умову

$$\lim_{t\to+\infty} [x(t+1) - x(t)] = 0. \tag{2}$$

У випадку, коли $f(t,x) = f(t)$, $g(t,x) = g(t)$, граничну задачу (1), (2) було вперше досліджено в [4, 5], а при $f(t,x) = f(t,x)$, $g(t,x) = g(t)$ — в [6]. Продовжуючи ці дослідження, в даній роботі вивчаємо структуру множини неперервно диференційовних і обмежених при $t \in [0; +\infty)$ (разом із першою похідною) розв'язків граничної задачі (1), (2) у випадку, коли обидві функції $f(t,x)$, $g(t,x)$ залежать від невідомої вектор-функції $x(t)$. При цьому припускаємо, що вектор-функція $F(t,x,y,z)$ і функції $f(t,x)$, $g(t,x)$ задовольняють такі умови:

1) вектор-функція $F(t,x,y,z)$ неперервна при $t \in R^+$, $x, y, z \in R^n$, $F(t,0,0,0) \equiv 0$, і задовольняє співвідношення

$$|F(t,x',y',z') - F(s,x'',y'',z'')| \le \eta_1(t,s)|t-s| + \eta_2(t,s)(|x'-x''| + |y'-y''| + |z'-z''|),$$

де $\eta_1(t,s), \eta_2(t,s)$ — деякі неперервні і невід'ємні при $t, s \in R^+$ функції, $x', x'', y', y'', z', z'' \in R^n$;

2) функції $f(t,x)$, $g(t,x)$ є невід'ємними, неперервними при $t \in R^+$, $x \in R^n$ і такими, що виконуються нерівності

$$|f(t,x') - f(s,x'')| \leq l'(|t-s| + |x' - x''|),$$

$$|g(t,x') - g(s,x'')| \leq l''(|t-s| + |x' - x''|),$$

де l', l'' — деякі додатні сталі, $t, s \in R^+$, $x', x'' \in R^n$;

3) ряди

$$H_1(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_1(t+i, s+i), \quad H_2(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_2(t+i, s+i),$$

$$H_3(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta_2(\tau+i, \tau+i) d\tau$$

рівномірно збігаються при всіх $t, s \in R^+$ і $3H_1(t,s) \leq \theta_1 < 1$, $3H_2(t,s) \leq \theta_2 < 1$, $3H_3(t) \leq \theta_3 < 1$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1 – 3, то для довільного неперервно диференційовного і обмеженого при $t \in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2), похідна якого задовольняє умову Ліпшиця*

$$|x'(t) - x'(s)| \leq l|t-s|, \tag{3}$$

де l — додатна стала, $t, s \in R^+$, існує неперервно диференційовна при $t \in R^+$, 1-періодична функція $\omega(t)$, перша похідна якої задовольняє умову Ліпшиця, така, що при $t \to \infty$ виконується співвідношення

$$x(t) = \omega(t) + o(1). \tag{4}$$

Доведення. Нехай $\gamma(t)$ — довільний неперервно диференційовний і обмежений при $t \in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язок задачі (1), (2), перша похідна якого задовольняє умову Ліпшиця (3) . Тоді на підставі умов 1 – 3 маємо тотожність

$$\gamma(t) = \omega(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(g(\tau+i, \gamma(\tau+i))))d\tau,$$

де

$$\omega(t) = \gamma(t) - \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(g(\tau+i, \gamma(\tau+i))))d\tau.$$

Звідси безпосередньо випливає, що співвідношення (4) виконується. Крім цього, вектор-функція $\omega(t)$ є, очевидно, неперервно диференційовною при всіх $t \in R^+$. Покажемо, що вона є періодичною. Дійсно, оскільки згідно з (2) маємо

$$\gamma(t+1) = \gamma(t) - \int\limits_t^\infty F(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau, \gamma(\tau))), \gamma'(g(\tau, \gamma(\tau))))d\tau,$$

то

$$\begin{aligned} \omega(t+1) = \gamma(t+1)- &\\ &- \sum_{i=0}^\infty \int\limits_{t+1}^\infty F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(g(\tau+i, \gamma(\tau+i))))d\tau = \\ &= \gamma(t) - \int\limits_t^\infty F(\tau, \gamma(\tau), \gamma(f(\tau, \gamma(\tau))), \gamma'(g(\tau, \gamma(\tau))))d\tau - \\ &- \sum_{i=1}^\infty \int\limits_t^\infty F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(g(\tau+i, \gamma(\tau+i))))d\tau = \\ &= \gamma(t) - \\ &- \sum_{i=0}^\infty \int\limits_t^\infty F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(g(\tau+i, \gamma(\tau+i))))d\tau = \\ &= \omega(t), \end{aligned}$$

тобто функція

$$\omega(t) = \gamma(t) - \sum_{i=0}^\infty \int\limits_t^\infty F(\tau+i, \gamma(\tau+i), \gamma(f(\tau+i, \gamma(\tau+i))), \gamma'(g(\tau+i, \gamma(\tau+i))))d\tau$$

є 1-періодичною.

Таким чином, залишається показати, що якщо похідна неперервно диференційовного і обмеженого розв'язку $\gamma(t)$ задачі (1), (2) задовольняє умову Ліпшиця (3), то і похідна функції $\omega(t)$ також задовольняє умову Ліпшиця. Дійсно, оскільки

$$\omega'(t) = \gamma'(t) - \sum_{i=0}^\infty F(t+i, \gamma(t+i), \gamma(f(t+i, \gamma(t+i))), \gamma'(g(t+i, \gamma(t+i))))$$

і

$$|\gamma'(t) - \gamma'(s)| \le l|t-s|,$$

то одержуємо

$$
\begin{aligned}
|\omega'(t)-\omega'(s)| \le\ & |\gamma'(t)-\gamma'(s)|+\\
& +\sum_{i=0}^{\infty}\Big|F(t+i,\gamma(t+i),\gamma(f(t+i,\gamma(t+i))),\gamma'(g(t+i,\gamma(t+i))))-\\
& - F(s+i,\gamma(s+i),\gamma(f(s+i,\gamma(s+i))),\gamma'(g(s+i,\gamma(s+i))))\Big| \le\\
\le\ & l|t-s|+\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\eta_1(t+i,s+i)|t-s|+\eta_2(t+i,s+i)\times\\
& \times\Big(|\gamma(t+i)-\gamma(s+i)|+|\gamma(f(t+i,\gamma(t+i)))-\gamma(f(s+i,\gamma(s+i)))|+\\
& +|\gamma'(g(t+i,\gamma(t+i)))-\gamma'(g(s+i,\gamma(s+i)))|\Big)\Big) \le\\
\le\ & l|t-s|+\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\eta_1(t+i,s+i)|t-s|+\eta_2(t+i,s+i)\times\\
& \times\Big(M|t-s|+M|f(t+i,\gamma(t+i))-f(s+i,\gamma(s+i))|+\\
& +l|g(t+i,\gamma(t+i)))-(g(s+i,\gamma(s+i))|\Big)\Big) \le\\
\le\ & l|t-s|+\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\eta_1(t+i,s+i)|t-s|+\eta_2(t+i,s+i)\times\\
& \times\Big(M|t-s|+Ml'(|t-s|+M|t-s|)+ll''(|t-s|+M|t-s|)\Big)\Big) \le\\
\le\ & \big(l+H_1(t,s)+H_2(t,s)\big(M+Ml'(1+M)+ll''(1+M)\big)\big)\,|t-s| \le\\
\le\ & \widetilde{l}|t-s|,
\end{aligned}
$$

де $\widetilde{l}=l+\theta_1+\theta_2\Big(M+Ml'(1+M)+ll''(1+M)\Big)$, $M=\sup\limits_{t\in R^+}|\gamma'(t)|$.

Таким чином, $\omega'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–3. Тоді при достатньо малих l', l'' задача (1), (2) має єдиний неперервно диференційовний і обмежений при $t\in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язок, перша похідна якого задовольняє умову Ліпшиця, такий, що при $t\to+\infty$ виконується умова (4), де $\omega(t)$ — деяка неперервно диференційовна, 1-періодична функція, перша похідна якої задовольняє умову Ліпшиця*

$$|\omega'(t)-\omega'(s)|\le p|t-s|, \tag{5}$$

де $p=\mathrm{const}$.

Доведення. Нехай $x(t)$ — довільний неперервно диференційовний і обмежений при $t \in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язок задачі (1), (2), (4), перша похідна якого задовольняє умову Ліпшиця. Тоді неважко показати, що він задовольняє систему рівнянь

$$x(t) = \omega(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t}^{\infty} F(\tau + i, x(\tau + i), x(f(\tau + i, x(\tau + i))), x'(g(\tau + i, x(\tau + i))))d\tau. \quad (6)$$

Справедливим є і обернене твердження: якщо $x(t)$ — неперервно диференційовний і обмежений при $t \in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язок системи рівнянь (6), перша похідна якого задовольняє умову Ліпшиця, то він є розв'язком системи рівнянь (1) і задовольняє умови (2), (4). Отже, для доведення теореми достатньо показати, що система рівнянь (6) має єдиний неперервно диференційовний і обмежений при $t \in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язок, похідна якого задовольняє умову Ліпшиця.

За допомогою співвідношень

$$x_0(t) = \omega(t), \quad x_0'(t) = \omega'(t),$$

$$x_{m+1}(t) = \omega(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_{t}^{\infty} F(\tau + i, x_m(\tau + i), x_m(f(\tau + i, x_m(\tau + i))), x_m'(g(\tau + i, x_m(\tau + i))))d\tau, \quad (7)$$

$$x_{m+1}'(t) = \omega'(t) - \sum_{i=0}^{\infty} F(t + i, x_m(t + i), x_m(f(t + i, x_m(t + i))), x_m'(g(t + i, x_m(t + i)))),$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

визначимо послідовності вектор-функцій $x_m(t)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, і їх похідних і покажемо, що вони рівномірно збігаються до деякого неперервно диференційовного і обмеженого при $t \in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язку системи рівнянь (6).

Використовуючи умови 1–3, за індукцією покажемо, що вектор-функції $x_m(t)$ неперервно диференційовні при $t \in R^+$ і для всіх $m \geq 0$ виконуються нерівності

$$|x_m(t)| \leq \frac{M}{1 - \theta}, \qquad |x_m'(t)| \leq \frac{M}{1 - \theta}, \quad (8)$$

де $M = \max\left\{\sup\limits_{t \in R^+} |\omega(t)|, \sup\limits_{t \in R^+} |\omega'(t)|\right\}$, $\theta = \max\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$.

Справедливість оцінок (8) при $m = 0$ є очевидною. Припустимо, що оцінки (8) справедливі для деякого m, і покажемо, що вони зберігаються при переході від m до $m + 1$.

Дійсно, на підставі умов теореми, (7) і (8) одержуємо

$$|x_{m+1}(t)| \le |\omega(t)| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \Big| \int_t^{\infty} F(\tau+i, x_m(\tau+i), x_m(f(\tau+i, x_m(\tau+i))), x'_m(g(\tau+i, x_m(\tau+i))))d\tau \Big| \le$$

$$\le |\omega(t)| + \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta_2(\tau+i, \tau+i)(|x_m(\tau+i)| + |x_m(f(\tau+i, x_m(\tau+i)))| +$$

$$+ |x'_m(g(\tau+i, x_m(\tau+i)))|)d\tau \le$$

$$\le M + 3\frac{M}{1-\theta} \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta_2(\tau+i, \tau+i)d\tau \le M + 3H_3(t)\frac{M}{1-\theta} \le$$

$$\le M + \theta\frac{M}{1-\theta} \le \frac{M}{1-\theta},$$

$$|x'_{m+1}(t)| \le |\omega'(t)| +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} |F(t+i, x_m(t+i), x_m(f(t+i, x_m(t+i))), x'_m(g(t+i, x_m(t+i))))| \le$$

$$\le M + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, t+i)\big(|x_m(t+i)| + |x_m(f(t+i, x_m(t+i)))| +$$

$$+ |x'_m(g(t+i, x_m(t+i)))|\big) \le$$

$$\le M + 3\frac{M}{1-\theta} \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, t+i)d\tau \le M + 3H_2(t,t)\frac{M}{1-\theta} \le$$

$$\le M + \theta\frac{M}{1-\theta} \le \frac{M}{1-\theta}.$$

Отже, нерівності (8) виконуються для довільного $m \ge 0$.

З огляду на (5) і умови теореми покажемо тепер, що для всіх $m \ge 0, t, s \in R^+$ виконується умова

$$|x'_m(t) - x'_m(s)| \le l|t-s|, \tag{9}$$

де

$$l = \frac{p + \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\left(\frac{M}{1-\theta} + \frac{M}{1-\theta}l'\left(1 + \frac{M}{1-\theta}\right)\right)}{1 - \frac{\theta l''}{3}\left(1 + \frac{M}{1-\theta}\right)}.$$

На підставі (7), (8) і умов теореми при $m = 1$ маємо

$$
\begin{aligned}
|x_1'(t) - x_1'(s)| \leq{} & |\omega'(t) - \omega'(s)| + \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \Big| F(t+i, x_0(t+i), x_0(f(t+i, x_0(t+i))), x_0'(g(t+i, x_0(t+i)))) - \\
& - F(s+i, x_0(s+i), x_0(f(s+i, x_0(s+i))), x_0'(g(s+i, x_0(s+i)))) \Big| \leq \\
& \leq |\omega'(t) - \omega'(s)| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1(t+i, s+i)|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, s+i) \times \\
& \times \Big(|\omega(t+i) - \omega(s+i)| + |\omega(f(t+i, \omega(t+i))) - \omega(f(s+i, \omega(s+i)))| + \\
& + |\omega'(g(t+i, \omega(t+i))) - \omega'(g(s+i, \omega(s+i)))| \Big) \leq \\
& \leq p|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1(t+i, s+i)|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, s+i) \times \\
& \times \Big(M|t-s| + M|f(t+i, \omega(t+i)) - f(s+i, \omega(s+i))| + \\
& + p|g(t+i, \omega(t+i)) - g(s+i, \omega(s+i))| \Big) \leq \\
& \leq p|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_1(t+i, s+i)|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, s+i) \times \\
& \times \Big(M|t-s| + Ml'(|t-s| + M|t-s|) + pl''(|t-s| + M|t-s|) \Big) \leq \\
& \leq |t-s| \Big(p + H_1(t,s) + H_2(t,s)(M + Ml'(1+M) + pl''(1+M)) \Big) \leq \\
& \leq l|t-s|,
\end{aligned}
$$

тобто оцінка (9) виконується при $m = 1$. Припустимо, що умову (9) доведено для деякого m, і покажемо, що вона зберігається при переході від m до $m+1$. Дійсно, з огляду на співвідношення (7), (8) і умови 1–3 отримуємо

$$
\begin{aligned}
|x_{m+1}'(t) - x_{m+1}'(s)| \leq{} & |\omega'(t) - \omega'(s)| + \\
& + \sum_{i=0}^{\infty} \Big| F(t+i, x_m(t+i), x_m(f(t+i, x_m(t+i))), x_m'(g(t+i, x_m(t+i)))) - \\
& - F(s+i, x_m(s+i), x_m(f(s+i, x_m(s+i))), x_m'(g(s+i, x_m(s+i)))) \Big| \leq
\end{aligned}
$$

$$\leq |\omega'(t)-\omega'(s)| + \sum_{i=0}^{\infty}\eta_1(t+i,s+i)|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,s+i)\times$$

$$\times\Big(|x_m(t+i)-x_m(s+i)| + |x_m(f(t+i,x_m(t+i))) - x_m(f(s+i,x_m(s+i)))|+$$

$$+|x'_m(g(t+i,x_m(t+i))) - x'_m(g(s+i,x_m(s+i)))|\Big) \leq$$

$$\leq p|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty}\eta_1(t+i,s+i)|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,s+i)\times$$

$$\times\left(\frac{M}{1-\theta}|t-s| + \frac{M}{1-\theta}|f(t+i,x_m(t+i)) - f(s+i,x_m(s+i))|+\right.$$

$$\left.+l|g(t+i,x_m(t+i)) - g(s+i,x_m(s+i))|\right) \leq$$

$$\leq p|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty}\eta_1(t+i,s+i)|t-s| + \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,s+i)\left(\frac{M}{1-\theta}|t-s|+\right.$$

$$\left.+\frac{M}{1-\theta}l'(|t-s| + \frac{M}{1-\theta}|t-s|) + ll''(|t-s| + \frac{M}{1-\theta}|t-s|)\right) \leq$$

$$\leq |t-s|\left(p + H_1(t,s) + H_2(t,s)\left(\frac{M}{1-\theta} + \left(\frac{M}{1-\theta}l' + ll''\right)\left(1+\frac{M}{1-\theta}\right)\right)\right) \leq$$

$$\leq |t-s|\left(p + \frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{3}\left(\frac{M}{1-\theta} + \left(\frac{M}{1-\theta}l' + ll''\right)\left(1+\frac{M}{1-\theta}\right)\right)\right) \leq l|t-s|.$$

Таким чином, умова Ліпшиця (9) має місце при $t, s \in R^+$ і всіх $m \geq 1$.

Тепер покажемо, що при всіх $m \geq 1$, $t \in R^+$ мають місце оцінки

$$|x_m(t) - x_{m-1}(t)| \leq M\widetilde{\theta}^m, \qquad |x'_m(t) - x'_{m-1}(t)| \leq M\widetilde{\theta}^m, \tag{10}$$

де $\widetilde{\theta} = \theta\left(1 + \dfrac{Ml'}{3(1-\theta)} + \dfrac{ll''}{3}\right)$.

Дійсно, при $m = 1$ маємо

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\left|\int_t^{\infty} F(\tau+i, x_0(\tau+i), x_0(f(\tau+i,x_0(\tau+i))), x'_0(g(\tau+i,x_0(\tau+i))))d\tau\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)(|\omega(\tau+i)| + |\omega(f(\tau+i,\omega(\tau+i)))| + |\omega'(g(\tau+i,\omega(\tau+i)))|)d\tau \leq$$

$$\leq 3M\sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)d\tau \leq 3MH_3(t) \leq M\theta,$$

$$|x_1'(t)-x_0'(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty}|F(t+i,x_0(t+i),x_0(f(t+i,x_0(t+i))),x_0'(g(t+i,x_0(t+i))))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,t+i)(|\omega(t+i)|+|\omega(f(t+i,\omega(t+i)))|+|\omega'(g(t+i,\omega(t+i)))|) \leq$$

$$\leq 3M\sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,t+i) \leq 3MH_2(t,t) \leq M\theta.$$

Припустимо, що оцінки (10) доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вони виконуються при $m+1$. Дійсно, на підставі (7) – (9) і умов 1 – 3 отримуємо

$$|x_{m+1}(t)-x_m(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\Big|F(\tau+i,x_m(\tau+i),x_m(f(\tau+i,x_m(\tau+i))),x_m'(g(\tau+i,x_m(\tau+i))))-$$

$$-F(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i),x_{m-1}(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i))),x_{m-1}'(g(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))\Big|d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)\Big(|x_m(\tau+i)-x_{m-1}(\tau+i)|+$$

$$+|x_m(f(\tau+i,x_m(\tau+i)))-x_{m-1}(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+|x_m'(g(\tau+i,x_m(\tau+i)))-x_{m-1}'(g(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|\Big)d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)\Big(|x_m(\tau+i)-x_{m-1}(\tau+i)|+$$

$$+|x_m(f(\tau+i,x_m(\tau+i)))-x_m(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+|x_m(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))-x_{m-1}(f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+|x_m'(g(\tau+i,x_m(\tau+i)))-x_m'(g(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|+$$

$$+|x_m'(g(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))-x_{m-1}'(g(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i)))|\Big)d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)\Big(M\widetilde{\theta}^m+\frac{M}{1-\theta}|f(\tau+i,x_m(\tau+i))-f(\tau+i,x_{m-1}(\tau+i))|+$$

$$+ M\widetilde{\theta}^m + l|g(\tau+i, x_m(\tau+i)) - g(\tau+i, x_{m-1}(\tau+i))| + M\widetilde{\theta}^m\Big)d\tau \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)\left(3M\widetilde{\theta}^m + \frac{M}{1-\theta}l'M\widetilde{\theta}^m + ll''M\widetilde{\theta}^m\right)d\tau \le$$

$$\le 3H_3(t)M\widetilde{\theta}^m\left(1 + \frac{M}{3(1-\theta)}l' + \frac{ll''}{3}\right) \le$$

$$\le \theta_3 M\widetilde{\theta}^m\left(1 + \frac{M}{3(1-\theta)}l' + \frac{ll''}{3}\right) \le M\widetilde{\theta}^{m+1},$$

$$|x'_{m+1}(t) - x'_m(t)| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\Big|F(t+i, x_m(t+i), x_m(f(t+i, x_m(t+i))), x'_m(g(t+i, x_m(t+i)))) -$$

$$- F(t+i, x_{m-1}(t+i), x_{m-1}(f(t+i, x_{m-1}(t+i))), x'_{m-1}(g(t+i, x_{m-1}(t+i)))\Big| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,t+i)\Big(|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| +$$

$$+ |x_m(f(t+i, x_m(t+i))) - x_{m-1}(f(t+i, x_{m-1}(t+i)))| +$$

$$+ |x'_m(g(t+i, x_m(t+i))) - x'_{m-1}(g(t+i, x_{m-1}(t+i)))|\Big) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,t+i)\Big(|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| +$$

$$+ |x_m(f(t+i, x_m(t+i))) - x_m(f(t+i, x_{m-1}(t+i)))| +$$

$$+ |x_m(f(t+i, x_{m-1}(t+i))) - x_{m-1}(f(t+i, x_{m-1}(t+i)))| +$$

$$+ |x'_m(g(t+i, x_m(t+i))) - x'_m(g(t+i, x_{m-1}(t+i)))| +$$

$$+ |x'_m(g(t+i, x_{m-1}(t+i))) - x'_{m-1}(g(t+i, x_{m-1}(t+i)))|\Big) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,t+i)\Big(M\widetilde{\theta}^m + \frac{M}{1-\theta}|f(t+i, x_m(t+i)) - f(t+i, x_{m-1}(t+i))| +$$

$$+ M\widetilde{\theta}^m + l|g(t+i, x_m(t+i)) - g(t+i, x_{m-1}(t+i))| + M\widetilde{\theta}^m\Big) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty}\eta_2(t+i,t+i)\left(3M\widetilde{\theta}^m + \frac{M}{1-\theta}l'M\widetilde{\theta}^m + ll''M\widetilde{\theta}^m\right) \le$$

$$\leq 3H_2(t,t)M\widetilde{\theta}^m\left(1+\frac{M}{3(1-\theta)}l'+\frac{ll''}{3}\right)\leq \theta_2 M\widetilde{\theta}^m\left(1+\frac{M}{3(1-\theta)}l'+\frac{ll''}{3}\right)\leq M\widetilde{\theta}^{m+1}.$$

Таким чином, оцінки (10) виконуються при $t\in R^+$ і всіх $m\geq 1$. Оскільки при достатньо малих l', l'' виконується нерівність

$$\widetilde{\theta}=\theta\left(1+\frac{Ml'}{3(1-\theta)}+\frac{ll''}{3}\right)<1,$$

то із (10) безпосередньо випливає, що послідовності вектор-функцій $\{x_m(t)\}, m=0,1,2\ldots,$ і їх похідних рівномірно збігаються при $t\in R^+$. Більш того, вектор-функція $x(t) = \lim_{m\to\infty} x_m(t)$ є неперервно диференційовним розв'язком системи рівнянь (6), мають місце нерівності

$$|x(t)|<\frac{M}{1-\theta},\ |x'(t)|<\frac{M}{1-\theta},$$

і $x'(t)$ задовольняє умову Ліпшиця

$$|x'(t)-x'(s)|\leq l|t-s|$$

(в цьому легко переконатися, якщо в (8)–(10) перейти до границі при $m\to\infty$).

Покажемо тепер, що система рівнянь (6) не має інших неперервно диференційовних і обмежених при $t\in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язків, перша похідна яких задовольняє умову Ліпшиця. Дійсно, нехай система (6) має ще один неперервно диференційовний і обмежений при $t\in R^+$ (разом з першою похідною) розв'язок $y(t)$, перша похідна якого задовольняє умову Ліпшиця

$$|y'(t)-y'(s)|\leq l|t-s|,\quad t,s\in R^+.$$

Тоді на підставі умов теореми і (6) отримуємо

$$|x(t)-y(t)|\leq$$

$$\leq\sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\Big|F(\tau+i,x(\tau+i),x(f(\tau+i,x(\tau+i))),x'(g(\tau+i,x(\tau+i))))-$$

$$-F(\tau+i,y(\tau+i),y(f(\tau+i,y(\tau+i))),y'(g(\tau+i,y(\tau+i)))\Big|d\tau\leq$$

$$\leq\sum_{i=0}^{\infty}\int_t^{\infty}\eta_2(\tau+i,\tau+i)\Big(|x(\tau+i)-y(\tau+i)|+|x(f(\tau+i,x(\tau+i)))-$$

$$- y(f(\tau+i, y(\tau+i)))| + |x'(g(\tau+i, x(\tau+i))) - y'(g(\tau+i, y(\tau+i)))|\Big) d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta_2(\tau+i, \tau+i) \Big(|x(\tau+i) - y(\tau+i)| + |x(f(\tau+i, x(\tau+i)))-$$

$$- x(f(\tau+i, y(\tau+i)))| + |x(f(\tau+i, y(\tau+i))) - y(f(\tau+i, y(\tau+i)))|+$$

$$+ |x'(g(\tau+i, x(\tau+i))) - x'(g(\tau+i, y(\tau+i)))|+$$

$$+ |x'(g(\tau+i, y(\tau+i))) - y'(g(\tau+i, y(\tau+i)))|\Big) d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta_2(\tau+i, \tau+i) \Big(|x(\tau+i) - y(\tau+i)| + \frac{M}{1-\theta} l' |x(\tau+i) - y(\tau+i)|+$$

$$+ |x(f(\tau+i, y(\tau+i))) - y(f(\tau+i, y(\tau+i)))| + ll''|x(\tau+i) - y(\tau+i)|+$$

$$+ |x'(g(\tau+i, y(\tau+i))) - y'(g(\tau+i, y(\tau+i)))|\Big) d\tau \leq$$

$$\leq ||x(t) - y(t)|| \sum_{i=0}^{\infty} \int_t^{\infty} \eta_2(\tau+i, \tau+i) \Big(3 + \frac{M}{1-\theta} l' + ll'' \Big) d\tau \leq$$

$$\leq ||x(t) - y(t)|| \theta_3 \Big(1 + \frac{M}{3(1-\theta)} l' + \frac{ll''}{3} \Big) \leq \widetilde{\theta} ||x(t) - y(t)||,$$

$$|x'(t) - y'(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \Big| F(t+i, x(t+i), x(f(t+i, x(t+i))), x'(g(t+i, x(t+i))))-$$

$$- F(t+i, y(t+i), y(f(t+i, y(t+i))), y'(g(t+i, y(t+i))) \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, t+i) \Big(|x(t+i) - y(t+i)| + |x(f(t+i, x(t+i)))-$$

$$- y(f(t+i, y(t+i)))| + |x'(g(t+i, x(t+i))) - y'(g(t+i, y(t+i)))| \Big) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, t+i) \Big(|x(t+i) - y(t+i)| + |x(f(t+i, x(t+i)))-$$

$$- x(f(t+i, y(t+i)))| + |x(f(t+i, y(t+i))) - y(f(t+i, y(t+i)))|+$$

$$+ |x'(g(t+i, x(t+i))) - x'(g(t+i, y(t+i)))|+$$

$$
+ |x'(g(t+i, y(t+i))) - y'(g(t+i, y(t+i)))|\Big) \le
$$

$$
\le \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, t+i)\Big(|x(t+i) - y(t+i)| + \frac{M}{1-\theta} l' |x(t+i) - y(t+i)| +
$$

$$
+ |x(f(t+i, y(t+i))) - y(f(t+i, y(t+i)))| + ll'' |x(t+i) - y(t+i)| +
$$

$$
+ |x'(g(t+i, y(t+i))) - y'(g(t+i, y(t+i)))|\Big) \le
$$

$$
\le ||x(t) - y(t)|| \sum_{i=0}^{\infty} \eta_2(t+i, t+i)\left(3 + \frac{M}{1-\theta} l' + ll''\right) \le
$$

$$
\le ||x(t) - y(t)|| \theta_2 \left(1 + \frac{M}{3(1-\theta)} l' + \frac{ll''}{3}\right) \le \widetilde{\theta} ||x(t) - y(t)||,
$$

де

$$
||x(t) - y(t)|| = \max\{\sup_{t \in R^+} |x(t) - y(t)|, \sup_{t \in R^+} |x'(t) - y'(t)|\}.
$$

Звідси випливає

$$
||x(t) - y(t)|| \le \widetilde{\theta} ||x(t) - y(t)||,
$$

що може мати місце лише у випадку, коли $x(t) \equiv y(t)$. Отримана суперечність завершує доведення теореми 2.

1. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
2. *Хейл Дж.* Теория дифференциально-функциональных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737 – 747.
4. *Пелюх Г. П.* Асимптотичні властивості розв'язків систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійним відхиленням аргументу // Диференціальні рівняння і нелінійні коливання (Укр. мат. конгрес-2001). — Київ, 2002. — С. 94 – 100.
5. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. — 2003. — **39**, № 1. — С. 45 – 49.
6. *Пелюх Г. П.* О структуре множества решений одного класса систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 1. — С. 58 – 65.

Одержано 19.05.2006