ДИСКУССИОННЫЕ СООБЩЕНИЯ

П.В. ВАСИЛИК, А.И. ПРОВОТАР

УДК 530.12, 519.95

О ПАРАЛОГИЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Ключевые слова: *аксиоматическая система, функция, доказательство.*

ВВЕДЕНИЕ

В математической логике, как и в математике в целом, изучение произвольных объектов начинается с определений, идентифицирующих эти объекты, с дальнейшим формулированием утверждений об этих объектах, которые следуют, как правило, из определений. Часто эти утверждения не очевидны и, следовательно, требуют некоторых пояснений, т.е. доказательств. При этом можно выделить два типа доказательств: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ и $\Gamma \setminus \mathcal{A}$, $\neg \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$. Первые, как известно, относятся к классическим математическим доказательствам (выводам из посылок), вторые — к доказательствам от противного.

Если относительно выводов из посылок все складывается относительно благополучно, то для доказательств от противного ситуация на сегодняшний день достаточно неопределенная. Это связано с большим количеством критических работ по основаниям математики в последнее время, относящихся к канторовой теории множеств в целом, диагональной процедуре и теоремам о неполноте формальных теорий в частности.

Следует отметить, что закон исключения третьего (ЗИТ), лежащий в основе доказательства от противного, впервые был сформулирован Аристотелем в «Метафизике» и сводился к следующему тезису: «... если относительно чего бы то ни было [одного] необходимо либо утверждение, либо отрицание, то невозможно, чтобы и отрицание и утверждение были ложными, ибо ложным может быть лишь один из обоих членов противоречия». Но уже в трактате «Об истолковании» Аристотель подверг сомнению общезначимость закона исключения третьего и показал невозможность его применения к будущим событиям. В частности, он утверждал, что рассмотрение вопроса о том, будет, например, завтра морская битва или не будет, нельзя вести с позиций истинности или ложности, поскольку ни одно из этих событий еще не относится к категории сущего, существующего.

Применительно к теории множеств и арифметике эту аристотелевскую идею необходимо интерпретировать следующим образом: если существует последовательность некоторых объектов (множеств, элементов, чисел), воспринимаемая как целое и включающая в себя как существующие (уже порожденные) объекты, так и объекты еще не существующие (еще не порожденные), то о такой последовательности нельзя говорить в терминах истинности или ложности (даже при наличии корректного закона задания последовательности), поскольку вторая часть рассматриваемой последовательности еще не относится к категории сущего, существующего (относится к будущим событиям).

Сказанное означает, что потенциальную последовательность нельзя представлять как целостность, как единый объект, поскольку объединение сущего (настоящего) и несущего (будущего) в рамках одного объекта не только блокирует применение ЗИТ, но и вообще не позволяет интерпретировать данный объект в терминах истинности и рассматривать его как полноценный элемент формальной системы любого рода.

Некоторые уточнения (или расширение) ЗИТ предприняты в [6]. Суть этого расширения состоит в том, что говорить об истинности или ложности произвольного утверждения p можно только после исследования дизъюнкций:

а) «p и $\neg p$ осмысленны» $\vee$ «p и $\neg p$ бессмысленны»;

б) «p и $\neg p$ достаточно определБнны» $\vee$ «p и $\neg p$ недостаточно определБнны»;

в) «p истинно» $\vee$ «$\neg p$ ложно (неистинно)».

Здесь важно подчеркнуть, что произвольно взятые суждения p и $\neg p$ могут быть осмысленными или бессмысленными (неосмысленными), достаточно или недостаточно определенными только в паре (в составе целостной дизъюнкции). И лишь (вместе) пройдя тест (фильтр) на осмысленность и достаточную определенность, они (на завершающем этапе трехактного рассуждения) могут быть рассмотрены с точки зрения дихотомии: истинное — ложное (неистинное).

Например, суждения «число девять — синее» и «число девять — не синее» с точки зрения гармонической логики бессмысленны. Аналогично, суждения «шахматная доска — белая» и «шахматная доска — не белая» — хотя и оба осмысленны, но оба недостаточно определéнны. И лишь суждения вида: «шахматная доска — на 50 % белая» (И) и «шахматная доска — не на 50 % белая» (Л), образовавшаиеся после уточнения (квантитативного доопределения) предыдущей пары суждений, могут быть предметом истинностной оценки.

Цель настоящей статьи — проанализировать некоторые математические определения и построения с точки зрения их логической корректности, а также исследование более сложных утверждений и теорем математической логики и теории вычислений, при доказательстве которых используются противоречивые или сомнительные построения.

АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть заданы множества $\Omega = \{*, +, \#\}$, $B = \{+\}$. Определим множество A соотношением $x \in A \Leftrightarrow x \notin B$. Это соотношение означает, что множество A состоит из тех и только тех элементов, которые не входят в множество B, т.е. истинность следующих импликаций: $x \in A \Rightarrow x \notin B$, $x \notin B \Rightarrow x \in A$. Легко видеть, что при заданных множествах Ω и B только множество $A = \{*, \#\}$ удовлетворяет обеим импликациям.

С точки зрения логики, если ввести в рассмотрение предикаты $\mathcal{A}(x) =$ «$x \in A$», $\mathcal{B}(x) =$ «$x \notin B$», $\mathcal{P}(x) = \mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)$, $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{B}(x) \to \mathcal{A}(x)$, $\mathcal{R}(x) = \neg\mathcal{B}(x) \to \neg\mathcal{A}(x)$, то при условии, что множество B задано, множество A можно определить с помощью процедуры логического характера, например,

$$\mathcal{B}(*), \mathcal{Q}(x) \vdash \mathcal{A}(*), \mathcal{B}(\#), \mathcal{Q}(\#) \vdash \mathcal{A}(\#), \neg\mathcal{B}(+), \mathcal{R}(+) \vdash \neg\mathcal{A}(+).$$

Если положить $B = A$ и определить множество A соотношением $x \in A \Leftrightarrow x \notin A$, то в этом случае для каждого x истинно одно из высказываний: $\mathcal{A}(x) =$ «$x \in A$» либо $\neg\mathcal{A}(x) =$ «$x \notin A$». Учитывая приведенное выше соотношение для A, получим (при каждом конкретном значении x) логическое противоречие $\vdash \mathcal{A}(x)$, $\vdash \neg\mathcal{A}(x)$. Таким образом, использование так называемых определяющих отношений для произвольных множеств должно, по крайней мере, быть аргументированным, т. е. предусматривать необоснованное появление логического противоречия.

Рассмотрим диагональную процедуру Кантора [1], которая используется при доказательстве некоторых теорем математической логики и теории вычислений.

Теорема Кантора. Для доказательства несчетности множества всех подмножеств множества натуральных чисел делается предположение о существовании биекции $f: N \to 2^N$. После этого строится множество A, которое определяется соотношением $x \in A \Leftrightarrow x \notin f(x)$. Так как $f(x)$ — биекция, то имеет место $f(m) = A$ для некоторого m. Но в таком случае приходим к противоречию $m \in f(m) \Leftrightarrow m \notin f(m)$, которое (по мнению Кантора) вызвано предположением о существовании биекции, а следовательно, доказывает теорему.

На самом деле все происходит иначе. Построение множества A будет корректным только в случае определенности множества $f(x)$. Но при $x = m$ множество $f(m) = A$ будет неопределенным. Это означает, что относительно элемента m не можно дать ответ на вопрос: $m \in A$ или $m \notin A$, так как справедливыми будут следующие импликации: $m \in A \Rightarrow m \notin f(m) = A$, $m \notin A \Rightarrow m \in A$.

Более глубокий анализ приведенного выше доказательства позволяет сделать вывод, что соотношение, определяющее множество A, противоречит предположению о биективности отображения f. В самом деле, если $A = f(m)$, то при условии $m \notin A$ соотношение будет определять также и множество $A \cup \{m\}$, а при условии $m \in A$ — также и множество $A \setminus \{m\}$. Поэтому отображение f не только не является биективным, но даже не является функцией.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Как известно [2], диагональная процедура Кантора используется для доказательства существования всюду определенной одноместной функции, которая не принадлежит множеству $\Im$ всюду определенных одноместных функций, при условии существования универсальной функции для $\Im$.

Введение новой функции $g(x) = F(x, x) + 1$, где F универсальная для класса $\Im$, означает, что значение функции g в произвольной точке x можно вычислить как значение выражения $F(x, x) + 1$. Предположение о том, что g принадлежит классу $\Im$, означает, что $g(x) = F(i, x)$ для некоторого i. В этом случае получаем противоречие $F(i, i) = F(i, i) + 1$, которое (как утверждается) доказывает, что функция g не принадлежит классу $\Im$.

На самом деле противоречие возникает из-за некорректного (противоречивого) определения функции g. Кроме того, это противоречие вовсе не доказывает, что функция g не принадлежит классу $\Im$. Действительно, мы имеем два определения функции g. В соответствии с первым $g(i) = F(i, i)$, в соответствии со вторым $g(i) = F(i, i) + 1$. Таким образом, функция g в точке i имеет два значения, следовательно, не является функцией. Более того, возникшее противоречие означает, что мы не можем определять функцию g соотношением $g(x) = F(x, x) + 1$ при условии, что F — универсальная для класса $\Im$ функция, но только не то, что функция g не принадлежит классу $\Im$.

МАШИНЫ ТЬЮРИНГА

Формально машина Тьюринга [2] может определяться как совокупность

$$A = (K, \Gamma, H, q_0, q*),$$

где K — множество состояний; Γ — множество входных символов; H — словарное отображение множества $K \setminus \{q*\} \times \Gamma$ в множество $K \times \Gamma \times \{L, R, \lambda\}$ (функция переходов); $q_0 \in K$ и $q* \in K$ — соответственно начальное и заключительное состояния.

Процесс вычислений машины Тьюринга — это процесс последовательного преобразования слов. При этом словарное отображение φ называется частично вычислимым по Тьюрингу, если оно вычисляется некоторой машиной Тьюринга A, т.е., начиная с состояния q_0, машина A будет работать бесконечно долго на слове u, если $\varphi(u)$ не определено или остановится через конечное количество тактов работы в состоянии $q*$ с выходным словом $\varphi(u)$.

Считается, что машина Тьюринга A задает n-местную частичную функцию $f(x,\dots,z)$, если для произвольных натуральных $x,\dots,z$ машина A преобразует входное слово $1^x\#\dots\#1^z$ в слово $1^{f(x,\dots,z)}$, когда $f(x,\dots,z)$ определена, и работает бесконечно долго, если $f(x,\dots,z)$ не определена.

Частичные функции, задаваемые машинами Тьюринга, называются частично вычислимыми по Тьюрингу.

Понятно, что каждая машина Тьюринга, вычисляющая некоторую одноместную функцию, может быть задана словом в алфавите $K=\{1,q,{}',R,L,\lambda\}$. Но не каждое слово в алфавите K задает машину Тьюринга.

Пусть M — множество слов в алфавите K, которые задают машины Тьюринга. Поставим в соответствие каждому слову X в алфавите K номер, который получаем заменами в слове 1 на 12, q на 122, $'$ на 1222, R на 12222, L на 122222, λ на 1222222. Обозначим это инъективное соответствие $f:K^+\to \boldsymbol{N}$. Тогда отображение f': $M\to f(M)$ такое, что $f'(x)=f(x)$ — биекция.

Каждому слову X из M соответствует также частичная функция $s:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ из множества P всех частичных функций из $\boldsymbol{N}$ в $\boldsymbol{N}$, которая вычисляется машиной X. Обозначим это соответствие $h:M\to P$. Тогда $h':M\to h(M)$ такое, что $h'(x)=h(x)$ — сюръекция.

Каждому номеру из $f(m)$ поставим в соответствие натуральное число. Обозначим это отображение $r: f(m)\to\boldsymbol{N}$. Тогда $r': f(M)\to r(f(M))$ такое, что $r'(x)=r(x)$ — биекция. Число $r'(f'(X))$ называется номером МТ $X\in M$. Таким образом, будем иметь следующие отображения:

$$h(M)\xleftarrow{h'} M \overset{f'}{\leftrightarrow} f(M) \overset{r'}{\leftrightarrow} r(f(M)).$$

Определим функцию $g:\boldsymbol{N}\to h(M)$ соотношением

$$\begin{cases} h'(f'^{-1}(r'^{-1}(x))), & \text{если } x\in r'(f'(M));\\ \text{не определена}, & \text{если } x\notin r'(f'(M)).\end{cases}$$

Далее построим функцию $u:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$

$$u(n)=\begin{cases} 1, & \text{если } (g(n))(n) \text{ не определена};\\ (g(n))(n)+1, & \text{если } (g(n))(n) \text{ определена}.\end{cases}$$

Очевидно, что u — всюду определенная функция одной переменной, но она не вычисляется машиной Тьюринга. Действительно, если предположить, что $u\in h(M)$, то тогда $u=g(m)$ для некоторого m. Так как u — всюду определенная функция, то, с одной стороны, $u(m)=(g(m))(m)$, с другой, $u(m)=(g(m))+1$. Получили противоречие, которое (опять же, как утверждается) доказывает невычислимость функции u.

На самом деле противоречие, как и в передыдущем случае, возникает из-за некорректного (противоречивого) определения функции u. Действительно, предположение о том, что u — всюду определенная функция, означает, что выражение $(g(m))(m)$ будет определенным (поскольку $u(m)=(g(m))(m)$). А из этого следует (согласно определению функции u), что $u(m)=(g(m))(m)+1$. Таким образом, так определенная функция u принимает в точке m разные значения, следовательно, не является функцией. Кроме того, возникшее противоречие означает только то, что мы не можем определять функцию u приведенным выше соотношением при условии, что u — всюду определенная функция.

ТЕОРЕМА ГЕДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ

При доказательстве теоремы Геделя о неполноте используется некоторая теория первого порядка $\boldsymbol{S}$ [3–5, 7]. Она имеет единственную предикатную букву A_1^2, единственную предметную константу a_1 и три функциональные буквы: f_1^1, f_1^2, f_2^2.

Далее, используя более привычные обозначения, будем писать $t=s$ вместо $A_1^2(t,s)$, 0 вместо a_1 и соответственно t', $t+s$, $t\cdot s$ вместо $f_1^1(t)$, $f_1^2(t,s)$, $f_2^2(t,s)$, где t и s — термы. Следующие формулы являются аксиомами теории $\boldsymbol{S}$:

$$x_1 = x_2 \to (x_1 = x_3 \to x_2 = x_3);$$

$$x_1 = x_2 \to x_1' = x_2';$$

$$0 \neq x_1';$$

$$x_1' = x_2' \to x_1 = x_2;$$

$$x_1 + 0 = x_1;$$

$$x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)';$$

$$x_1 \cdot 0 = 0;$$

$$x_1 \cdot x_2' = (x_1 \cdot x_2) + x_1;$$

$$\mathcal{A}(0) \to (\forall x\,(\mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}(x')) \to \forall x\,\mathcal{A}(x)),$$

где $\mathcal{A}(x)$ — произвольная формула теории $\boldsymbol{S}$.

Правилами вывода в теории $\boldsymbol{S}$, как и в любой теории первого порядка, являются:

1) $\mathcal{A}, \mathcal{A} \to \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$ (modus ponens);

2) $\mathcal{A} \vdash \forall x_i\, \mathcal{A}$ (правило обобщения).

Как известно [7], теория $\boldsymbol{S}$ — это теория первого порядка с равенством. Кроме того, отношение $W_1(u,y)$ (u есть геделев номер формулы $\mathcal{A}(x_1)$, содержащей свободную переменную x_1, и y есть геделев номер вывода в $\boldsymbol{S}$ формулы $\mathcal{A}(\overline{u})$, где $\overline{u}$ — сокращенное обозначение для терма $0'^{\cdots\prime}$) является примитивно рекурсивным, т.е. примитивно рекурсивной будет его характеристическая функция. Учитывая, что всякое рекурсивное отношение выразимо в $\boldsymbol{S}$ (арифметическое отношение $R(x_1,\ldots,x_n)$ называется выразимым в $\boldsymbol{S}$, если существует формула $\mathcal{A}(x_1,\ldots,x_n)$ теории $\boldsymbol{S}$ с n свободными переменными такая, что для любых натуральных чисел $k_1,\ldots,k_n$:

1) еńėč $R(k_1,\ldots,k_n)$ čńņčķķī, ņī $\vdash_S \mathcal{A}(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n)$;

2) если $R(k_1,\ldots,k_n)$ ложно, то $\vdash \neg\mathcal{A}(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n)$.

Отсюда получим, что отношение $W_1(u,y)$ выразимо в $\boldsymbol{S}$ некоторой формулой $\mathcal{W}_1(x_1,x_2)$ с двумя свободными переменными: x_1, x_2. Это значит, что если $W_1(k_1,k_2)$ истинно, то $\vdash \mathcal{W}_1(\overline{k}_1,\overline{k}_2)$, и если $W_1(k_1,k_2)$ ложно, то $\vdash \neg\mathcal{W}_1(\overline{k}_1,\overline{k}_2)$. Далее рассматривается формула $\forall x_2\, \neg\mathcal{W}_1(x_1,x_2)$. Если m — геделев номер этой формулы, то подставив в нее $\overline{m}$ вместо x_1, получим замкнутую формулу $\forall x_2\, \neg\mathcal{W}_1(\overline{m},x_2)$. Справедливо следующее утверждение: $W_1(m,y)$ истинно тогда и только тогда, когда y есть геделев номер вывода в $\boldsymbol{S}$ формулы $\forall x_2\, \neg\mathcal{W}_1(\overline{m},x_2)$. Исходя из вышеизложенного, формулируется предложение, известное как теорема Геделя о неполноте для теории $\boldsymbol{S}$. А именно, если теория $\boldsymbol{S}$ непротиворечива, то формула $\forall x_2\, \neg\mathcal{W}_1(\overline{m},x_2)$ не выводима в $\boldsymbol{S}$.

Доказательство этого предложения проводится методом от противного и состоит в следующем. Предполагается, что теория $\boldsymbol{S}$ непротиворечива и $\vdash_S \forall x_2\, \neg\mathcal{W}_1(\overline{m},x_2)$. Тогда если k — геделев номер какого-нибудь вывода в $\boldsymbol{S}$ этой последней формулы, то справедливо $W_1(m,k)$. А так как $\mathcal{W}_1$ выражает W_1 в $\boldsymbol{S}$, то $\vdash_S \mathcal{W}_1(\overline{m},k)$. Из $\forall x_2\, \neg\mathcal{W}_1(\overline{m},x_2)$ по правилу индивидуализации (если терм t свободен для x в $\mathcal{A}(x)$, то $\forall x\,\mathcal{A}(x) \vdash \mathcal{A}(t)$) можно вывести $\neg\mathcal{W}_1(\overline{m},\overline{k})$. Таким образом, в $\boldsymbol{S}$ оказываются выводимыми формулы $\mathcal{W}_1(\overline{m},\overline{k})$ и $\neg\mathcal{W}_1(\overline{m},\overline{k})$, что противоречит предположению о непротиворечивости $\boldsymbol{S}$.

На самом деле противоречие заложено уже в определении отношений $W_1(u,y)$ и $W_2(u,y)$. Для того чтобы это показать, сделаем предварительно ряд уточнений и замечаний. Множество всех выводимых в $\boldsymbol{S}$ формул обозначим T, множество всех формул, для которых выводимо их отрицание — F. Отношение $R(x_1,\ldots,x_n)$ будем называть представимым в $\boldsymbol{S}$, если выполняется соотношение $R(k_1,\ldots,k_n)$ истинно

$\Leftrightarrow \vdash_S \mathcal{R}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$ для некоторой формулы $\mathcal{R}(x_1, \ldots, x_n)$. Очевидно, что справедливо следующее утверждение: если система непротиворечива $(F \cap T \neq \varnothing)$, то выразимость в $\boldsymbol{S}$ отношения $W_1(u, y)$ эквивалентна представимости в $\boldsymbol{S}$ этого отношения. Таким образом, относительно отношения $W_1(u, y)$ справедливо соотношение: $W_1(k_1, k_2)$ истинно $\Leftrightarrow \vdash \mathcal{W}_1(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$. Можно показать, что отношение $W_2(u, y)$ (u есть геделев номер формулы $\mathcal{A}(x_1)$, содержащей свободную переменную x_1, и y есть геделев номер вывода в $\boldsymbol{S}$ формулы $\neg\mathcal{A}(u)$) удовлетворяет соотношению: $W_2(k_1, k_2)$ истинно $\Leftrightarrow \vdash \neg\mathcal{W}_1(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$. Следовательно, предположение о выводимости формулы $\forall x_2\ \neg\mathcal{W}_1(\overline{m}, x_2)$ означает истинность $W_1(m, k)$ и $W_2(m, k)$ одновременно. Таким образом, полученное противоречие может означать только то, что сделанное предположение противоречит тому, что отношения W_1 и W_2 не пересекаются.

Несколько другой подход к получению противоречия предложен в [3]. Формулу $\mathcal{A}_m(x_1)$ с геделевым номером m и свободной переменной x_1 будем называть геделевой для множества чисел A, если выполняется соотношение: $n \in A \Leftrightarrow \mathcal{A}_m(\overline{n})$ выводима в $\boldsymbol{S}$. Если F^* обозначает множество геделевых номеров всех тех и только тех формул $\mathcal{A}_m(x)$ с геделевым номером m и свободной переменной x, диагонализация $\mathcal{A}_m(\overline{m})$ которых принадлежит F, то получим следующее утверждение: если $\mathcal{A}_m(x)$ — геделева формула для F^*, то система $\boldsymbol{S}$ неполная. Доказательство этого утверждения немедленно следует из соотношений $\mathcal{A}_x(x) \in F \Leftrightarrow x \in F^* \Leftrightarrow \mathcal{A}_m(x) \in T$, если положить $x = m$. Противоречие означает только то, что в рамках предложенных построений нельзя ответить на вопрос: $\mathcal{A}_m(m) \in T$ или $\mathcal{A}_m(m) \in F$. Следовательно, отношение, которое определяет множество выводимых формул теории $\boldsymbol{S}$ (по меньшей мере), некорректно.

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Все приведенные выше доказательства используют известный в математике метод «от противного». Суть его состоит в том, что для любой непротиворечивой (в смысле вывода противоречивых фактов) системы знаний Γ справедлив либо факт A, либо его отрицание $\neg A$. Поэтому в соответствии с этим методом, чтобы показать, что факт A (а не $\neg A$) включается в систему Γ $(\Gamma \vdash A)$, необходимо удалить A из системы Γ, а вместо него включить в систему факт $\neg A$ и построить систему $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\}$. Затем показать, что такая система будет противоречивой, т.е. существуют факты B и $\neg B$, принадлежащие $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\}$ $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\} \vdash B$, $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\}) \vdash \neg B$. В этом случае в системе Γ справедлив факт A. Действительно, $\Gamma \setminus \{A\} \cup \{\neg A\} \vdash B$, $\Gamma \setminus \{A\} \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$. По дедукции $\Gamma \setminus \{A\} \vdash \neg A \to \neg B$. Поскольку $\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$, то $\Gamma \setminus \{A\} \vdash B \to A$. Учитывая, что $\Gamma \setminus \{A\} \vdash \neg A \to B$, получим $\Gamma \setminus \{A\} \vdash \neg A \to A$. Таким образом, имеем $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\} \vdash \neg A \to A$ и $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \{\neg A\} \vdash \neg A$. Значит, $(\Gamma \setminus \{A\}) \cup \cup \{\neg A\} \vdash A$ и система $(\Gamma \setminus \{A\} \cup \{\neg A\}$ противоречива. Отсюда следует, что $\Gamma \vdash A$.

В качестве примера применения указанной схемы доказательства рассмотрим приведенные выше построения, относящиеся к универсальным функциям. Одноместная функция, которая не принадлежит множеству $\Im$ всюду определенных одноместных функций, — это функция $g(x) = F(x, x) + 1$. Выделим непротиворечивую систему знаний, которая используется в соответствующем доказательстве. Это следующие утверждения: $g(x)$ — функция и $g(x) \notin \Im$, $g(x) = F(x, x) + 1$. Далее в системе с утверждениями: $g(x)$ — не функция или $g(x)$ — функция и $g(x) \in \Im$, $g(x) = F(x, x) + 1$, строится вывод, что $g(x)$ — функция и $g(x) \notin \Im$. На самом деле при доказательстве был построен вывод утверждения $g(x)$ — не функция и $g(x) \notin \Im$.

Таким образом, все рассмотренные выше доказательства содержат явные противоречивые посылки в формулировках теорем (утверждений) и дополнительных предположениях (доказательство от противного). Поэтому процесс доказательства (в случае теоремы о неполноте) сводится к построению предложения, которое обладает свойством «не выводится в системе аксиом». Мы же построили предложение, относительно которого ничего определенного сказать нельзя. Точнее, относительно этого предложения можно сказать все что угодно. Один из подходов к построению других (корректных) доказательств состоит в исследовании свойств предложений в зависимости от свойств системы аксиом. Если все предложения, выводимые в системе аксиом, имеют некоторое свойство, а, например, предложение x такого свойства не имеет, то оно не будет выводиться в этой системе аксиом. При этом свойства предложений не должны быть связаны с выводимостью, поскольку все утверждения о выводимости — это утверждения некоторого метаязыка и, следовательно, не могут быть корректно исследованы в рамках аксиоматических систем, допускающих формализацию таких метаутверждений. Это согласуется с предложенной в [8] концепцией неполноты теоретических построений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья представляет собой результат участия авторов в так называемой инновационной войне по основаниям гармонической математики, предложенной в [6]. Суть последней состоит в создании и использовании формальных структур, которые используют исключительно понятие актуальной бесконечности. Такой подход позволяет избежать некорректных определений, о которых упоминалось раньше, а вместе с тем парадоксов и других паралогических построений теоретико-множественной математики.

Исключение понятия потенциальной бесконечности из гармонической математики приведет к тому, что истинность многих утверждений и теорем классической математики (теоретико-множественной) окажется сомнительной. В частности, это те утверждения, которые обсуждались в данной статье. Более того, возникает интересный вопрос о равносильности понятия потенциальной бесконечности и возможности появления ошибок в доказательствах, точно так же, как и использование понятия актуальной бесконечности при построении теории вычислений. Что мы потеряем и что получим в результате перехода к новой концептуальной математической конструкции; есть ли такой переход переходом к новому качеству [8]; решает ли он существующий кризис теоретико-множественной математики — ответы на эти вопросы зависят от многих факторов и, очевидно, будут найдены в ближайшем будущем.

Кроме того, как видно из результатов статьи, использование понятия потенциальной бесконечности приводит к тому, что на первый взгляд строгие математические определения и выкладки в ряде случаев могут оказаться некорректными. Это говорит, в первую очередь, о том, что некоторые результаты математической логики и теории вычислений требуют дальнейшего анализа и, возможно, уточнения.

В заключение отметим, что все изложенные выше теоремы имеют отношение только к классическим логикам и не представляют большого интереса для логик с «размытым» понятием истины, поскольку речь идет о точно определенных понятиях. Что касается направлений интуиционизма, то доказательства, подобные приведенным выше, в них не допускаются, в связи с отсутствием ЗИТ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — 430 с.
2. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 392 с.
3. Смальян Р. Теория формальных систем. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
4. Антипенко Л.Г. Проблема неполноты теории и ее гносеологическое значение. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
5. Провотар А.И. Неполнота в топосе // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 6. — С. 132–141.
6. Петросян В.К. Основные положения концепции оснований гармонической арифметики // Бесконечность в математике: философские и исторические аспекты. — М.: Янус-К, 1997. — 400 с.
7. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1976. — 320 с.
8. Василик П.В., Провотар А.И. К проблеме неполноты теоретических построений (на примере формализации некоторых задач естествознания) // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 4. — С. 145–150.

Поступила 05.10.2007