УДК 517 . 929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3

We find new properties of solutions of the differential-functional equation $x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt) + f_1(x(t), x(t-r), x'(t-r), x(qt), x'(qt))$ *in a neighbourhood of the singular point* $t = +\infty$.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння $x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt) + f_1(x(t), x(t-r), x'(t-r), x(qt), x'(qt))$ *в околі особливої точки* $t = +\infty$.

В данной работе рассматривается уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-r) + cx'(t-r) + px(qt) + hx'(qt)+$$
$$+ f_1(x(t), x(t-r), x'(t-r), x(qt), x'(qt)), \tag{1}$$

где $\{a, b, c, p, h\} \subset R, r > 0, 0 < q < 1, f_1 : R^5 \to R$. В настоящее время имеется ряд интересных результатов, касающихся свойств решений уравнения (1). Так, в [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1) при $b = c = h = 0$ и $f_1 \equiv 0$, в [2] установлены новые свойства решений этого уравнения при $a = b = c = h = 0$ и $f_1 \equiv 0$, в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения (1) при $b = c = h = 0$ и $f_1 \equiv 0$, в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $b = c = 0$, $f_1 \equiv 0$ и $|h| > 1$, в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] исследовано поведение решений уравнения (1) при $b = c = 0$ и $f_1 \equiv 0$ в окрестности точки $t = 0$, в [7] определены мажоранты для решений уравнения (1) при $b = c = 0$ и $f_1 \equiv 0$, в [8, 9] рассмотрены достаточные условия асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений (1) при $c = h = 0$ и $f_1 \equiv 0$, а также приведен метод их стабилизации. Несмотря на это и на широкие приложения таких уравнений в различных областях науки и техники (см. [10] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функциональных уравнений вида (1) изучены мало. Это прежде всего касается исследования асимптотических свойств решений уравнения (1) в окрестности особой точки $t = +\infty$. Поэтому основной целью данной работы является установление новых свойств решений этого уравнения при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов a, b, c, p, h и функции f_1.

Предположим, что $a + b \neq 0$. Определим функцию

$$W(t) = (a+b)^{-1} + \int\limits_0^t X(s)ds,\ t \geq -r,$$

где $X(t)$ — фундаментальное решение дифференциально-разностного уравнения

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bx(t-r) + c\dot{x}(t-r).$$

Поскольку [11] (гл. 1)

$$X(t) = 1 + cX(t-r) + a\int\limits_0^t X(s)ds + b\int\limits_0^t X(s-r)ds,\ t \geq 0,$$

имеем равенство

$$W(t) = \frac{1}{a+b}\left(X(t) - cX(t-r) + b\int\limits_{t-r}^t X(s)ds\right). \tag{2}$$

Далее, принимая во внимание оценки

$$|X(t)| \leq k_1 e^{\alpha t},\ \operatorname*{var}_{[t-r,t]} X \leq k_2 e^{\alpha t},\ t \geq 0, \tag{3}$$

где $\sup\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda(1 - ce^{-\lambda r}) - a - be^{-\lambda r} = 0\} \overset{\mathrm{df}}{=} \alpha_0 < \alpha,\ k_1$ и k_2 — некоторые постоянные, из (2) получаем неравенство

$$|W(t)| \leq k_3 e^{\alpha t}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

в котором k_3 — некоторая положительная постоянная.

Функция $W(t)$ принадлежит $C[-r,+\infty)\bigcap\bigcap_{i=-1}^{+\infty} C^1(ir,(i+1)r)$. Легко показать, что в точках $t = ir,\ i = -1,0,1,2,\ldots$, существует правосторонняя производная, а при $i = 0,1,2,\ldots$ — левосторонняя производная этой функции.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*:

1) $\alpha_0 < 0$ *и* $\left|\dfrac{p}{a+b}\right| < 1$;

2) параметры $\alpha,\nu \in R$ *и* $j = 0,1,2,\ldots$ *удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha_0 < \alpha < 0, \quad \frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\left|\frac{p}{a+b}\right| < \nu < 0,\ \left(\left|\frac{h}{q}\right| + |p|\frac{k_1}{|\alpha|} + \left|\frac{h}{q}\right|k^2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j} < 1$$

и $|c| + |h|q^{\nu+j} < 1$;

3) функция f_1 является непрерывно дифференцируемой $j+1$ раз в окрестности начала координат и равна нулю в начале координат вместе со всеми частными производными 1-го порядка;

4) для числа $t_0 > 0$ выполняется неравенство $qt_0 < t_0 - r$.

Тогда существуют константы $0 < \delta < \sigma < +\infty$ такие, что для $j+1$ раз непрерывно дифференцируемых решений $x(t)$ уравнения (1), удовлетворяющих условию $|x^{(m)}(\theta)| \le \delta$, $\theta \in [qt_0,\ t_0]$, $m = \overline{0,\ j+1}$, имеет место оценка

$$\max\{|x(t)|,\ |x'(t)|, \ldots, |x^{(j+1)}(t)|\} < \sigma t^{\nu} \quad \forall t \in [qt_0, +\infty).$$

Доказательство. Из условия $\alpha_0 < 0$ следует неравенство $a+b \ne 0$, значит, функция $W(t)$ корректно определена. Согласно асимптотическому расположению корней характеристического квазиполинома из условия $\alpha_0 < 0$ также следует неравенство $|c| < 1$. Таким образом, неравенство $|c| + |h|q^{\nu+j} < 1$ может выполняться при соответствующем выборе параметров ν и j.

Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (1) j раз, получаем $j+1$ уравнение

$$x^{(m+1)}(t) = ax^{(m)}(t) + bx^{(m)}(t-r) + cx^{(m+1)}(t-r) + pq^m x^{(m)}(qt) +$$
$$+ hq^m x^{(m+1)}(qt) + f_{m+1}\Big(x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t), x(t-r), x'(t-r), \ldots$$
$$\ldots, x^{(m+1)}(t-r), x(qt), x'(qt), \ldots, x^{(m+1)}(qt)\Big), \quad m = \overline{0, j}.$$

Из третьего условия теоремы следует, что все функции f_m, $m = \overline{1, j+1}$, непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам и равны нулю вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка в начале координат.

Выполняя замену переменных $x(t) = t^{\nu} y(t)$, получаем уравнения

$$y^{(m+1)}(t) = ay^{(m)}(t) + by^{(m)}(t-r) + cy^{(m+1)}(t-r) + pq^{\nu+m} y^{(m)}(qt) +$$
$$+ hq^{\nu+m} y^{(m+1)}(qt) + F_{m+1}\Big(t, \nu, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m)}(t), y(t-r),$$
$$y'(t-r), \ldots, y^{(m+1)}(t-r), y(qt), y'(qt), \ldots, y^{(m+1)}(qt)\Big), \quad m = \overline{0, j}, \tag{5}$$

где F_i — некоторые непрерывно дифференцируемые по всем своим аргументам функции.

Принимая во внимание условия теоремы и вид функций F_i, можно показать, что для всех $t \in [t_0, +\infty)$ и $\{z_i, u_i, i = \overline{1, 3m+5}\} \subset R : \max\{|z_i|, |u_i|, i = \overline{1, 3m+5}\} \le \delta$ выполняется неравенство

$$|F_{m+1}(t, \nu, z_1, \ldots, z_{3m+5}) - F_{m+1}(t, \nu, u_1, \ldots, u_{3m+5})| \le \sum_{i=1}^{3m+5} l_{m+1,i}(t_0, \delta, \nu)|z_i - u_i|, \tag{6}$$

где $l_{m+1,i}(t_0,\delta,\nu) \to 0$ при $t_0 \to +\infty,\ \delta \to 0,\ i = \overline{1,3m+5},\ m = \overline{0,j}$.

Запишем уравнение (5) в интегральной форме

$$y^{(m)}(t) = X(t-t_0)\Big(y^{(m)}(t_0) - cy^{(m)}(t_0-r)\Big)+$$

$$+ b\int\limits_{t_0-r}^{t_0} X(t-\theta-r)y^{(m)}(\theta)d\theta - c\int\limits_{t_0-r}^{t_0} y^{(m)}(\theta)dX(t-\theta-r)+$$

$$+ pq^{\nu+m}\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(m)}(qs)ds + hq^{\nu+m}\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(m+1)}(qs)ds+$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)F_{m+1}\Big(s,\nu,y(s),y'(s),\ldots,y^{(m)}(s),y(s-r),$$

$$y'(s-r),\ldots,y^{(m+1)}(s-r),y(qs),y'(qs),\ldots,y^{(m+1)}(qs)\Big)ds.$$

Поскольку в силу свойств функции $W(t)$ в результате интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(m)}(qs)ds = W(t-t_0)y^{(m)}(qt_0) - (a+b)^{-1}y^{(m)}(qt) + q\int\limits_{t_0}^{t} W(t-s)y^{(m+1)}(qs)ds,$$

интегральную формулу для $y^{(m)}(t)$ можно записать в виде

$$y^{(m)}(t) = -\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}y^{(m)}(qt) + X(t-t_0)(y^{(m)}(t_0) - cy^{(m)}(t_0-r))+$$

$$+ pq^{\nu+m}W(t-t_0)y^{(m)}(qt_0) + b\int\limits_{t_0-r}^{t_0} X(t-\theta-r)y^{(m)}(\theta)d\theta-$$

$$- c\int\limits_{t_0-r}^{t_0} y^{(m)}(\theta)dX(t-\theta-r)+$$

$$+ pq^{\nu+m+1}\int\limits_{t_0}^{t} W(t-s)y^{(m+1)}(qs)ds + hq^{\nu+m}\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(m+1)}(qs)ds+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)F_{m+1}(s,\nu,y(s),y'(s),\ldots,y^{(m)}(s),y(s-r),$$

$$y'(s-r),\ldots,y^{(m+1)}(s-r),y(qs),y'(qs),\ldots,y^{(m+1)}(qs))ds,\;\; m=\overline{0,j-1}. \tag{7}$$

Аналогично, для функции $y^{(j)}(t)$ имеем уравнение

$$y^{(j)}(t) = X(t-t_0)(y^{(j)}(t_0) - cy^{(j)}(t_0-r) - hq^{\nu+j-1}y^{(j)}(qt_0))+$$

$$+ b\int\limits_{t_0-r}^{t_0} X(t-\theta-r)y^{(j)}(\theta)d\theta - c\int\limits_{t_0-r}^{t_0} y^{(j)}(\theta)dX(t-\theta-r)+$$

$$+ hq^{\nu+j-1}y^{(j)}(qt) + pq^{\nu+j}\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(j)}(qs)ds-$$

$$- hq^{\nu+j-1}\int\limits_{t_0}^{t} y^{(j)}(qs)dX(t-s)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)F_{j+1}(s,\nu,y(s),y'(s),\ldots,y^{(j)}(s),y(s-r),y'(s-r),\ldots$$

$$\ldots,y^{(j+1)}(s-r),y(qs),y'(qs),\ldots,y^{(j+1)}(qs))ds. \tag{8}$$

Положим

$$\max\left\{\left|\frac{pq^{\nu}}{a+b}\right|;\left(\left|\frac{h}{q}\right|+|p|\frac{k_1}{\alpha}+\left|\frac{h}{q}\right|k_2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j};\; |c|+|h|q^{\nu+j}\right\} = 1-\varepsilon < 1 \tag{9}$$

и выберем числа $n_m,\ m = \overline{0, j+1}$, так, чтобы выполнялись неравенства

$$n_j \stackrel{\text{df}}{=} 1 < n_{j-1} < n_{j-2} < \ldots < n_0 < n_{j+1} < +\infty,$$

$$\left(|pq^{\nu+m+1}|\frac{k_3}{|\alpha|} + |hq^{\nu+m}|\frac{k_1}{|\alpha|}\right)\frac{n_{m+1}}{n_m} < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad m = \overline{0, j-1}, \tag{10}$$

$$\Big(|a| + |b| + |pq^{\nu+j}|\Big)\frac{1}{n_{j+1}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Определим величины $t_0 > 0$ и $\sigma > 0$ так, чтобы имели место неравенства

$$\frac{k_1}{|\alpha|}\left(\sum_{i=1}^{m+1} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-1} + \sum_{i=m+2}^{2m+3} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-m-2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=2m+4}^{3m+5} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-2m-4}\right) < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{при} \ m = \overline{0, j-1},$$

$$l_{j+1,2j+3}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu) + l_{j+1,3j+5}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu) + \sum_{i=1}^{j+1} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-1} +$$
$$+ \sum_{i=j+2}^{2j+2} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-j-2} + \sum_{i=2j+4}^{3j+4} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-2j-4} < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{11}$$

$$\frac{k_1}{|\alpha|}\left(\sum_{i=1}^{j+1} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-1} + \sum_{i=j+2}^{2j+3} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-j-2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=2j+4}^{3j+5} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-2j-4}\right) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $|y^{(m)}(\theta)| \le \delta$ для любого $\theta \in [qt_0, t_0],\ m = \overline{0, j+1}$ и $qt_0 < t_0 - r$. Величину δ выберем меньше σ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Big(k_1(1 + |c|) + |pq^{\nu}|k_3 + |b|k_1 r + |c|k_2\Big)\frac{\delta}{\sigma} < \frac{\varepsilon}{4},$$
$$\Big(k_1(1 + |c| + |hq^{\nu+j-1}|) + |b|k_1 r + |c|k_2\Big)\frac{\delta}{\sigma} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

Следовательно, для некоторого $T > t_0$

$$|y^{(m)}(t)| < n_m\sigma \quad \forall t \in [qt_0, T), m = \overline{0, j+1}. \tag{13}$$

Если $T = +\infty$, то нужное нам утверждение доказано.

Предположим, что это не так, и пусть T — конечный и первый момент времени, когда хотя бы одно из неравенств (13) превращается в равенство.

Из условия $\alpha < 0$ и (3), (4), (6), (7), (9) – (13) следует, что для любого $t \in [t_0, T)$ функции $y^{(m)}(t),\ m = \overline{0, j-1}$, удовлетворяют неравенствам

$$|y^{(m)}(t)| < \Big|\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}\Big| n_m\sigma + k_1(1+|c|)\delta + |pq^{\nu+m}|k_3\delta + |b|k_1 r\delta + |c|k_2\delta +$$

$$+ |pq^{\nu+m+1}|\frac{k_3}{|\alpha|}n_{m+1}\sigma + |hq^{\nu+m}|\frac{k_1}{|\alpha|}n_{m+1}\sigma + \frac{k_1}{|\alpha|}\Big(\sum_{i=1}^{m+1} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-1}\sigma +$$

$$+ \sum_{i=m+2}^{2m+3} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-m-2}\sigma + \sum_{i=2m+4}^{3m+5} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-2m-4}\sigma\Big) \le$$

$$\le \Bigg[\Big|\frac{pq^{\nu}}{a+b}\Big| + (k_1(1+|c|) + |pq^{\nu}|k_3 + |b|k_1 r + |c|k_2)\frac{\delta}{\sigma} +$$

$$+ \Bigg(|pq^{\nu+m+1}|\frac{k_3}{|\alpha|} + |hq^{\nu+m}|\frac{k_1}{|\alpha|}\Bigg)\frac{n_{m+1}}{n_m} + \frac{k_1}{|\alpha|}\Big(\sum_{i=1}^{m+1} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=m+2}^{2m+3} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-m-2} + \sum_{i=2m+4}^{3m+5} l_{m+1,i}(t_0, n_0\sigma, \nu)n_{i-2m-4}\Bigg)\Bigg] n_m\sigma \le$$

$$\le \Big(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\Big)n_m\sigma = \Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big)n_m\sigma < n_m\sigma.$$

Последнее неравенство означает, что

$$|y^{(m)}(T)| \le \Big(1 - \frac{\varepsilon}{4}\Big)n_m\sigma < n_m\sigma, \;\; m = \overline{0,\ j-1}.$$

Рассмотрим старшую производную $y^{(j+1)}(t)$ при $t \in [t_0, T)$. Из (5), (6), (9) – (11) и (13) получим

$$|y^{(j+1)}(t)| < |a|\sigma + |b|\sigma + |c|n_{j+1}\sigma + |pq^{\nu+j}|\sigma + |hq^{\nu+j}|n_{j+1}\sigma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j+1} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-1}\sigma + \sum_{i=j+2}^{2j+3} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-j-2}\sigma +$$

$$+ \sum_{i=2j+4}^{3j+5} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-2j-4}\sigma \le$$

$$\le \Big[|c| + |hq^{\nu+j}| + (|a| + |b| + |pq^{\nu+j}|)\frac{1}{n_{j+1}} + l_{j+1,2j+3}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu) +$$

$$+ l_{j+1,3j+5}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu) + \frac{1}{n_{j+1}}\Big(\sum_{i=1}^{j+1} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=j+2}^{2j+2} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-j-2} + \sum_{i=2j+4}^{3j+4} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-2j-4}\Big)\Big]n_{j+1}\sigma \le$$

$$\le \Big(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\Big)n_{j+1}\sigma = \Big(1 - \frac{\varepsilon}{3}\Big)n_{j+1}\sigma < n_{j+1}\sigma.$$

Следовательно, $|y^{(j+1)}(T)| \le \Big(1 - \frac{\varepsilon}{3}\Big)n_{j+1}\sigma < n_{j+1}\sigma$.

Рассмотрим функцию $y^{(j)}(t)$ при $t \in [t_0, T)$. Из условия $\alpha < 0$ и (3), (6), (8) – (13) будем иметь

$$|y^{(j)}(t)| < k_1(1 + |c| + |hq^{\nu+j-1}|)\delta + |b|k_1 r\delta + |c|k_2\delta + |hq^{\nu+j-1}|\sigma +$$

$$+ |pq^{\nu+j}|\frac{k_1}{|\alpha|}\sigma + |hq^{\nu+j-1}\sigma \operatorname*{var}_{0,t-t_0} X + \frac{k_1}{|\alpha|}\Big(\sum_{i=1}^{j+1} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=j+2}^{2j+3} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-j-2}\sigma + \sum_{i=2j+4}^{3j+5} l_{j+1,i}(t_0, n_{j+1}\sigma, \nu)n_{i-2j-4}\sigma\Big) \le$$

$$\le \Big[(k_1(1 + |c| + |hq^{\nu+j-1}|) + |b|k_1 r + |c|k_2)|\frac{\delta}{\sigma} +$$

$$+\Big(\Big|\frac{h}{q}\Big|+|p|\frac{k_1}{|\alpha|}+\Big|\frac{h}{q}\Big|k_2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\Big)q^{\nu+j}+$$

$$+\frac{k_1}{|\alpha|}\Big(\sum_{i=1}^{j+1}l_{j+1,i}(t_0,n_{j+1}\sigma,\nu)n_{i-1}+\sum_{i=j+2}^{2j+3}l_{j+1,i}(t_0,n_{j+1}\sigma,\nu)n_{i-j-2}+$$

$$+\sum_{i=2j+4}^{3j+5}l_{j+1,i}(t_0,n_{j+1}\sigma,\nu)n_{i-2j-4}\Big)\Big]\sigma<\Big(\frac{\varepsilon}{3}+1-\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}\Big)\sigma=\Big(1-\frac{\varepsilon}{3}\Big)\sigma<\sigma.$$

Следовательно, $|y^{(j)}(T)|\le\Big(1-\frac{\varepsilon}{3}\Big)\sigma<\sigma$.

Итак, мы показали, что $|y^{(m)}(T)|<n_m\sigma,\ m=\overline{0,j+1}$. Но это противоречит предположению относительно T. Поэтому $T=+\infty$ и

$$|y^{(m)}(t)|<n_m\sigma\quad\forall t\in[qt_0,+\infty),\ \ m=\overline{0,j+1}.$$

В приведенных рассуждениях t_0 является переменной величиной, а согласно условию теоремы эта величина должна быть фиксированной. Однако с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, можно показать, что для любого t_1, удовлетворяющего условию $qt_1<t_1-r$, и произвольного $\eta>0$ существует константа $0<\gamma<\eta$ такая, что из условия

$$|x^{(m)}(\theta)|\le\gamma\quad\forall\theta\in[qt_1,t_1],\ \ m=\overline{0,j+1},$$

следует оценка

$$|x^{(m)}(t)|\le\eta\quad\forall t\in[qt_1,+\infty],\ \ m=\overline{0,j+1}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим линейное уравнение

$$x'(t)=ax(t)+bx(t-r)+cx'(t-r)+px(qt)+hx'(qt).\tag{14}$$

Справедлива теорема, которая уточняет теорему 1 для линейного случая.

Теорема 2. *Пусть*:

1) $\alpha_0<0$;

2) параметры $\alpha,\nu\in R$ *и* $j=0,1,2,\ldots$ *удовлетворяют неравенствам* $\alpha_0<\alpha<0$,

$$\frac{1}{\ln q^{-1}}\ln\Big|\frac{p}{a+b}\Big|<\nu,\quad\left(\Big|\frac{h}{q}\Big|+|p|\frac{k_1}{|\alpha|}+\Big|\frac{h}{q}\Big|k_2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j}<1,\quad |c|+|h|q^{\nu+j}<1;$$

3) для числа $t_0>0$ *выполняется неравенство* $qt_0<t_0-r$.

Тогда существует константа $K\ge 0$ *такая, что для* $j+1$ *раз непрерывно дифференцируемых решений* $x(t)$ *уравнения (14) имеет место оценка*

$$\max\{|x(t)|,|x'(t)|,\ldots,|x^{(j+1)}(t)|\}<$$

$$<K\max\Big\{\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|x(s)|,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}|x'(s)|,\ldots,\ \sup_{s\in[qt_0,t_0]}|x^{(j+1)}(s)|\Big\}t^{\nu}\quad\forall t\in[qt_0,+\infty).$$

Доказательство. Последовательно дифференцируя левую и правую части уравнения (14) j раз, получаем $j+1$ дифференциальное уравнение для функций $x^{(m)}(t),\ m=\overline{0,j}$. Выполняя замену переменных $x(t)=t^{\nu}y(t)$, для $y^{(m)}(t),\ m=\overline{0,j}$, имеем уравнения

$$\begin{aligned}y^{(m+1)}(t) = ay^{(m)}(t) + by^{(m)}(t-r) + cy^{(m+1)}(t-r)+\\ + pq^{\nu+m}y^{(m)}(qt) + hq^{\nu+m}y^{(m+1)}(qt)+\\ + F_{m+1}(t,\nu,y(t),y'(t),\ldots,y^{(m)}(t),\ y(t-r),\ y'(t-r),\ldots,\ y^{(m+1)}(t-r),\\ y(qt),\ y'(qt),\ldots,\ y^{(m)}(qt)),\quad m=\overline{0,j}.\end{aligned} \tag{15}$$

Можно показать, что для любого $t\in[t_0,+\infty)$ выполняется неравенство

$$|F_{m+1}(t,\nu,z_1,\ldots,z_{3m+4}) - F_{m+1}(t,\nu,u_1,\ldots,u_{3m+4})| \le \sum_{i=1}^{3m+4} l_{m+1,i}(t_0,\nu)|z_i-u_i|, \tag{16}$$

где $l_{m+1,i}(t_0,\nu)\to 0$ при $t_0\to+\infty,\ i=\overline{1,3m+4},\ m=\overline{0,j}$.

Запишем уравнения для $y^{(m)}(t),\ m=\overline{0,j-1}$, в интегральной форме

$$\begin{aligned}y^{(m)}(t) = -\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}y^{(m)}(qt) + X(t-t_0)(y^{(m)}(t_0) - cy^{(m)}(t_0-r))+\\ + pq^{\nu+m}W(t-t_0)y^{(m)}(qt_0) + b\int\limits_{t_0-r}^{t_0} X(t-\theta-r)y^{(m)}(\theta)d\theta-\\ - c\int\limits_{t_0-r}^{t_0} y^{(m)}(\theta)dX(t-\theta-r)+\\ + pq^{\nu+m+1}\int\limits_{t_0}^{t} W(t-s)y^{(m+1)}(qs)ds + hq^{\nu+m}\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(m+1)}(qs)ds+\\ + \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)F_{m+1}(s,\nu,y(s),y'(s),\ldots,y^{(m)}(s),y(s-r),y'(s-r),\ldots\\ \ldots,y^{(m+1)}(s-r),y(qs),y'(qs),\ldots,y^{(m)}(qs))ds.\end{aligned} \tag{17}$$

Для функции $y^{(j)}(t)$ имеем уравнение

$$y^{(j)}(t) = X(t-t_0)(y^{(j)}(t_0) - cy^{(j)}(t_0 - r) - hq^{\nu+j-1}y^{(j)}(qt_0))+$$

$$+ b\int\limits_{t_0-r}^{t_0} X(t-\theta-r)y^{(j)}(\theta)d\theta - c\int\limits_{t_0-r}^{t_0} y^{(j)}(\theta)dX(t-\theta-r)+$$

$$+ hq^{\nu+j-1}y^{(j)}(qt) + pq^{\nu+j}\int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)y^{(j)}(qs)ds-$$

$$- hq^{\nu+j-1}\int\limits_{t_0}^{t} y^{(j)}(qs)dX(t-s)+$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} X(t-s)F_{j+1}(s,\nu,y(s),y'(s),\ldots,y^{(j)}(s),y(s-r),y'(s-r),\ldots$$

$$\ldots, y^{(j+1)}(s-r), y(qs), y'(qs),\ldots,y^{(j)}(qs))ds. \tag{18}$$

Из условия $\alpha < 0$ и (3), (4), (16), (17) следует, что функции $y^{(m)}(t), m = \overline{0, j-1}$, удовлетворяют неравенствам

$$|y^{(m)}(t)| \le \left|\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}\right| \sup_{s\in[qt_0,qt]} |y^{(m)}(s)|+$$

$$+ (k_1(1+|c| + |hq^{\nu+m}|k_3 + |b|k_1 r + |c|k_2) \sup_{s\in[qt_0,qt]} |y^{(m)}(s)|+$$

$$+ \left(|pq^{\nu+m+1}|\frac{k_3}{|\alpha|} + |hq^{\nu+m}|\frac{k_1}{|\alpha|}\right) \sup_{s\in[qt_0,qt]} |y^{(m+1)}(s)|+$$

$$+ \frac{k_1}{|\alpha|}\left(\sum_{i=1}^{m+1} l_{m+1,i}(t_0,\nu) \sup_{s\in[qt_0,t]} |y^{(i-1)}(s)|+\right.$$

$$+ \sum_{i=m+2}^{2m+3} l_{m+1,i}(t_0,\nu) \sup_{s\in[qt_0,t-r]} |y^{(i-m-2)}(s)|+$$

$$+\sum_{i=2m+4}^{3m+4} l_{m+1,i}(t_0,\nu)\sup_{s\in[qt_0,qt]}|y^{(i-2m-4)}(s)|\Bigg)\le$$

$$\le\left|\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}\right|\sup_{s\in[qt_0,qt]}|y^{(m)}(s)|+$$

$$+(k_1(1+|c|)+|pq^{\nu+m}|k_3+|b|k_1r+|c|k_2)\sup_{s\in[qt_0,t_0]}|y^{(m)}(s)|+$$

$$+\left(|pq^{\nu+m+1}|\frac{k_3}{|\alpha|}+|hq^{\nu+m}|\frac{k_1}{|\alpha|}\right)\sup_{s\in[qt_0,qt]}|y^{(m+1)}(s)|+$$

$$+\frac{k_1}{|\alpha|}\Bigg(\sum_{i=1}^{m+1}(l_{m+1,i}(t_0,\nu)+l_{m+1,m+i+1}(t_0,\nu)+$$

$$+l_{m+1,2m+i+3}(t_0,\nu))\sup_{s\in[qt_0,t]}|y^{(i-1)}(s)|+l_{m+1,2m+3}(t_0,\nu)\sup_{s\in[qt_0,t]}|y^{(m+1)}(s)|\Bigg).$$

Введем обозначения

$$l_{m+1,i}(t_0,\nu)+l_{m+1,m+i+1}(t_0,\nu)+l_{m+1,2m+i+3}(t_0,\nu)\overset{\mathrm{df}}{=}L_{m+1,i}(t_0,\nu),$$

$$i=\overline{1,m+1},$$

$$l_{m+1,2m+3}(t_0,\nu)\overset{\mathrm{df}}{=}L_{m+1,m+2}(t_0,\nu),\quad m=\overline{0,j},$$

$$\sup_{s\in[qt_0,t]}|y^{(i)}(s)|\overset{\mathrm{df}}{=}z_{i+1}(t),\quad i=\overline{0,j+1}.$$

Тогда последнее неравенство в новых обозначениях примет вид

$$|y^{(m)}(t)|\le\left|\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}\right|z_{m+1}(qt)+(k_1(1+|c|)+|pq^{\nu+m}|k_3+|b|k_1r+$$

$$+|c|k_2)z_{m+1}(t_0)+\left(|pq^{\nu+m+1}|\frac{k_3}{|\alpha|}+|hq^{\nu+m}|\frac{k_1}{|\alpha|}\right)z_{m+2}(qt)+$$

$$+\frac{k_1}{|\alpha|}\sum_{i=1}^{m+2}L_{m+1,i}(t_0,\nu)z_i(t).$$

Легко проверить, что

$$z_{m+1}(t) \le \Big|\frac{pq^{\nu+m}}{a+b}\Big| z_{m+1}(t-r) + (k_1(1+|c|)+$$

$$+ |pq^{\nu+m}|k_3 + |b|k_1 r + |c|k_2) z_{m+1}(t_0) +$$

$$+ \left(|pq^{\nu+m+1}| \frac{k_3}{|\alpha|} + |hq^{\nu+m}| \frac{k_1}{|\alpha|} \right) z_{m+2}(t-r) +$$

$$+ \frac{k_1}{|\alpha|} \sum_{i=1}^{m+2} L_{m+1,i}(t_0,\nu) z_i(t), \ t \ge t_0, \quad m = \overline{0, j-1}. \tag{19}$$

Рассмотрим функцию $y^{(j)}(t)$ при $t \ge t_0$. Из условия $\alpha < 0$ и (3), (16), (18) получаем

$$|y^{(m)}(t)| \le (k_1(1+|c|+|hq^{\nu+j-1}|) + |b|k_1 r + |c|k_2) z_{j+1}(t_0) +$$

$$+ \left(|hq^{\nu+j-1}| + |pq^{\nu+j}| \frac{k_1}{|\alpha|} + |hq^{\nu+j-1}| k_2 \frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1} \right) z_{j+1}(qt) +$$

$$+ \frac{k_1}{|\alpha|} \sum_{i=1}^{j+2} L_{j+1,i}(t_0,\nu) z_i(t).$$

Отсюда следует

$$z_{j+1}(t) \le (k_1(1+|c|+|hq^{\nu+j-1}|) + |b|k_1 r + |c|k_2) z_{j+1}(t_0) +$$

$$+ \left(\Big|\frac{h}{q}\Big| + |p| \frac{k_1}{|\alpha|} + \Big|\frac{h}{q}\Big| k_2 \frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1} \right) q^{\nu+j} z_{j+1}(t-r) +$$

$$+ \frac{k_1}{|\alpha|} \sum_{i=1}^{j+2} L_{j+1,i}(t_0,\nu) z_i(t). \tag{20}$$

Рассмотрим старшую производную $y^{(j+1)}(t)$ при $t \ge t_0$. Из (15), (16) и (20) следуют неравенства

$$|y^{(j+1)}(t)| \le |a| z_{j+1}(t) + |b| z_{j+1}(t-r) + |c| z_{j+2}(t-r) + |pq^{\nu+j}| z_{j+1}(qt) +$$

$$+ |hq^{\nu+j}| z_{j+2}(qt) + \sum_{i=1}^{j+2} L_{j+1,i}(t_0,\nu) z_i(t) \le$$

$$\le (|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)z_{j+1}(t)+$$

$$+(|c|+|hq^{\nu+j}|)z_{j+2}(t-r)+\sum_{i=1}^{j+2}L_{j+1,i}(t_0,\nu)z_i(t)\le$$

$$\le (|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)\left(\left|\frac{h}{q}\right|+|p|\frac{k_1}{|\alpha|}+\left|\frac{h}{q}\right|k_2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j}z_{j+1}(t-r)+$$

$$+(|c|+|hq^{\nu+j}|)z_{j+2}(t-r)+$$

$$+\left((|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)\frac{k_1}{|\alpha|}+1\right)\sum_{i=1}^{j+2}L_{j+1,i}(t_0,\nu)z_i(t)+$$

$$+(|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)(k_1(1+|c|+|hq^{\nu+j-1}|)+$$

$$+|b|k_1r+|c|k_2)z_{j+1}(t_0)+z_{j+2}(t_0).$$

Таким образом,

$$z_{j+2}(t)\le (|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)\left(\left|\frac{h}{q}\right|+|p|\frac{k_1}{|\alpha|}+\left|\frac{h}{q}\right|k_2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j}z_{j+1}(t-r)+$$

$$+(|c|+|hq^{\nu+j}|)z_{j+2}(t-r)+$$

$$+\left((|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)\frac{k_1}{|\alpha|}+1\right)\sum_{i=1}^{j+2}L_{j+1,i}(t_0,\nu)z_i(t)+$$

$$+(|a|+|b|+|pq^{\nu+j}|)(k_1(1+|c|+|hq^{\nu+j-1}|)+$$

$$+|b|k_1r+|c|k_2)z_{j+1}(t_0)+z_{j+2}(t_0). \qquad (21)$$

Введем обозначения $\vec{z}(t)\overset{\mathrm{df}}{=}(z_1(t),\ldots,z_{j+2}(t))^T,\ D=\{d_{n,m}\},\ L=\{Л_{n,m}\}$ и $U=\{u_{n,m}\}$ – матрицы размера $(j+2)\times(j+2)$, элементы которых определяются следующим образом:

$$d_{m,m}\overset{\mathrm{df}}{=}\begin{cases}\left|\dfrac{pq^{\nu+\mu-1}}{a+b}\right|, & m=\overline{1,j},\\ \left(\left|\dfrac{h}{q}\right|+|p|\dfrac{k_1}{|\alpha|}+\left|\dfrac{h}{q}\right|k_2\dfrac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j}, & m=j+1,\\ |c|+|h|q^{\nu+j}, & m=j+2,\end{cases}$$

$$d_{m,m+1} \overset{\mathrm{df}}{=} |pq^{\nu+m}|\frac{k_3}{|\alpha|} + |hq^{\nu+m-1}|\frac{k_1}{|\alpha|}, \ \ m = \overline{1,j},$$

$$d_{j+2,j+1} \overset{\mathrm{df}}{=} (|a| + |b| + |pq^{\nu+j}|)\left(\left|\frac{h}{q}\right| + |p|\frac{k_1}{|\alpha|} + \left|\frac{h}{q}\right|k_2\frac{e^{-\alpha r}}{e^{-\alpha r}-1}\right)q^{\nu+j},$$

остальные элементы матрицы D равны нулю;

$$u_{m,m} \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} k_1(1+|c|) + |pq^{\nu+\mu-1}|k_3 + |b|k_1 r + |c|k_2, & m = \overline{1,j}, \\ k_1(1+|c|+|hq^{\nu+j-1}|) + |b|k_1 r + |c|k_2, & m = \overline{j+1}, \\ 1, & m = j+2, \end{cases}$$

$$Л_{n,m} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{k_1}{|\alpha|}L_{n,m}(t_0,\nu), \ n = \overline{1,j+1}, \quad m = \overline{1,n+1},$$

$$Л_{j+2,m} \overset{\mathrm{df}}{=} \left((|a| + |b| + |pq^{\nu+j}|)\frac{k_1}{|\alpha|} + 1\right)L_{j+1,m}(t_0,\nu), \quad m = \overline{1,j+2},$$

остальные элементы матрицы L равны нулю;

$$u_{j+2,j+1} \overset{\mathrm{df}}{=} (|a| + |b| + |pq^{\nu+j}|)(k_1(1+|c|+|hq^{\nu+j-1}|) + |b|k_1 r + |c|k_2),$$

остальные элементы матрицы U равны нулю.

Тогда неравенства (19) – (21) можно записать в виде

$$\vec{z}(t) \le D\vec{z}(t-r) + L\vec{z}(t) + U\vec{z}(t_0)$$

или

$$(E-L)\vec{z}(t) \le D\vec{z}(t-r) + U\vec{z}(t_0),$$

где E — единичная матрица. Матрица L является сколь угодно малой по норме при достаточно большом t_0 и, следовательно, $(E-L)^{-1} = E + L + L^2 + L^3 + \ldots$. Умножив левую и правую части последнего неравенства на неотрицательную матрицу $(E-L)^{-1}$, получим

$$\vec{z}(t) \le D_1\vec{z}(t-r) + (E-L)^{-1}U\vec{z}(t_0), \tag{22}$$

где $D_1 \overset{\mathrm{df}}{=} (E-L)^{-1}D$. При достаточно малой матрице L собственные значения матрицы D_1 сколь угодно близки к собственным значениям матрицы D. Матрица D блочная, и ее собственные числа являются элементами главной диагонали. Последние (согласно второму условию теоремы) по модулю меньше единицы. Следовательно, при достаточно большом t_0 (малой L) имеем $\|D_1^n\| \le Kd^n$, $n \ge 1$, для некоторых констант K, $0 \le$

$\leq d < 1$, и нормы $\|G\| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{1\leq i\leq j+2} \sum\limits_{\gamma=1}^{j+2} |g_{i,\gamma}|$. Норму вектора $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_{j+2})^T$ определим так: $\|\vec{g}\| \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{1\leq i\leq j+2} |g_i|$. Отметим также, что матрица D_1 неотрицательная. С учетом этих замечаний продолжим неравенство (22). Пусть

$$t - t_0 = nr + \tau,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ \ 0 \leq \tau < r.$$

Тогда

$$\vec{z}(t) \leq D_1^{n+1}\vec{z}(t-(n+1)r) + D_1^n(E-L)^{-1}U\vec{z}(t_0) + \ldots$$

$$\ldots + D_1(E-L)^{-1}U\vec{z}(t_0) + (E-L)^{-1}U\vec{z}(t_0).$$

Отсюда получим

$$\|\vec{z}(t)\| \leq \|D_1^{n+1}\|\|\vec{z}(t-(n+1)r)\| + \|D_1^n\|\|(E-L)^{-1}\|\|U\|\|\vec{z}(t_0)\| + \ldots$$

$$\ldots + \|D_1\|\|(E-L)^{-1}\|\|U\|\|\vec{z}(t_0)\| + \|(E-L)^{-1}\|\|U\|\|\vec{z}(t-0)\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{Kd}{1-d} + 1\right)\|(E-L)^{-1}\|\|U\|\|\vec{z}(t_0)\|.$$

В приведенных рассуждениях t_0 является переменной величиной, а согласно условию теоремы эта величина должна быть фиксированной. Однако с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше, можно показать, что для любого $t_1, qt_1 < t_1 - r$, и вектор-функции

$$\vec{Z}(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left(\sup_{s\in[qt_1,t]}|x(s)|,\ \ \sup_{s\in[qt_1,t]}|x'(s)|\ldots,\ \ \sup_{s\in[qt_1,t]}|x^{(j+1)}(s)|\right)^T$$

имеет место неравенство

$$\vec{Z}(t) \leq D|_{\nu=0}\vec{Z}(t-r) + U|_{\nu=0}\vec{Z}(t_1),\ t \geq t_1.$$

Теорема доказана.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) == ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891–937.
2. *De Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$. I, II // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56. Indag. Math. — 1953. — **15**. — P. 449–464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes Math. — 1971. — **243**. — P. 249–254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 192 с.

5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, № 10. — С. 1483 – 1491.

6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627 – 1645.

7. *Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. — 2004. — **7**, № 1. — С. 24 – 28.

8. *Гребенщиков Б. Г., Рожков В. И.* Асимптотическое поведение решения одной стационарной системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. — 1993. — **29**, № 5. — С. 751 – 758.

9. *Гребенщиков Б. Г., Ложников А. Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывания // Там же. — 2004. — **40**, № 12. — С. 1587 – 1595.

10. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — 267 p.

11. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. – 421 с.

Получено 10.10.2006